



Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Definición de función continua en un punto. (0,5 puntos)

b) Determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

sea continua en $x = 3$. (2 puntos)

2A. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{1+8x}{1+x^2} dx$. (1,25 puntos)

b) $\int (x^2 + x) \cos x dx$. (1,25 puntos)

3A. He pensado en tres números, de manera que la suma de los dos primeros es igual al tercero. Si al triple del primer número le resto el doble del segundo vuelvo a obtener el tercero. Si al doble del primero le resto la mitad del segundo también obtengo el tercero. Por último, si al doble del primero le resto el segundo y sumo uno, de nuevo vuelvo a obtener el tercer número.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que recoja la información anterior y clasifícalo. (1,5 puntos)

b) Determina, si el problema tiene solución, los tres números que he pensado. (1 punto)

4A. Consideremos las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 - at \\ y = b + t \\ z = 2t \end{cases}$, con $t \in \mathbb{R}$, y $s \equiv x - 2 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+6}{2}$.

a) Determina los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que las dos rectas se corten perpendicularmente en un punto. (1,5 puntos)

b) Calcula, para los valores de los parámetros obtenidos en el apartado anterior, las coordenadas del punto de corte. (1 punto)

Propuesta A

1A) a) Una función $y = f(x)$ es continua en $x = a \in \text{Dom}(f)$ si $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

b) Continuidad en $x=3$: ¿ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$?

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} 3x^2 = 9a (=f(3)) \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}+2)(x-3)} = \\ = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1-4}{(\sqrt{x+1}+2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{(\sqrt{x+1}+2)(x-3)} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

(también se puede calcular aplicando la regla de L'Hôpital)

$$\Rightarrow 9a = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{36}}$$

Derivabilidad en $x=3$ (para $a = \frac{1}{36}$) ¿ $\exists f'(3)$?

$$f'(3) \left\{ \begin{aligned} \left(\left(\frac{1}{36} x^2 \right)' \right) &= 2 \cdot \frac{1}{36} x = \frac{1}{18} x \rightarrow f'(3^-) = \frac{1}{18} \cdot 3 = \frac{1}{6} \\ \left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \right)' &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot (x-3) - (\sqrt{x+1}-2)}{(x-3)^2} \rightarrow f'(3^+) = \left[\frac{0}{0} \right] = \frac{-1}{64} \end{aligned} \right\}$$

↑
aplicando 2 veces
L'Hôpital

$\Rightarrow f$ no es derivable en $x=3$ para $a = \frac{1}{36}$

1B) a) $\int \frac{1+8x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + 8 \int \frac{x}{1+x^2} dx =$

$$= \arctg x + 8 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \boxed{\arctg x + 4 \ln |1+x^2| + C}$$

b) $\int (x^2+x) \cos x dx = \left[\begin{aligned} u &= x^2+x \rightarrow du = (2x+1) dx \\ dv &= \cos x dx \rightarrow v = \sin x \end{aligned} \right] =$

$$= (x^2+x) \sin x - \int (2x+1) \sin x dx = (x^2+x) \sin x - \left[-(2x+1) \cos x + 2 \sin x \right] =$$

$$= (x^2+x) \sin x + (2x+1) \cos x - 2 \sin x = \boxed{(x^2+x-2) \sin x + (2x+1) \cos x + C}$$

$$\int (2x+1) \sin x dx = \left[\begin{aligned} u &= 2x+1 \rightarrow du = 2 dx \\ dv &= \sin x dx \rightarrow v = -\cos x \end{aligned} \right] = -(2x+1) \cos x - \int (-\cos x) 2 dx =$$

$$= -(2x+1) \cos x + 2 \sin x$$

3A) Sean x, y, z los tres números por orden (primero, segundo y tercero resp.)

$$\begin{cases} x+y=z \\ 3x-2y=z \\ 2x-\frac{1}{2}y=z \\ 2x-y+1=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ 3x-2y-z=0 \\ 4x-y-2z=0 \\ 2x-y-z=-1 \end{cases} \quad \text{Sistema de ecuaciones } 4 \times 3$$

Clasificación (método de Gauss)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 3 & -2 & -1 & | & 0 \\ 4 & -1 & -2 & | & 0 \\ 2 & -1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-3F_1+F_2 \\ -4F_1+F_3 \\ -2F_1+F_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -5 & 2 & | & 0 \\ 0 & -5 & 2 & | & 0 \\ 0 & -3 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -5 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -3 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2: (-5)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -3 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_2+F_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 & | & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \\ [4] \end{matrix}$$

