

**Materia: MATEMÁTICAS II**

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, de forma que el área del triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(0, a)$ y $C(\frac{a}{a-1}, 0)$ sea mínima. (2,5 puntos)

2A. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int x \ln(x) dx$. (Indicación: $\ln(x)$ representa el logaritmo neperiano de x). (1,25 puntos)

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$. (1,25 puntos)

3A. a) Despeja X de la ecuación matricial $X \cdot B - I = X \cdot A + A$, donde X, B, A e I son matrices de tipo 3×3 . (1,25 puntos)

b) Calcula la matriz X de tamaño 3×3 , solución de la ecuación, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ (1,25 puntos)}$$

4A. a) Analiza, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv 2x - y + z = 0$, $\pi_2 \equiv y + z = m$ y $\pi_3 \equiv mx + y - z = 8$. (1,25 puntos)

b) Razona que, independientemente del valor del parámetro m , los planos π_2 y π_3 son perpendiculares. (1,25 puntos)

(sigue a la vuelta)

Propuesta A

$$1A) A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{AB} &= (0, a) - (0, 0) = (0, a) \\ \vec{AC} &= \left(\frac{a}{a-1}, 0\right) - (0, 0) = \left(\frac{a}{a-1}, 0\right) \end{aligned} \right\} \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a & 0 \\ \frac{a}{a-1} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{a^2}{a-1} \vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{\left(-\frac{a^2}{a-1}\right)^2} = \frac{a^2}{a-1}$$

$$S = A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{a-1} = S(a)$$

$$S'(a) = \frac{1}{2} \frac{2a(a-1) - a^2}{(a-1)^2} = \frac{1}{2} \frac{a^2 - 2a}{(a-1)^2}$$

$$S''(a) = \frac{1}{2} \frac{(2a-2)(a-1)^2 - 2(a^2-2a)(a-1)}{(a-1)^4}$$

$$S'(a) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = \begin{cases} 0 & \text{No es solución} \\ 2 \end{cases}$$

$$S''(2) = 1 > 0 \Rightarrow \boxed{a=2} \text{ en un mínimo relativo}$$

$$1B) a) \int x \ln x \, dx = \left[\begin{aligned} u &= \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv &= x dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{aligned} \right] = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$b) \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \, dx = \left[\begin{aligned} t &= \sqrt{x} \rightarrow t^2 = x \\ dx &= 2t \, dt \end{aligned} \right] = \int \frac{t}{1+t} 2t \, dt = 2 \int \frac{t^2}{1+t} \, dt =$$

$$= 2 \left(\int (t-1) \, dt + \int \frac{1}{t+1} \, dt \right) = 2 \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| \right) =$$

$$= 2 \left(\frac{x}{2} - \sqrt{x} + \ln|\sqrt{x}+1| \right) + C$$

$$\frac{\begin{array}{r} t^2 \\ -t^2 - t \\ \hline -t \\ \hline t+1 \\ \hline 1 \end{array}}{\frac{t^2}{t+1} = t-1 + \frac{1}{t+1}}$$

$$3A) a) XB - XA = A + I \Rightarrow X(B - A) = A + I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(B - A)(B - A)^{-1} = (A + I)(B - A)^{-1} \Rightarrow \boxed{X = (A + I)(B - A)^{-1}}$$

b) Cálculo de B - A

$$B - A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $(B - A)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow (B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de A + I

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X

$$\boxed{X = (A + I)(B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$4A) a) \begin{cases} \pi_1 \equiv 2x - y + z = 0 \\ \pi_2 \equiv y + z = m \\ \pi_3 \equiv mx + y - z = 8 \end{cases} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 \end{pmatrix}, \tilde{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & m \\ m & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$|M| = -2 - m - 2 = -m - 4 = 0 \Rightarrow m = -4$$

