



Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Dada la función $f(x) = \frac{4x^2 + 3x + 4}{2x}$, se pide:

- a) Calcula las asíntotas verticales y oblicuas de $f(x)$. (1,25 puntos)
- b) Coordenadas de los máximos y mínimos relativos de $f(x)$. (1,25 puntos)

2A. Calcula las siguientes integrales:

- a) $\int (\cos(2x) + \sen x \cos x) dx$. (1,25 puntos)
- b) $\int \frac{x^3 - 1}{x + 2} dx$. (1,25 puntos)

3A. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) Resuelve el sistema matricial $\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ X + Y = B \end{cases}$. (1,25 puntos)
- b) Encuentra una fórmula general para B^n , donde $n \in \mathbb{N}$. (Indicación: Calcula las primeras potencias de la matriz B) (1,25 puntos)

4A. Consideremos el plano $\pi \equiv x - z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

- a) Determina el parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la recta r y el plano π sean paralelos. (1,25 puntos)
- b) Para el valor de a determinado, obtén las ecuaciones paramétricas de una recta r' paralela al plano π y que corte perpendicularmente a r en el punto $P(1, 1, 0)$. (1,25 puntos)

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE) UNIVERSIDAD DE CASTILLA LA MANCHA
JUNIO – 2011 (GENERAL)

MATEMÁTICAS II

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro preguntas que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones, el tribunal podrá anular su examen.

En el desarrollo de cada respuesta, detalle y explique los procedimientos empleados en la misma. Se califica todo.

PROPUESTA A

Ejercicio 1º) Dada la función $f(x) = \frac{4x^2 + 3x + 4}{2x}$, se pide:

a) Calcula las asíntotas verticales y oblicuas de $f(x)$.

b) Coordenadas de los máximos y mínimos relativos de $f(x)$.

Solución

a)

Las asíntotas son las siguientes:

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$2x = 0$; $x = 0$ (El eje de ordenadas es asíntota vertical)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x^2 + 3x + 4}{2x} = \frac{4}{0^-} = -\infty \Rightarrow \downarrow.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^2 + 3x + 4}{2x} = \frac{4}{0^+} = +\infty \Rightarrow \uparrow.$$

Oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^2 + 3x + 4}{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 4}{2x^2} = 2 = m.$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 3x + 4}{2x} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 4 - 4x^2}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 4}{2x} = \frac{3}{2} = n.$$

$$\underline{\underline{\text{Asíntota oblicua: } y = 2x + \frac{3}{2}}}$$

b)

Una función tiene un extremo relativo cuando se anula su primera derivada.

$$f'(x) = \frac{(8x+3) \cdot 2x - (4x^2+3x+4) \cdot 2}{(2x)^2} = \frac{16x^2+6x-8x^2-6x-8}{4x^2} = \frac{8x^2-8}{4x^2} = \frac{8(x^2-1)}{4x^2} = f'(x)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{8(x^2-1)}{4x^2}=0 \;; \; 8(x^2-1)=0 \;; \; x^2-1=0 \Rightarrow \underline{x_1=-1} \;; \; \underline{x_2=1}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos se recurre a la segunda derivada; si es negativa para los valores que anulan la primera derivada, se trata de un máximo relativo y si es positiva, de un mínimo relativo.

$$f''(x) = \frac{16x \cdot 4x^2 - 8(x^2-1) \cdot 8x}{(4x^2)^2} = \frac{64x^3 - 64x^3 + 64x}{4x^4} = \frac{64x}{4x^4} = \frac{16}{x^3} = f''(x).$$

$$f''(-1) = \frac{16}{(-1)^3} = \frac{16}{-1} = -16 < 0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo relativo para } x = -1}.$$

$$f(-1) = \frac{4 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 4}{2 \cdot (-1)} = \frac{4-3+4}{-2} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo: } A\left(-1, -\frac{5}{2}\right)}}.$$

$$f''(1) = \frac{16}{1^3} = \frac{16}{1} = 16 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo relativo para } x = 1}.$$

$$f(1) = \frac{4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 4}{2 \cdot 1} = \frac{4+3+4}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo: } B\left(1, \frac{11}{2}\right)}}.$$

Ejercicio 3º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Resuelve la ecuación matricial: $\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ X + Y = B \end{cases}$.

b) Encuentra una fórmula general para B^n , donde $n \in \mathbb{N}$. (Indicación: calcula las primeras potencias de la matriz B).

