Junio 2010

UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. G. S. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad y lo más detalladamente posible. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el teorema de Bolzano. (0,5 puntos)

b) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ en algún intervalo? (1 punto)

c) Demuestra que la función $f(x)$ anterior y $g(x) = 2x - 1$ se cortan al menos en un punto. (1 punto)

2A. a) Representa gráficamente las parábolas $f(x) = x^2 - 3x - 1$ y $g(x) = -x^2 + x + 5$. (0,5 puntos)

b) Calcula el área del recinto limitado por ambas gráficas. (2 puntos)

3A. a) Clasifica en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$ el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} kx & + & y & + & z & = & k \\ x & + & ky & + & z & = & k \\ x & + & y & + & kz & = & k \end{array}\right.$$

(1,5 puntos)

b) Resuélvelo, si es posible, para $k = 1$. (1 punto)

4A. a) Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\lambda \\ y & = & 0 \\ z & = & 1+\lambda \end{array}\right.$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y el plano de ecuación general $\pi \equiv 2x - y + 3z = 6$. (1,5 puntos)

b) Encuentra la ecuación general de un plano π' perpendicular a π que contenga a r. (1 punto)

(sigue a la vuelta)

Junio de 2010

Propuesta A

1A a) Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y en los extremos del intervalo toma valores de signo contrario, entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Se tiene que f es continua en $\mathbb{R}$, ya que $1+x^2=0$ no tiene soluciones reales, y por tanto, también es continua en cualquier intervalo cerrado $[a,b]$.

Sin embargo, como $f(x)>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\nexists [a,b]$ tal que signo $f(a) \neq$ signo $f(b)$, y como consecuencia, no se cumple el teorema de Bolzano.

c) Consideramos la función

$$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{1+x^2} - (2x-1) =$$

que verifica:

- h es continua en $\mathbb{R}$, por ser diferencia de funciones continuas en $\mathbb{R}$
- consideramos $[a,b]=[0,1]$
- $\left\{\begin{array}{l} f(0) = 2 \\ f(1) = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$ signo $f(0) \neq$ signo $f(1)$

Aplicando el teorema de Bolzano, $\exists c \in (0,1)$ tal que $h(c)=0$, y por tanto, c es un punto de corte de f y g.

2A $y = x^2 - 3x + 1$

Vértice:

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5 \\ y_v = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 1 = -1{,}25 \end{array}\right\} V_f(1{,}5\,, -1{,}25)$$

Puntos de corte con OX

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \left\{\begin{array}{l} 0{,}38 \\ 2{,}62 \end{array}\right.$$

Punto de corte con OY

$$x = 0 \Rightarrow y = 1$$

$y = -x^2 + x + 5$

Vértice

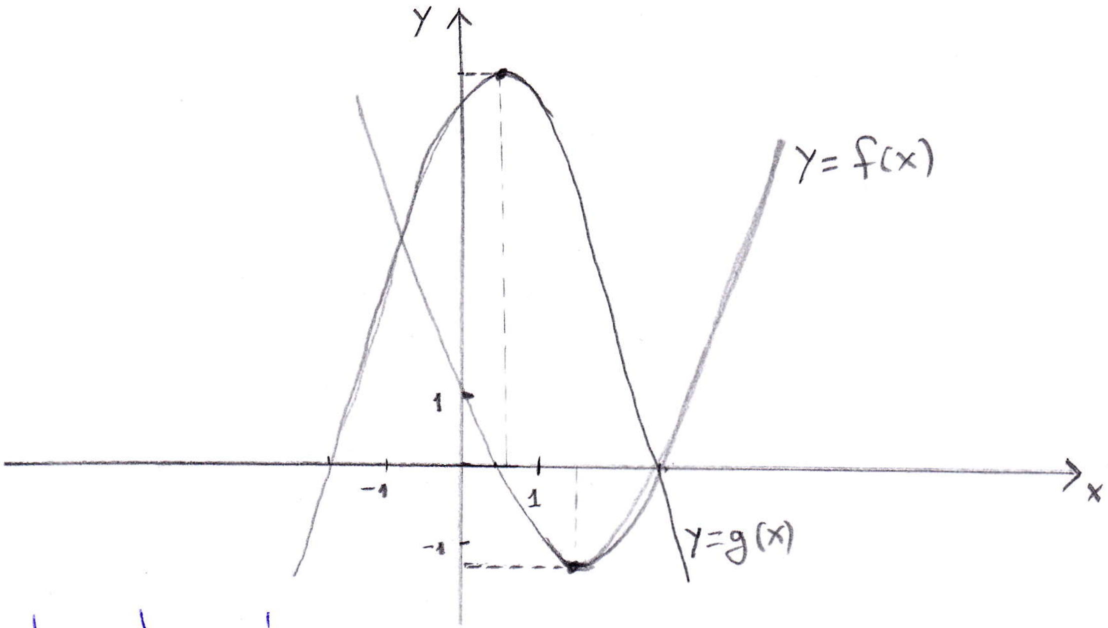
$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-1}{2\cdot(-1)} = 0{,}5 \\ y_v = -0{,}5^2 + 0{,}5 + 5 = 5{,}25 \end{array}\right\} V_g(0{,}5\,, 5{,}25)$$

