Reserva 1 de 2012

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange y da su interpretación geométrica. **(1 punto)**

b) Calcula un punto del intervalo $[0,2]$ en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ sea paralela a la cuerda (o segmento) que une los puntos de la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$ y $x = 2$. **(1,5 puntos)**

2A. Calcula la integral

$$\int \frac{x+2}{x^3+x^2}\,dx \qquad \textbf{(2,5 puntos)}$$

3A. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Calcula A^n cuando $n \in \mathbb{N}$ es par. **(0,75 puntos)**

b) Resuelve la ecuación matricial $6A^{20}X = B - 3AX$, donde X es una matrix cuadrada de orden 3. (Indicación: Sustituye de inicio el valor de A^{20} para facilitar los cálculos) **(1,75 puntos)**

4A. Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = y = \frac{z-1}{3}, \qquad s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = a + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que r y s se corten en un punto. Da dicho punto de corte. **(1,25 puntos)**

b) Para el valor de a obtenido, calcula la ecuación general del plano π que contiene a r y s. **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Reserva 1 - 2012

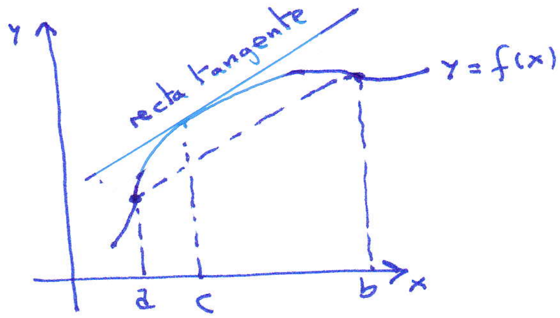
Propuesta A

1A) a) Teorema del valor medio de Lagrange

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces $\exists c \in (a,b)$ t.q. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Interpretación geométrica

Si se cumplen las hipótesis del teorema, existe al menos un punto $c \in (a,b)$ en el que su recta tangente es paralela al segmento determinado por los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$.



b) La función $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ es continua en $[0,2]$ y derivable en $(0,2)$, luego vamos a aplicar el TVM de Lagrange a f en dicho intervalo.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(2) = 17 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(c) = \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = \dfrac{17-1}{2} = \dfrac{16}{2} = 8 \\ f'(c) = 6c+2 \end{array}\right\} \Rightarrow 6c+2 = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6c = 6 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

2A) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3+x^2}\,dx$

Factorizamos el denominador

$$x^3 + x^2 = x^2(x+1) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 0 \text{ (doble)} \end{cases}$$

Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{x+2}{x^3+x^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} = \frac{Ax^2 + Bx(x+1) + C(x+1)}{(x+1)x^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (igualando los numeradores y dándole valores a x):

$$Ax^2 + Bx(x+1) + C(x+1) = x+2 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow C=2 \\ x=-1 \Rightarrow A=1 \\ x=2 \Rightarrow 4A+6B+3C=4 \Rightarrow B=-1 \end{cases}$$

$$\frac{x+2}{x^3+x^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{x} + \frac{2}{x^2}$$

Integral

$$\int \frac{x+2}{x^3+x^2}dx = \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{x}dx + 2\int \frac{1}{x^2}dx =$$

$$= \ln|x+1| - \ln|x| + 2\int x^{-2}dx = \ln|x+1| - \ln|x| + 2\frac{x^{-2+1}}{-2+1} =$$

$$= \boxed{\ln|x+1| - \ln|x| - \frac{2}{x} + C}$$

3A) a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$A^4 = A^2 \cdot A^2 = I \cdot I = I$

Por tanto, $\boxed{A^n = I \text{ cuando } n \text{ es par}}$

b) $6A^{20}X = B - 3AX$

Como $A^{20} = I$ se tiene: $6X = B - 3AX \Rightarrow 6X + 3AX = B \Rightarrow$

$\Rightarrow (6I + 3A)X = B \Rightarrow (6I+3A)^{-1}(6I+3A)X = (6I+3A)^{-1}B \Rightarrow$