$\Rightarrow \text{rango } M = \text{rango } \tilde{M} = 3 = n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow \underline{\text{Sistema Compatible Determinado.}}$

b) De [4]: $-\frac{1}{5}z = -1 \Rightarrow z = 5$

Sustituimos en [2]: $y - \frac{2}{5}z = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{5} \cdot 5 = 2$

Sustituimos en [1]: $x + y - z = 0 \Rightarrow x = -y + z = -2 + 5 = 3$

Solución: $\boxed{(x, y, z) = (3, 2, 5)}$

4A) a) $\begin{cases} \vec{u}_r = (-a, 1, 2) \\ \vec{u}_s = (1, -1, 2) \end{cases} \Rightarrow r \perp s \Leftrightarrow \vec{u}_r \perp \vec{u}_s \Leftrightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (-a, 1, 2) \cdot (1, -1, 2) = 0 \Leftrightarrow -a - 1 + 4 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \boxed{a = 3}$

Para calcular b imponemos que las rectas se cortan en un punto:

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = b + t \\ z = 2t \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -6 + 2\lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 3t = 2 + \lambda \\ b + t = 2 - \lambda \\ 2t = -6 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + 3t = -1 \\ \lambda + t + b = 2 \\ 2\lambda - 2t = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + 3t = -1 \\ -\lambda + t = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4t = -4 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ y por tanto } \boxed{b = 1}$$

b) El punto de corte es $P \begin{cases} x = 1 - 3 \cdot (-1) \\ y = 1 - 1 \\ z = 2 \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(4, 0, -2)}$

PROPUESTA B

1B. Calcula los siguientes límites

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^{\frac{1}{x-1}}$ (1,25 puntos)

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{2x^3}$ (1,25 puntos)

2B. a) Representa gráficamente la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$, el eje de abscisas y la recta $x = e$. (0,5 puntos)

b) Calcula el área de dicha región. (2 puntos)

3B. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$. Demuestra que el rango de la matriz $A \cdot A^t$ es siempre igual al rango de la matriz $A^t \cdot A$, cualquiera que sea el valor de k . (Recuerda que A^t representa la matriz transpuesta de la matriz A) (2,5 puntos)

4B. a) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y - z = -1 \end{cases}$ y el punto $P(0, 1, 0)$, obtén las ecuaciones paramétricas de una recta r' que pase por el punto P y corte perpendicularmente a r . (1,25 puntos)

b) Encuentra las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la recta r . (1,25 puntos)

Propuesta B

$$1A) a) \lim_{x \rightarrow 1+} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^{\frac{1}{x-1}} = [1^\infty] = e^{\frac{1}{3}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x-1} \left(\frac{2x+1}{x+2} - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x-1} \left(\frac{2x+1-x-2}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x+2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

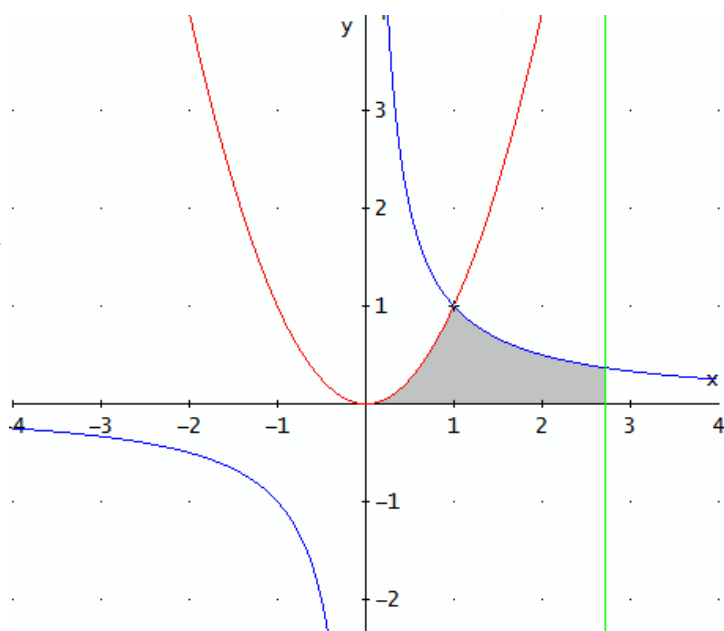
También se puede calcular aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^{\frac{1}{x-1}} = [1^\infty] = e^{\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x-1} \ln \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)} = e^{\frac{1}{3}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x-1} \ln \left(\frac{2x+1}{x+2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\ln \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)}{x-1} = \left[\frac{0}{0} \right] \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\frac{2(x+2) - (2x+1)}{(x+2)^2}}{1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2(x+2) - (2x+1)}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{3}{(x+2)^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \right) &= \left[\frac{0}{0} \right] \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - (\cos x - x \sin x)}{3x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{3x^2} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \left[\frac{0}{0} \right] \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