Puntos de corte con OX

$$-x^2 + x + 5 = 0 \Rightarrow x = \left\{\begin{array}{l} -1{,}79 \\ 2{,}79 \end{array}\right.$$

Punto de corte con OY

$$x = 0 \Rightarrow y = 5$$



b) Límites de integración

$f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow$ (como g está por encima) $g(x) - f(x) = 0$

$\Rightarrow -x^2 + x + 5 - (x^2 - 3x - 1) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 4x + 6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

Primitiva

$\int (g(x) - f(x))\,dx = \int (-2x^2 + 4x + 6)\,dx = -\frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C = G(x)$

Área

$A = \int_{-1}^{3} (-2x^2 + 4x + 6)\,dx = G(3) - G(-1) = 18 - \left(-\frac{10}{3}\right) = \boxed{\frac{64}{3}\ u^2}$

3A a) $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k \end{pmatrix}$

Rango de A

$|A| = k^3 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow k = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

Si $k \neq \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow$ rango $A = 3$

Si $k = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango $A = 1$

Si $k = -2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ rango $A = 2$

Rango de $\tilde{A}$

Si $k=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango $\tilde{A} = 1$

Si $k=-2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_3+F_1]{2F_2+F_1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango $\tilde{A} = 3$

Discusión:

Si $k \neq \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow$ rango $A = 3 =$ rango $\tilde{A} =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D.

Si $k=1 \Rightarrow$ rango $A = 1 =$ rango $\tilde{A} \Rightarrow$ S.C.I.

Si $k=-2 \Rightarrow$ rango $A = 2 \neq 3 =$ rango $\tilde{A} \Rightarrow$ S.I.

donde hemos usado el teorema de Rouché-Fröbenius.

b) Resolución para $k=1$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ [1]

Llamamos $z = \lambda \in \mathbb{R}$

$y = \mu \in \mathbb{R}$

Sustituyendo en [1]: $x = 1 - y - z = 1 - \lambda - \mu$

$\boxed{\text{Soluciones: } (x,y,z) = (1-\mu-\lambda, \lambda, \lambda) \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$

4A a) $r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = 1+\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0,0,1) \\ \vec{u_r} = (-1,0,1) \end{cases}$

$\pi \equiv 2x - y + 3z = 6 \Rightarrow \vec{n_\pi} = (2,-1,3)$

$\vec{u_r} \cdot \vec{n_\pi} = (-1,0,1)\cdot(2,-1,3) = -2+3 \neq 0 \Rightarrow \vec{u_r} \not\perp \vec{n_\pi} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{r \text{ y } \pi \text{ son secantes (se cortan en un punto)}}$

b) $\pi' \equiv \{P_r, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{n_\pi}\}$

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x & -1 & 2 \\ y & 0 & -1 \\ z-1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2y + z - 1 + x + 3y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi' \equiv x + 5y + z - 1 = 0}$$

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. G. S. E.

Junio 2010

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. La velocidad de una partícula, medida en $\boldsymbol{m/sg}$, está determinada en función del tiempo $\boldsymbol{t \geq 0}$, medido en segundos, por la expresión $\boldsymbol{v(t) = (t^2 + 2t)e^{-t}}$. Se pide:

a) ¿En qué instante de tiempo del intervalo $\boldsymbol{[0, 3]}$ se alcanza la velocidad máxima? (1,25 puntos)

b) Calcula $\boldsymbol{\lim_{t \to \infty} v(t)}$, e interpreta el resultado obtenido. (1,25 puntos)

2B. Calcula la integral indefinida: $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1 + sen^2 x}\, dx$.