$\uparrow$ Cuidado

$\Rightarrow \boxed{X = (6I+3A)^{-1}B}$

Calculamos $6I + 3A$

$$6I + 3A = 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculamos $(6I+3A)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 : 3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{-6F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3:(-9)]{F_2:9} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 & 0 & 2/9 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_3+F_1}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 & 0 & 2/9 \end{array}\right) \Rightarrow (6I+3A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ -1/9 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}$$

Calculamos X

$$\boxed{X = (6I+3A)^{-1} B = \begin{pmatrix} 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ -1/9 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}}$$

4A) $r \equiv \frac{x+1}{2} = y = \frac{z-1}{3}$, $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = a+\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

a) Para calcular a de forma que se corten en un punto lo que hay que hacer es resolver el sistema formado por las ecuaciones de r y s:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = -1+2\mu \\ y = \mu \\ z = 1+3\mu \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = a+\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \begin{array}{r} -1+2\mu = \lambda \\ \mu = a+\lambda \\ 1+3\mu = -\lambda \end{array}\Bigg\} \begin{array}{l} \lambda - 2\mu = -1 \\ \lambda - \mu = -a \\ \lambda + 3\mu = -1 \end{array}\Bigg\} \begin{array}{l} \lambda - 2\mu = -1 \\ -\lambda - 3\mu = 1 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5\mu = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\mu = 0}} \Rightarrow \lambda - 2\cdot 0 = -1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = -1}} \Rightarrow -1+0 = a \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

El punto de corte de r y s es:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1+2\cdot 0 \\ y = 0 \\ z = 1+3\cdot 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(-1,0,1)}$$

b) El plano π que nos piden está determinado por $\vec{u_r} = (2,1,3)$, $\vec{u_s} = (1,1,-1)$ y $\vec{PG}$ donde P es el punto de intersección de r y s, y G es un punto genérico: $\vec{PG} = (x,y,z) - (-1,0,1) = (x+1, y, z-1)$.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{4x - 5y - z + 5 = 0 \equiv \pi}$$

PROPUESTA B

1B. Sabiendo que la función
$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$
tiene un punto crítico en $(1,1)$, calcula a y b y demuestra que el punto crítico es un máximo. **(2,5 puntos)**

2B. a) Esboza la región encerrada entre el eje de abscisas y las parábolas $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 - 4x + 4$. **(0,5 puntos)**

b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3B. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$
$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} mx & & & + & z & = & 1 \\ & & my & + & z & = & m \\ -mx & - & my & + & (m+1)z & = & -m-1 \end{array} \right.$$
(1,5 puntos)

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado. **(1 punto)**

4B. Dados el plano $\pi \equiv y - z = 3$ y la recta
$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Estudia la posición relativa de π y r. **(1,25 puntos)**

b) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s paralela a π que corta a r perpendicularmente en el punto $P(0, 1, -1)$. **(1,25 puntos)**

Propuesta B

1B) $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+1}$, $a,b \in \mathbb{R}$

f tiene un punto crítico (punto en el que $f'=0$) en $(1,1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{a(x^2+1) - (ax+b)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-ax^2-2bx+a}{(x^2+1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1) = \dfrac{-a-2b+a}{2^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{-2b}{4} = 0 \Rightarrow b=0 \\ f(1) = 1 \Rightarrow \dfrac{a+b}{2} = 1 \Rightarrow a+b = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}}$$

Por tanto, $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

Ahora hay que comprobar que $x=1$ es un máximo relativo:

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4x(x^2+1)^2 - (-2x^2+2)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$f''(1) = -1 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{x=1 \text{ es un máx. relativo de } f.}$

2B) a) $f(x) = x^2$

Vértice: $\left.\begin{array}{l} x_v = 0 \\ y_v = 0 \end{array}\right\} V(0,0)$

Tabla:

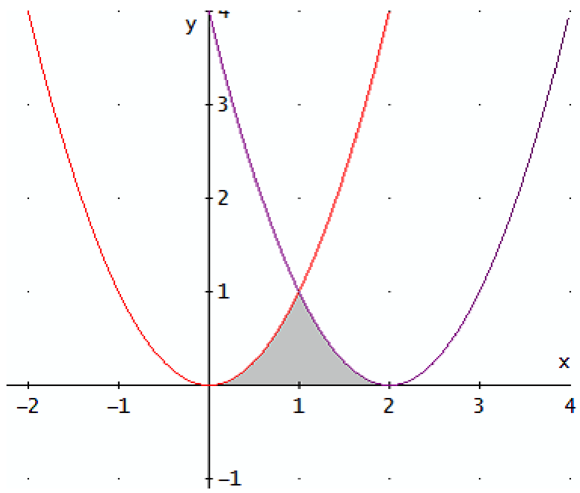
x	−1	−2	1	2
y	1	4	1	4

$g(x) = x^2 - 4x + 4$

Vértice: $\left.\begin{array}{l} x_v = \frac{4}{2} = 2 \\ y_v = 0 \end{array}\right\} V(2,0)$

Tabla:

x	0	4
y	4	4



Puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$

$$f(x)=g(x) \Rightarrow x^2 = x^2-4x+4 \Rightarrow -4x+4=0 \Rightarrow x=1$$

Área

$$\boxed{A} = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (x^2-4x+4)\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x\right|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) + \left[\left(\frac{2^3}{3} - \frac{4\cdot 2^2}{2} + 4\cdot 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{4\cdot 1^2}{2} + 4\cdot 1\right)\right] =$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}\,u^2}$$

3B) a) $\left.\begin{cases} mx+z=1 \\ my+z=m \\ -mx-my+(m+1)z=-m-1 \end{cases}\right\} M=\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ -m & -m & m+1 \end{pmatrix},\ \tilde{M}=\begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 1 \\ 0 & m & 1 & m \\ -m & -m & m+1 & -m-1 \end{pmatrix}$

$$|M| = m^2(m+3) \Rightarrow |M|=0 \Leftrightarrow m = \begin{cases} 0 \\ -3 \end{cases}$$

Si $\boxed{m \neq 0,-3}$ $\Rightarrow$ rango M = rango $\tilde{M}$ = 3 = nº de incógnitas $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sistema compatible determinado.

Si $\boxed{m=-3}$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+F_3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ rango M = rango $\tilde{M}$ = 2 < 3 = nº de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible indeterminado

Si $\boxed{m=0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow 0z=-2 \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) Si $m=-3$ hemos visto que el sistema es compatible indeterminado

$$\left.\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ \end{matrix}\right\} \begin{array}{l} \text{De } [2]: -3y+z=-3 \Rightarrow y=\frac{1}{3}z+1 \\ \text{Sustituimos en } [1]: -3x+z=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}z-\frac{1}{3} \end{array}$$

Hacemos $z=\lambda \in \mathbb{R}$. Las soluciones son $\boxed{(x,y,z)=\left(\frac{1}{3}\lambda-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\lambda+1, \lambda\right)}$

4B) $\pi \equiv y - z = 3$, $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

a) Posición relativa

$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\pi = (0,1,-1) \\ \vec{u}_r = (2,1,1) \end{array}\right\}$ $\pi \equiv y - z - 3 = 0$

Sustituimos $\vec{u}_r = (2,1,1)$ en la ec. del plano:

$+1-1=0 \Rightarrow$ sustituimos $P(0,1,-1) \in r$ en la ec.

completa del plano $1-1-3 \neq 0 \Rightarrow$ r y π son paralelos

De otra forma: mediante rangos

$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = y-1 \Rightarrow x - 2y + 2 = 0 \\ \frac{x}{2} = z+1 \Rightarrow x - 2z - 2 = 0 \end{cases}$

$\tilde{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} |M| = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M = 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } \tilde{M} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$ r y π son paralelos

b) La recta s que nos piden está determinada por $P(0,1,-1)$ y el vector director $\vec{u}_s = \vec{n}_\pi \times \vec{u}_r$

$\vec{u}_s = \vec{n}_\pi \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} = (2,-2,-2)$

Unas ecuaciones paramétricas de s son:

$$\boxed{s \equiv \begin{cases} x = +2\mu \\ y = 1 - 2\mu \\ z = -1 - 2\mu \end{cases} \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R}}$$