Solución

a)

$$\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ X + Y = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2X + 3Y = A \\ -2X - 2Y = -2B \end{cases} \Rightarrow \underline{Y = A - 2B} \;; \; X = B - Y = B - A + 2B = \underline{-A + 3B = X}$$

.

$$X = -A + 3B = -\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}}} = X.$$

$$Y = A - 2B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}}} = Y.$$

b)

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 \\ 0+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{I = B^2}.$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = I \cdot B = \underline{B = B^3}.$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = B \cdot B = \underline{I = B^4}.$$

.....

$$\underline{\underline{B^n = I \text{ si } n \text{ es par} \;; \; B^n = B \text{ si } n \text{ es impar}}}$$

Ejercicio 4º) Consideramos el plano $\pi \equiv x - z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x=1+at \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

- a) Determina el parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la recta r y el plano π sean paralelos.
 b) Para el valor de a determinado, obtén las ecuaciones paramétricas de la recta r' paralela al plano π y que corte perpendicularmente a r en el punto $P(1, 1, 0)$.

Solución

a)

Para que la recta r y el plano π sean paralelos es condición suficiente que el vector normal del plano sea perpendicular al vector director de la recta.

El vector normal de π es $\vec{n} = (1, 0, -1)$ y el vector director de r es $\vec{v} = (a, -1, 2)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (1, 0, -1) \cdot (a, -1, 2) = 0 \;; \; a - 0 - 2 = 0 \;; \; a - 2 = 0 \Rightarrow \underline{a = 2}.$$

La recta r y el plano π son paralelos cuando $a = 2$.

b)

Un vector director de r es $\vec{v} = (2, -1, 2)$ y el haz de planos perpendiculares a la

$$\text{recta } r \equiv \begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases} \text{ tiene por expresión general } \alpha \equiv 2x - y + 2z + D = 0.$$

De los infinitos planos del haz anterior, el plano β que contiene al punto $P(1, 1, 0)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{aligned} \alpha \equiv 2x - y + 2z + D = 0 \\ P(1, 1, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 - 1 + 2 \cdot 0 + D = 0 \;; \; 2 - 1 + D = 0 \;; \; 1 + D = 0 \;; \; \underline{D = -1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\beta \equiv 2x - y + 2z - 1 = 0}.$$

El haz de planos paralelos a $\pi \equiv x - z = 0$ tiene por expresión $\gamma \equiv x - z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz anterior, el plano μ que contiene al punto $P(1, 1, 0)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{aligned} \gamma \equiv x - z + D = 0 \\ P(1, 1, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 - 0 + D = 0 \;; \; 1 + D = 0 \;; \; \underline{D = -1} \Rightarrow \underline{\mu \equiv x - z - 1 = 0}.$$

La recta r' es la intersección de los planos β y μ : $r' \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z - 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}.$

Para expresar r' por unas ecuaciones paramétricas hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} r' \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z - 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \underline{z = \lambda} \;; \; x = 1 + z = \underline{1 + \lambda} = x \;; \; y = 2x + 2z - 1 = 2 + 2\lambda + 2\lambda - 1 = \\ &= \underline{1 + 4\lambda} = y \Rightarrow \underline{\underline{r' \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}} \end{aligned}$$

PROPUESTA B

1B. En cierto experimento la cantidad de agua en estado líquido $C(t)$, medida en litros, está determinada en función del tiempo t , medido en horas, por la expresión:

$$C(t) = \frac{2}{3} + 10t + \frac{10}{t} + \frac{240}{t^3}, \quad t \in [1, 10]$$

Halla cuál es la cantidad mínima de agua en estado líquido y en qué instante de tiempo se obtiene, en el intervalo comprendido entre $t = 1$ hora y $t = 10$ horas. (2,5 puntos)

2B. a) Representa gráficamente la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{1}{x^2}$, y la recta $x = 2$. (0,5 puntos)

b) Calcula el área de dicha región. (2 puntos)

3B. a) Clasifica, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda x + 2y - z = \lambda \\ 3x - y - z = 1 \\ 5x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

(1,5 puntos)

b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 2$. (1 punto)

4B. Dados los puntos de coordenadas $A(0, 1, 0)$, $B(1, 2, 3)$, $C(0, 2, 1)$ y $D(k, 1, 1)$, donde $k \in \mathbb{R}$:

a) Determina el área del triángulo de vértices A, B y C . (1 punto)

b) ¿Para qué valores del parámetro k el tetraedro cuyos vértices son A, B, C y D tiene un volumen de $5 u^3$? (1,5 puntos)

PROPUESTA B

Ejercicio 1º) En cierto experimento la cantidad de agua en estado líquido $C(t)$, medida en litros, está determinada en función del tiempo t , medido en horas, por la siguiente expresión: $C(t) = \frac{2}{3} + 10t + \frac{10}{t} + \frac{240}{t^3}$, $t \in [1, 10]$. Halla cuál es la cantidad mínima de agua en estado líquido y en qué instante de tiempo se obtiene, en el intervalo comprendido entre $t = 1$ hora y $t = 10$ horas.