Si $\boxed{m \neq -4} \Rightarrow \text{rango } M = 3 = \text{rango } \tilde{M} = n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{sistema compatible determinado} \Rightarrow \underline{\text{los tres planos se cortan en un punto}}$

$$\text{Si } \boxed{m = -4} \quad \left(\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & -1 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{2F_1 + F_3} \left(\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 + F_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = 4 \Rightarrow z = \frac{4}{0} \left. \vphantom{\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}} \right\} \text{Sistema incompatible}$$

π_1 y π_2 no son paralelos ya que $\frac{2}{0} \neq \frac{-1}{1}$

π_1 y π_3 " " " ya que $\frac{2}{4} \neq \frac{-1}{1}$

π_2 y π_3 " " " ya que $\frac{0}{4} \neq \frac{1}{1}$

Por tanto, los tres planos se cortan dos a dos según tres rectas.

...

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$, se pide:

- a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1,25 puntos)
- b) Asíntotas verticales y oblicuas. (1,25 puntos)

2B. a) Representa gráficamente la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 2x - 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x - 2$. (0,5 puntos)

- b) Calcula el área de dicha región. (2 puntos)

3B. a) Enuncia el teorema de Rouché-Fröbenius. (0,5 puntos)

b) Considera el sistema $A \cdot X = B$, donde A es una matriz 3×4 , $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ y B es una matriz con una sola columna. ¿De qué dimensiones es la matriz B ? (0,50 puntos)

- c) ¿Puede el sistema ser compatible determinado? (0,75 puntos)

d) Si el sistema es incompatible y el rango de la matriz A es dos, ¿cuál es el rango de la matriz ampliada $(A|B)$? (0,75 puntos)

4B. Dados los puntos $P(1, 1, 2)$ y $Q(1, 1, 0)$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$, se pide:

- a) Ecuación general del plano π que contiene al punto P y a la recta r . (1,25 punto)
 - b) Halla la distancia desde el punto medio de los puntos P y Q al plano π calculado en el apartado anterior. (1,25 puntos)
-

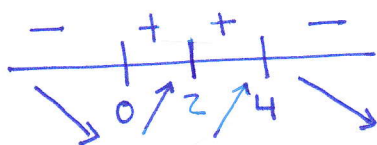
Propuesta B

1A) $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$ (Cuidado que el dominio es $\mathbb{R} - \{2\}$)

$$a) f'(x) = \frac{2x(2-x) - x^2(-1)}{(2-x)^2} = \frac{4x - 2x^2 + x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x - x^2}{(2-x)^2}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{4x - x^2}{(2-x)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x - x^2 \\ (2-x)^2 > 0 \end{cases} \text{ Siempre } (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$4x - x^2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$



f es $\begin{cases} \text{creciente en } (0, 4) - \{2\} \\ \text{decreciente en } (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \end{cases}$

b) Asíntotas verticales: ¿ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{2-x} = +\infty \Rightarrow \boxed{x=2 \text{ es una asíntota vertical}}$$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{2-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{2x - x^2} = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - m_1 x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{2-x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - x^2}{2-x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{2-x} = -2$$

La recta $\boxed{y = -x - 2}$ es una asíntota oblicua

!!OJO!! El haber puesto $\pm\infty$ en los límites ha sido después de asegurarme de que los límites no dependían de que fuese $+\infty$ o $-\infty$. Si no estamos seguros, primero hay que hacerlo con $+\infty$ y luego con $-\infty$, porque hay funciones que tienen 2 asíntotas oblicuas.

