Septiembre 2010

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. G. S. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad y lo más detalladamente posible. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Definición de derivada de una función en un punto. (0,5 puntos)

b) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax + \operatorname{sen} x}{2x - x^2} & \text{si } x < 0 \\ bx + c & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, determina los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea una función continua en $x = 0$, y además sea continua y derivable en $x = 1$. (2 puntos)

2A. a) Determina el dominio de la función $f(x) = \sqrt{2x+1}$. (1 punto)

b) Calcula la integral definida: $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\, dx$. (1,5 puntos)

3A. Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) ¿Para qué valores $\lambda \in \mathbb{R}$ existe la matriz inversa de M? (1 punto)

b) Para $\lambda = 0$ resuelve, si es posible, la ecuación $X \cdot M = 2F$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3. (1,5 puntos)

4A. Dado el punto $P(0,0,1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Calcula la distancia desde el punto P a la recta r. (1,25 puntos)

b) Halla unas ecuaciones paramétricas de una recta s que pase por el punto P y corte perpendicularmente a la recta r. (1,25 puntos)

(sigue a la vuelta)

Septiembre de 2010

Cipri

Propuesta A

1A

a) f derivable en $a \in A \cap A' \iff \exists \lim_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$

b)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax + \operatorname{sen} x}{2x - x^2} & \text{si } x < 0 \\ bx + c & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Continuidad en $x = 0$: ¿$\exists \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \dfrac{ax + \operatorname{sen} x}{2x - x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to 0^-} \dfrac{a + \cos x}{2 - 2x} = \dfrac{a+1}{2} \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (bx + c) = c = f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a+1}{2} = c \Rightarrow a - 2c = -1$$

Continuidad en $x = 1$: ¿$\exists \lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (bx + c) = b + c \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{2} = f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow b + c = \frac{1}{2} \Rightarrow 2b + 2c = 1$$

Derivabilidad en $x = 1$: ¿$\exists f'(1)$?

$f'_-(1) = b$

$y = bx + c$

$y' = b$

$f'_+(1) = -\frac{1}{4}$

$y = \dfrac{1}{1+x}$

$y' = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$

$b = -\frac{1}{4}$ (para que f sea derivable en $x = 1$)

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{cases} a-2c=-1 \\ 2b+2c=1 \\ b=-\frac{1}{4} \end{cases}\right\} \Rightarrow (a,b,c)=\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4},\frac{3}{4}\right)$$

Solución: $(a,b,c)=\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4},\frac{3}{4}\right)$ hacen que f sea continua en $x=0$ y, continua y derivable en $x=1$

2A a) $f(x)=\sqrt{2x+1}$

$$\boxed{Dom(f)}=\{x\in\mathbb{R}: 2x+1\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}: x\geq -\tfrac{1}{2}\}=$$
$$=\boxed{\left[-\tfrac{1}{2},+\infty\right)}$$

b) $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} f(x)\,dx$

Primitiva

$$\int f(x)dx=\int\sqrt{2x+1}\,dx=\int(2x+1)^{1/2}dx=\frac{1}{2}\int 2(2x+1)^{1/2}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3}+C=G(x)$$

Integral definida

$$\int_{-1/2}^{0} f(x)dx=G(0)-G\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}-0=\boxed{\frac{1}{3}}$$

3A $M=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda & -1\\ 4 & 3 & \lambda\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

a) $\exists M^{-1} \Leftrightarrow |M|\neq 0$

$$|M|=\lambda^2+3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=\begin{cases}-1\\-2\end{cases}$$

Solución: $\exists M^{-1}\ \forall\lambda\in\mathbb{R}-\{-2,-1\}$

b) $XM = 2F$

$XMM^{-1} = 2FM^{-1}$

$$\boxed{X = 2FM^{-1}}$$

$$2F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9/2 & -1/2 & 3/2 \\ 6 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & -4 \\ -9 & -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

Cálculo de M^{-1} para $\lambda = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_3]{-2F_1+F_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-3F_3+F_1]{-6F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_1}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1:2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

4A $P(0,0,1)$, $r \equiv \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y=0 \end{cases}$

a) Primera forma

$$d(P,r) = \frac{|\vec{u}_r \times \vec{AP}|}{|\vec{u}_r|} \quad \text{donde } A \in r$$

