# Reserva 2 de 2012

**Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.**

**Bachillerato L. O. E.**

## Materia: MATEMÁTICAS II

**Instrucciones:** El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

## PROPUESTA A

---

**1A.** a) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto. **(0,5 puntos)**

b) Encuentra el punto de la función $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 30x + 1$ en el que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ es mínima. Encuentra también el punto donde la pendiente es máxima. **(2 puntos)**

**2A.** Encuentra una primitiva $F(x)$ de la función

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x$$

tal que $F(0) = 5$. **(2,5 puntos)**

**3A.** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$$

a) Calcula $A \cdot A^T$, donde $A^T$ es la matriz traspuesta de $A$. **(1 punto)**

b) Razona que siempre existe la matriz inversa de $A$, independientemente de los valores $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$. **(1,5 puntos)**

**4A.** Dados los planos $\pi_1 \equiv x - 2y - z = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + \lambda z = 4$:

a) Calcula el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ sean perpendiculares. **(1 punto)**

b) Para el valor de $\lambda$ obtenido en el apartado anterior, obtén unas ecuaciones paramétricas de la recta $r$ paralela a $\pi_1$ y a $\pi_2$ que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$. **(1,5 puntos)**

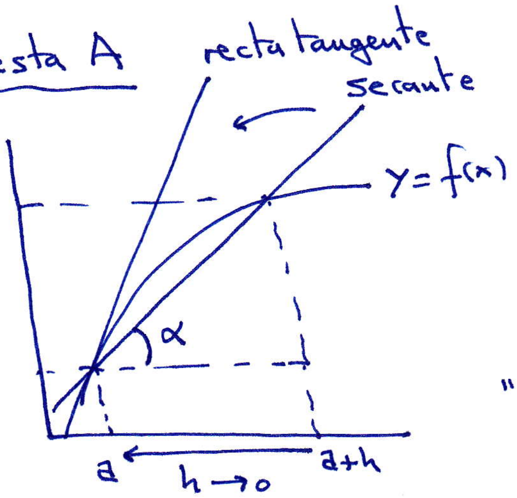
---

(sigue a la vuelta)

## Reserva 2 - 2012

### Propuesta A

1A) a)




$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = tg\,\alpha = m_{secantes}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) = m_{\substack{recta\\ tangente}}$$

"La derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto"

b) $m_{\substack{recta\\ tangente}} = f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x + 30 = g(x)$

Queremos optimizar $g(x)$:

$g'(x) = 12x^2 - 48x + 36$

$g''(x) = 24x - 48$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 48x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$

$g''(1) = -24 < 0 \Rightarrow x = 1$ es un máx. relativo

$g''(3) = 24 > 0 \Rightarrow x = 3$ " " mín. relativo

La pendiente es mínima en $x=3$ y máxima en $x=1$.

2A) ¿$F(x)$ primitiva de $f(x) = (x^2+1)e^x$ t.q. $F(0)=5$?

$$\int (x^2+1)e^x\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2+1 \rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = e^x\,dx \rightarrow v = e^x \end{array}\right] = (x^2+1)e^x - \int 2x e^x\,dx =$$

$$= (x^2+1)e^x - 2xe^x + 2e^x + C = F(x)$$

$$\int 2x e^x\,dx = \left[\begin{array}{l} u = 2x \rightarrow du = 2\,dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = e^x \end{array}\right] = 2xe^x - \int 2e^x\,dx =$$

$$= 2xe^x - 2e^x$$

$$F(0) = (0^2+1)e^0 - 2\cdot 0\cdot e^0 + 2\cdot e^0 + C = 3 + C = 5 \Rightarrow C = 2$$

$$\boxed{F(x) = \int (x^2+1)e^x\,dx = (x^2+1)e^x - 2xe^x + 2e^x + 2}$$

3A) $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$  $a,b\neq 0$

a) $$AA^t=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ -b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

b) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A|\neq 0$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} 0 & 0 & -b \\ a & b & 0 \\ -b & a & 0 \end{vmatrix}=$$

$= a\cdot a^3 - b\cdot(-b^3) = a^4+b^4 \neq 0$ ya que $a\neq 0$ y $b\neq 0$.