1B) a) $f(x) = x^2 - 2x - 2$

$$\text{Vértice: } x_v = \frac{2}{2} = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ y_v = 1^2 - 2 - 2 = -3 \end{array} \right\} V(1, -3)$$

$$\text{Puntos de corte con OX: } x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{2 + \sqrt{12}}{2} \simeq 2,7 \\ \frac{2 - \sqrt{12}}{2} \simeq -0,7 \end{cases}$$

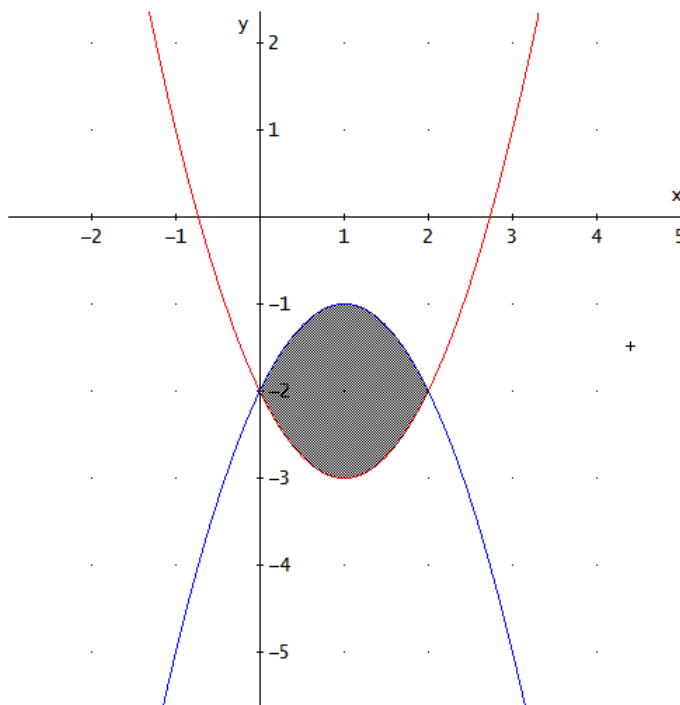
$$g(x) = -x^2 + 2x - 2$$

$$\text{Vértice: } \left. \begin{aligned} x_v &= \frac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1 \\ y_v &= -1^2 + 2 - 2 = -1 \end{aligned} \right\} V(1, -1)$$

No corta al eje OX

Tabla

x	0	2
y	-2	-2



b) Puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = -x^2 + 2x - 2 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x-2) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$$

A'eq

$$\boxed{A = \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^2 ((-x^2 + 2x - 2) - (x^2 - 2x - 2)) dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx =$$

$$= -\frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} \Big|_0^2 = -\frac{2 \cdot 8}{3} + \frac{4 \cdot 4}{2} = \frac{8}{3} u^2 \boxed{}$$

3A) a) Teorema de Rouché-Tröbenius

Un sistema de ecuaciones lineales $AX=B$ es compatible si, y solo si, el rango de la matriz de los coeficientes, A , es igual al rango de la matriz ampliada, $(A|B)$.

b) $A_{3 \times 4} X_{4 \times 1} = B$ La dimensión de B es 3×1

c) No, ya que solo hay 3 ecuaciones y 4 incógnitas.

d) En principio tenemos dos posibilidades: 1 y 3

Sin embargo, como el rango de la matriz ampliada nunca puede ser menor que el rango de la matriz de coeficientes, el rango de $(A|B)$ es tres.

$$4A) a) \pi \text{ t. g. } \begin{cases} P \in \pi \\ r \subset \pi \end{cases}$$

π está determinado por $\begin{cases} P(1,1,2) \\ \vec{u}_r = \text{vector director de } r \\ \vec{PR} \text{ donde } R \in r \text{ (tomaremos } R(1,0,0)) \end{cases}$

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{k} - \vec{j} = (2, -1, 1)$$

$$\vec{PR} = (1, 0, 0) - (1, 1, 2) = (0, -1, -2)$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-1 & -1 & -1 \\ z-2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \boxed{3x + 4y - 2z - 3 = 0 \equiv \pi}$$

b) Llamamos M al punto medio de P y Q.

$$\left. \begin{aligned} x_M &= \frac{1+1}{2} = 1 \\ y_M &= \frac{1+1}{2} = 1 \\ z_M &= \frac{2+0}{2} = 1 \end{aligned} \right\} M(1, 1, 1)$$

$$\boxed{d(M, \pi) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29} u}$$