1B) a)



$$f(x) = x^2$$

Vértice: $V(0,0)$

$$\text{Tabla: } \begin{array}{c|cccc} x & 1 & -1 & -2 & 2 \\ \hline y & 1 & 1 & 4 & 4 \end{array}$$

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{Tabla: } \begin{array}{c|ccccc} x & 1 & 10 & 0,1 & -10 & -0,1 \\ \hline y & 1 & 0,1 & 10 & -0,1 & -10 \end{array}$$

Punto de corte de $f(x)$ y $g(x)$:

$$x^2 = \frac{1}{x} \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$$

Área

$$A = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^e \frac{1}{x} dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 + \left. \ln|x| \right|_1^e = \left(\frac{1}{3} - 0 \right) + (\ln e - \ln 1) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} u^2$$

$$3B) AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k^2 & k \\ k & k^2+1 \end{pmatrix}$$

$$|AA^t| = (1+k^2)(k^2+1) - k^2 = k^4 + k^2 + 1$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k^2 & k \\ k & k & k^2+1 \end{pmatrix}$$

$$|A^t A| = k^2(k^2+1) - k^4 - k^2 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} k^4 + k^2 + 1 &= 0 \\ t &= k^2 \end{aligned} \right\}$$

$$t^2 + t + 1 = 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$$\text{Si } \boxed{k=0} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \text{rango } AA^t &= 2 \\ \text{rango } A^t A &= 2 \end{aligned} \right.$$

$$\text{Si } \boxed{k \neq 0} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \text{rango } AA^t &= 2 \\ \text{rango } A^t A &= 2 \end{aligned} \right.$$

Por tanto, $\text{rango}(AA^t) = \text{rango}(A^t A)$
 $\forall k \in \mathbb{R}$

4B) a) El vector $\overrightarrow{PR}$ es perpendicular a $\overrightarrow{u_r}$, donde $R \in r$. Por tanto, la recta que nos piden está determinada por P y $\overrightarrow{PR}$.

$$z = 1 + 2y \Rightarrow x + y + 1 + 2y = 0 \Rightarrow x = -1 - 3y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R(-1 - 3\lambda, \lambda, 1 + 2\lambda)$$

$$\overrightarrow{PR} = (-1 - 3\lambda, \lambda - 1, 1 + 2\lambda) \left\{ \begin{aligned} \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{u_r} &= 0 \Leftrightarrow 4 + 14\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{7} \\ \overrightarrow{PR} &\perp \overrightarrow{u_r} \end{aligned} \right.$$

$$\overrightarrow{PR} = \left(-1 - 3 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right), -\frac{2}{7} - 1, 1 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \right) = \left(+\frac{1}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{3}{7} \right)$$

$$\boxed{r' \equiv \begin{cases} x = +\frac{1}{7}\mu \\ y = 1 - \frac{9}{7}\mu \\ z = \frac{3}{7}\mu \end{cases}}$$

$$b) \vec{u}_r = (-3, 1, 2)$$

Calculamos un plano π t.q. $\begin{cases} P \in \pi \\ \pi \perp r \end{cases}$

$$\pi \equiv (x+0, y-1, z+0) \cdot (-3, 1, 2) = 0$$

$$-3x + y + 2z - 1 = 0 \equiv \pi$$

Obtenemos el punto de intersección de r y π :

$$r \cap \pi = \{M\} \quad \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2y-z=-1 \\ -3x+y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = \left(-\frac{1}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{3}{7}\right) \equiv M$$

Hallamos por último P' , simétrico de P respecto de r :

$$\left(-\frac{1}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{3}{7}\right) = \left(\frac{0+P'_1}{2}, \frac{1+P'_2}{2}, \frac{0+P'_3}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{7} = \frac{P'_1}{2} \Rightarrow P'_1 = -\frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} = \frac{1+P'_2}{2} \Rightarrow P'_2 = \frac{-11}{7} \\ \frac{3}{7} = \frac{P'_3}{2} \Rightarrow P'_3 = \frac{6}{7} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{P' \left(-\frac{2}{7}, \frac{-11}{7}, \frac{6}{7}\right)}$$