4A) $\pi_1 \equiv x-2y-z=0$

$\pi_2 \equiv 2x-y+\lambda z=4$

a) ¿$\lambda$ : $\pi_1 \perp \pi_2$?

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_{\pi_1}=(1,-2,-1) \\ \vec{n}_{\pi_2}=(2,-1,\lambda) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \pi_1\perp\pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1}\perp\vec{n}_{\pi_2} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1}\cdot\vec{n}_{\pi_2}=0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (1,-2,-1)\cdot(2,-1,\lambda)=0 \Leftrightarrow 2+2+\lambda=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=-4} \end{array}$$

b) La recta que nos piden está determinada por $P(1,2,3)$ y el vector director $\vec{u}_r=\vec{n}_{\pi_1}\times\vec{n}_{\pi_2}$.

$$\vec{u}_r=\vec{n}_{\pi_1}\times\vec{n}_{\pi_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}=8\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}+4\vec{k}+\vec{i}+4\vec{j}=$$
$$=9\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k}=(9,6,3)$$

$$\boxed{r\equiv\begin{cases} x=1+9\mu \\ y=2+6\mu \\ z=3+3\mu \end{cases} \text{ con } \mu\in\mathbb{R}}$$

¡¡No usar $\lambda$, ya que se ha usado en el apartado anterior para otra cosa!!

# Propuesta B

1B) ¿ $a>0$ : $\lim_{x\to 0} e^{\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}} = \lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{a}{x^2}}$ ?

- $\lim_{x\to 0} e^{\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}} = e^{-1}$ (*)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-x-(1+x)}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = \lim_{x\to 0} \frac{-2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} =$$

$$= \frac{-2}{1+1} = -1$$

- $\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{a}{x^2}} = [1^\infty] = \lim_{x\to 0} e^{\frac{a}{x^2}\ln(\cos 2x)} =$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{a}{x^2}\ln(\cos 2x)} = e^{-2a} \quad (**)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a}{x^2}\ln(\cos 2x) = \lim_{x\to 0} \frac{a\ln(\cos 2x)}{x^2} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{a\,\frac{-2\,\mathrm{sen}(2x)}{\cos(2x)}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2a\,\mathrm{tg}(2x)}{2x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{4a}{\cos^2(2x)}}{2} = -2a$$

- De (*) y (*) : $e^{-1} = e^{-2a} \Rightarrow -1 = -2a \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$

2B) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

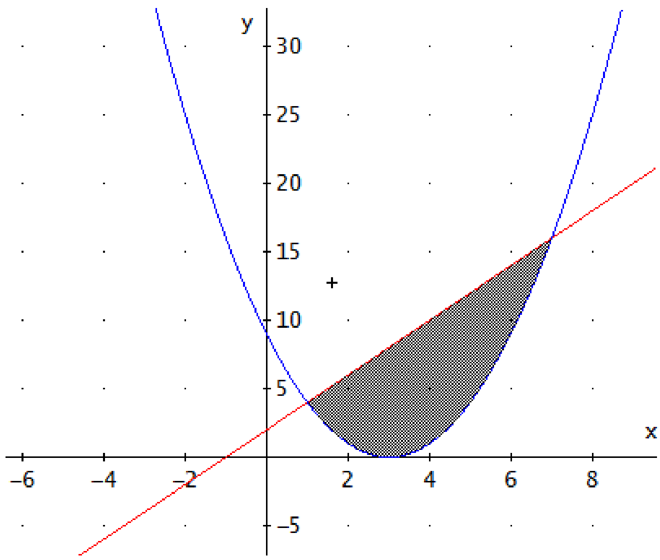
Vértice: $\left.\begin{array}{l} x_v = \frac{6}{2} = 3 \\ y_v = 0 \end{array}\right\} V(3,0)$

Tabla

| x | 1 | 5 |
|---|---|---|
| y | 4 | 4 |

$g(x) = 2x + 2$

| x | y |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 2 | 6 |



## PROPUESTA B

---

**1B.** Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que se verifique la igualdad

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}} = \lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{a}{x^2}} \qquad \textbf{(2,5 puntos)}$$

**2B.** a) Esboza la región encerrada entre la parábola $f(x) = x^2 - 6x + 9$ y la recta $g(x) = 2x + 2$. **(0,5 puntos)**

b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

**3B.** Un grupo de amigos se reúne cada sábado en la misma cafetería. Hace dos sábados tomaron 4 cafés, 6 refrescos y 2 infusiones, siendo el precio total 15,40 euros. El sábado pasado tomaron 5 cafés, 4 refrescos y 3 infusiones, siendo el precio total 14,40 euros. Hoy sábado han pedido 3 cafés, 8 refrescos y 1 infusión. Cuando piden la cuenta, el camarero les dice que el precio total es 18 euros.