Solución

La cantidad mínima será el mínimo de la función $C(t) = \frac{2}{3} + 10t + \frac{10}{t} + \frac{240}{t^3}$:

$$C'(t) = 10 + \frac{0-10}{t^2} + \frac{0-240 \cdot 3t^2}{t^6} = 10 - \frac{10}{t^2} - \frac{720}{t^4} = \frac{10t^4 - 10t^2 - 720}{t^4} = 10 \cdot \frac{t^4 - t^2 - 72}{t^4}.$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow 10 \cdot \frac{t^4 - t^2 - 72}{t^4} = 0 \quad ; \quad t^4 - t^2 - 72 = 0.$$

Resolviendo la ecuación bicuadrada:

$$t^4 - t^2 - 72 = 0 \Rightarrow t^2 = y \Rightarrow y^2 - y - 72 = 0 \quad ; \quad y = \frac{1 \pm \sqrt{1+288}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{1 \pm 17}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{y_1 = 9} \quad ; \quad \underline{y_2 = -8}.$$

$$\text{Deshaciendo el cambio de variable: } \begin{cases} t^2 = 9 \Rightarrow \underline{t_1 = 3} \quad ; \quad \underline{t_2 = -3} \\ t^2 = -8 \Rightarrow t \notin R \end{cases}.$$

La solución del problema es $\underline{t = 3}$; la solución $t = -3$ carece de sentido lógico.

La cantidad de agua en estado líquido a las 3 horas es la siguiente:

$$C(3) = \frac{2}{3} + 10 \cdot 3 + \frac{10}{3} + \frac{240}{3^3} = \frac{2}{3} + 30 + \frac{10}{3} + \frac{80}{9} = \frac{6 + 270 + 30 + 80}{9} = \frac{386}{9} \cong \underline{42'89 \text{ litros}}.$$

La mínima cantidad en estado líquido son 42'89 litros a las tres horas.

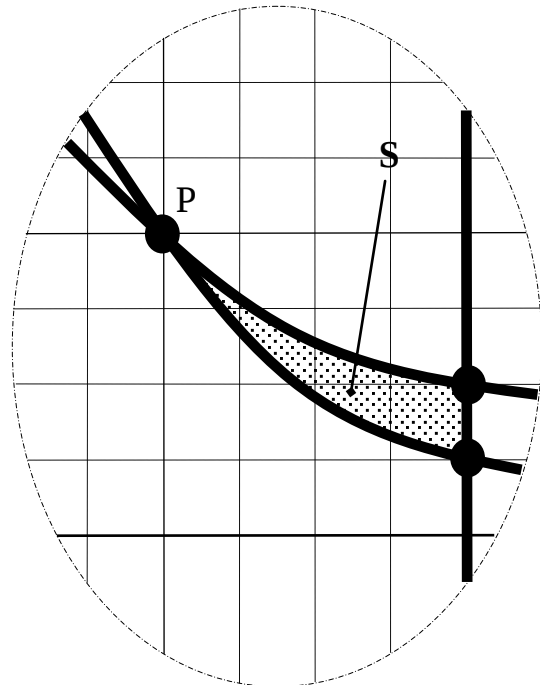
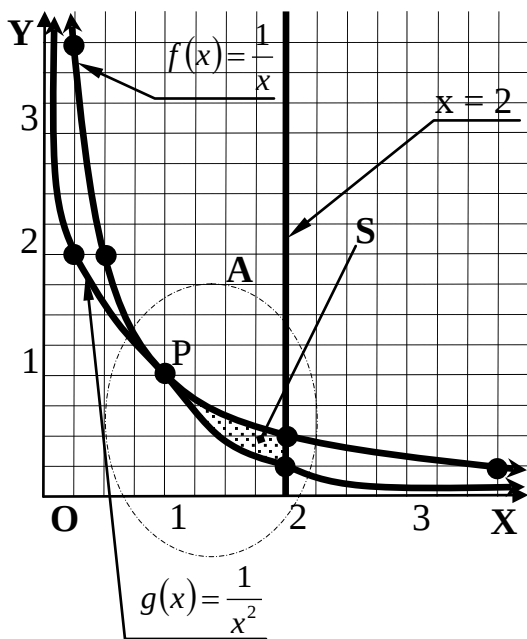
Ejercicio 2º) a) Representa gráficamente la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=\frac{1}{x^2}$, y la recta $x=2$.

b) Calcula el área de dicha región.