(Nota: Puedes probar el cambio de variable $\boldsymbol{y = sen\, x}$) (2,5 puntos)

3B. Consideremos las matrices $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}$. Determina los valores $\boldsymbol{a, b, c} \in \mathbb{R}$ de forma que se cumpla que el determinante de la matriz $\boldsymbol{B}$ sea igual a 8, y además se verifique que $\boldsymbol{A \cdot B = B \cdot A}$. (2,5 puntos)

4B. Dado el plano $\boldsymbol{\pi \equiv x + z = 4}$ y el punto $\boldsymbol{P(1, 1, 0)}$, se pide:

a) Encuentra la ecuación general del plano $\boldsymbol{\pi'}$ paralelo a $\boldsymbol{\pi}$ que pasa por $\boldsymbol{P}$. (1,25 puntos)

b) Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta $\boldsymbol{r}$ perpendicular a $\boldsymbol{\pi}$ que pasa por $\boldsymbol{P}$. (1,25 puntos)

Junio de 2010

Propuesta B

1B a) $v(t) = (t^2+2t)e^{-t}$; ¿Velocidad máxima en $[0,3]$?

$v'(t) = (2t+2)e^{-t} - (t^2+2t)e^{-t} = (-t^2+2)e^{-t}$

$v'(t) = 0 \Rightarrow (-t^2+2)e^{-t} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -t^2+2=0 \Rightarrow t=\pm\sqrt{2} \Rightarrow t=\sqrt{2} \\ e^{-t}=0 \quad \text{Nunca} \end{cases}$ (ya que $t \geq 0$)

$v''(t) = -2te^{-t} - (-t^2+2)e^{-t}$

$v''(\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}\,e^{-\sqrt{2}} - (-(\sqrt{2})^2+2)e^{-\sqrt{2}} = \dfrac{-2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}} < 0 \Rightarrow t=\sqrt{2}$ es un máximo relativo de $v(t)$

$\boxed{\text{La velocidad es máxima a los } t=\sqrt{2} \text{ seg.}}$

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} (t^2+2t)e^{-t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^2+2t}{e^t} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] =$

$= \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{2t+2}{e^t} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{2}{e^t} = 0$

regla de L'Hôpital

Interpretación: a medida que aumenta el tiempo, disminuye la velocidad

2B $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \begin{bmatrix} y = \operatorname{sen} x \\ dy = \cos x\, dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{1+y^2}\,dy =$

$= \operatorname{arctg} y = \boxed{\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) + C}$

3B $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}$

- $\det B = 8 \iff 2c - (a-3)(b+2) = 8 \iff -2a+3b+2c-ab = 2$
- $AB = BA \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} b+6 & 2a+c-6 \\ b+2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & a-1 \\ 2b+4 & b+c+2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b+6=4 \Rightarrow b=-2 \\ 2a+c-6=a-1 \\ b+2=2b+4 \Rightarrow b=-2 \\ c=b+c+2 \Rightarrow b=-2 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 2a+c-6=a-1 \\ -\cancel{2a}-6+2c+\cancel{2a}=2 \Rightarrow c=4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=-1+6-4=1$$

$\boxed{\text{Solución: } (a,b,c)=(1,-2,4) \text{ cumple lo que se pide}}$

$\boxed{4B}$ $\pi \equiv x+z=4$, $P(1,1,0)$

a) π' plano t.q. $\left\{\begin{array}{l} \pi' \parallel \pi \Rightarrow \pi' \equiv x+z=D \\ P\in\pi' \qquad P(1,1,0)\in\pi' \end{array}\right\} \Rightarrow D=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\pi' \equiv x+z=1}$$

b) r recta t.q. $\left\{\begin{array}{l} r\perp\pi \\ P\in r \end{array}\right\} \Rightarrow r\equiv\{P, \vec{n_\pi}\}$, $\vec{n_\pi}=(1,0,1)$

$$\boxed{r \equiv \left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{array}\right. \quad \text{con } \lambda\in\mathbb{R}}$$