Se pide:

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales con los datos del enunciado anterior. **(1 punto)**

b) Asumiendo que los dos sábados anteriores los precios totales estaban bien calculados y que los precios de los cafés, refrescos e infusiones no han cambiado, razona que hay un error en la cuenta de este sábado. **(1,5 puntos)**

**4B.** Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x}{2} = y + 1 = \frac{z-1}{3}, \qquad s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Estudia su posición relativa. **(1,25 puntos)**

b) Calcula la distancia entre $r$ y $s$. **(1,25 puntos)**

---

b) Puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$

$$f(x)=g(x) \Rightarrow x^2-6x+9=2x+2 \Rightarrow x^2-8x+7=0 \Rightarrow x=\begin{cases}7\\1\end{cases}$$

Área

$$\boxed{A} = \int_1^7 [(2x+2)-(x^2-6x+9)]dx = \int_1^7 (-x^2+8x-7)\,dx =$$

$$= \frac{-x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}-7x\Big|_1^7 = \left(\frac{-7^3}{3}+\frac{8\cdot 7^2}{2}-7\cdot 7\right)-\left(\frac{-1^3}{3}+\frac{8\cdot 1^2}{2}-7\cdot 1\right)=$$

$$= \boxed{36\ u^2}$$

3B) a) $x=$ precio de un café

$y=$ " de un refresco

$z=$ " de una infusión

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} 4x+6y+2z=15{,}40 \\ 5x+4y+3z=14{,}40 \\ 3x+8y+z=18 \end{array}\right.}$$

b) Para razonar que hay un error, vamos a demostrar que el sistema es incompatible

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 2 & 15{,}40 \\ 5 & 4 & 3 & 14{,}40 \\ 3 & 8 & 1 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1:4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 7{,}70 \\ 5 & 4 & 3 & 14{,}40 \\ 3 & 8 & 1 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[-3F_1+F_3]{-5F_1+F_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 7{,}70 \\ 0 & -7/2 & 1/2 & -24{,}1 \\ 0 & 7/2 & -1/2 & -5{,}1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 7{,}70 \\ 0 & -7/2 & 1/2 & -24{,}1 \\ 0 & 0 & 0 & -29{,}2 \end{array}\right) \Rightarrow 0z=-29{,}2$$

$\Rightarrow$ Sistema incompatible.

4B) $r \equiv \frac{x}{2}=y+1=\frac{z-1}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

a) Posición relativa

$$r \equiv \frac{x}{2}=y+1=\frac{z-1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}=y+1 \Rightarrow x-2y-2=0 \\ \frac{x}{2}=\frac{z-1}{3} \Rightarrow 3x-2z+2=0 \end{cases}$$

$$s \equiv x=y=\frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x=y \Rightarrow x-y=0 \\ x=\frac{z-1}{-1} \Rightarrow -x-z+1=0 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M = 3$$

$$|\tilde{M}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 10 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } \tilde{M} = 4$$

Por tanto, r y s se cruzan.

b) $$d(r,s) = \left| \frac{\det(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_sP_r})}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} \right|$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2,1,3) \\ \vec{u}_s = (1,1,-1) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \overrightarrow{P_sP_r} = (0,-1,1) - (0,0,1) = (0,-1,0) \\ P_r(0,-1,1) \\ P_s(0,0,1) \end{array}$$

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k} = (-4, 5, 1)$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{42}$$

$$\det(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_sP_r}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

Por tanto:

$$\boxed{d(r,s) = \left| \frac{-5}{\sqrt{42}} \right| = \frac{5\sqrt{42}}{42} \, u}$$