Solución

a)

El punto de corte de las funciones se obtiene de la igualación de sus expresiones:



Detalle A

$$f(x)=g(x) \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{x^2} ;; x^2=x ;; x^2-x=0 ;; x(x-1)=0 \Rightarrow \underline{x_1=0} ;; \underline{x_2=1}.$$

Nótese que la solución $x=0$ tiene como valor de las funciones infinito, por lo cual el único punto real de corte es P(1, 1).

b)

Todas las ordenadas de la función $f(x)$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función $g(x)$ por lo que la superficie pedida es:

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot dx = \left[Lx - \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^2 = \left[Lx + \frac{1}{x} \right]_1^2 = \left(L2 + \frac{1}{2} \right) - \left(L1 + \frac{1}{1} \right) = \\ &= L2 + \frac{1}{2} - L1 - 1 = \underline{\underline{\left(L2 - \frac{1}{2} \right) u^2 = S.}} \end{aligned}$$

Ejercicio 3º) a) Clasifica, en función del parámetro $\lambda \in R$, el sistema
$$\begin{cases} \lambda x + 2y - z = \lambda \\ 3x - y - z = 1 \\ 5x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 2$.

Solución

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & -1 & \lambda \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\lambda - 3 - 10 - 5 + 12 + \lambda = 3\lambda - 6 = 0 \quad ; \quad \lambda - 2 = 0 \quad ; \quad \underline{\lambda = 2}.$$

Para $\lambda \neq 2 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Deter min ado}$

$$\text{Para } \lambda = 2 \text{ es } M' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 + F_2 = F_3\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2}.$$

Para $\lambda = 2 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Indeter min ado}$

b)

Para $\lambda = 2$ el sistema es
$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 2 \\ 3x - y - z = 1 \\ 5x + y - 2z = 3 \end{cases}$$
, que es compatible indeterminado.

Para resolver el sistema despreciamos una de las ecuaciones (tercera) y parametrizamos una de las incógnitas ($z = \lambda$):

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 2 \\ 3x - y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 2 + \lambda \\ 3x - y = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 2 + \lambda \\ 6x - 2y = 2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow 8x = 4 + 3\lambda \quad ; \quad$$

$$\underline{x = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\lambda} \quad ; \quad y = 3x - z - 1 = \frac{3}{2} + \frac{9}{8}\lambda - \lambda - 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\lambda}} = y.$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\lambda \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\lambda, \quad \forall \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ejercicio 4º) Dados los puntos de coordenadas A(0, 1, 0), B(1, 2, 3), C(0, 2, 1) y D(k, 1, 1), donde $\lambda \in \mathbb{R}$:

a) Determina el área del triángulo de vértices A, B y C.

b) ¿Para qué valores del parámetro k el tetraedro cuyos vértices son A, B, C y D tienen volumen de $5 u^3$?

Solución

a)

Los puntos A(0, 1, 0), B(1, 2, 3) y C(0, 2, 1) determinan los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, que son los siguientes:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1, 2, 3) - (0, 1, 0) = (1, 1, 3).$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0, 2, 1) - (0, 1, 0) = (0, 1, 1).$$

Sabiendo que el área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo determinan:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| \vec{u} \wedge \vec{v} \right| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} |i + k - 3i - j| = \frac{1}{2} |-2i - j + k| = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{4+1+1} = \frac{1}{2} \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2} u^2 = S.$$

b)

Los puntos A(0, 1, 0) y D(k, 1, 1) determinan el vector :

$$\vec{w} = \overrightarrow{AD} = D - A = (k, 1, 1) - (0, 1, 0) = (k, 0, 1).$$

Sabiendo que el volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan, en valor absoluto, será:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \right| = 5 u^3 \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot |1+k-3k| = \frac{1}{6} \cdot |1-2k| = 5 \;; \; |1-2k| = 30 \;;$$

$$\left. \begin{array}{l} 1-2k=30 \\ -1+2k=30 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{k_1 = -\frac{29}{2}}} \;; \; \underline{\underline{k_2 = \frac{31}{2}}}.$$