Si $x = y = 1 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow A(1,1,1)$

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k} + \vec{j} - \vec{k} + \vec{i} = (1,1,-2)$$

$$\vec{AP} = (0,0,1) - (1,1,1) = (-1,-1,0)$$

$$\vec{u}_r \times \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k} + 2\vec{j} + \vec{k} - 2\vec{i} = (-2,2,0)$$

$$\boxed{d(P,r) = \frac{\sqrt{(-2)^2+2^2+0^2}}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12}}{3}\ u}$$

Segunda forma

1) Determinamos un plano π perpendicular a r que contenga a P

$$\pi \equiv \{P,\ \vec{n}_\pi = \vec{u}_r\}$$

$$\pi \equiv \overrightarrow{PX} \cdot \vec{u}_r = 0 \quad \text{donde } X = (x,y,z) \in \pi$$

$$\overrightarrow{PX} = (x,y,z) - (0,0,1) = (x,y,z-1)$$

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{u}_r = 0 \iff (x,y,z-1)\cdot(1,1,-2) = \boxed{x+y-2z+2=0 \equiv \pi}$$

2) Calculamos el punto de corte, Q, de r y π

$$Q \begin{cases} x+y-2z = -2 \\ x+y+z = 3 \\ x-y = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [2]: $z = \frac{5}{3}$

Sustituimos en [3]: $y = \frac{2-2\cdot\frac{5}{3}}{-2} = \frac{2}{3}$

Como $x-y=0 \Rightarrow x = y = \frac{2}{3}$

Luego $\boxed{Q\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)}$

3) Calculamos $d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}|$

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) - (0,0,1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

4) $d(P,r) = d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{9}} =$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{12}}{3}\ u}$$

b) s recta t.q. $\begin{cases} P \in s \\ s \perp r \end{cases} \Rightarrow \boxed{s \equiv \{P, \overrightarrow{PQ}\} \equiv \begin{cases} x = \frac{2}{3}\lambda \\ y = \frac{2}{3}\lambda \\ z = 1 + \frac{2}{3}\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}}$

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. G. S. E.

Septiembre 2010

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. Dada la función definida por $\boldsymbol{f(x)} = \begin{vmatrix} \mathbf{3}\boldsymbol{x} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{x} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{x}\mathbf{-6} \end{vmatrix}$, se pide:

a) Halla su expresión polinómica simplificada calculando el determinante. (0,5 puntos)

b) Calcula las coordenadas de su punto de inflexión y los intervalos en donde sea cóncava hacia arriba ($\cup$) y cóncava hacia abajo ($\cap$). (2 puntos)

2B. a) Enuncia la fórmula de integración por partes. (0,5 puntos)

b) Calcula la integral indefinida: $\displaystyle\int \boldsymbol{x\,Ln\,x\,dx}$.

Nota: $\boldsymbol{Ln\,x}$ representa el logaritmo neperiano de $\boldsymbol{x}$. (2 puntos)

3B. a) Clasifica en función del parámetro $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & \lambda z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & z & = & 10 \end{array}\right.$$

(1,5 puntos)

b) Resuélvelo, si es posible, para $\boldsymbol{\lambda = -3}$. (1 punto)

4B. Consideremos los planos $\boldsymbol{\pi \equiv ax + by + 3z = c}$, $\boldsymbol{\pi' \equiv 2x - y + z = 3}$ y la recta

$$r \equiv \left\{\begin{array}{rcr} 2x + 3z & = & 0 \\ y + 2z & = & -4 \end{array}\right.$$

a) Determina los parámetros $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}$ para que los planos $\boldsymbol{\pi}$ y $\boldsymbol{\pi'}$ sean paralelos. (1 punto)

b) Para los valores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ obtenidos, estudia la posición relativa del plano $\boldsymbol{\pi}$ y la recta $\boldsymbol{r}$ en función de $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$. (1,5 puntos)

Septiembre 2010

Propuesta B

1B $f(x)=\begin{vmatrix} 3x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ -1 & 0 & x-6 \end{vmatrix}$

a) $f(x)=3x\cdot x\cdot(x-6)-1=3x^3-18x^2-1$

b) $f'(x)=9x^2-36x$

$f''(x)=18x-36$

$f''(x)=0 \Rightarrow 18x-36=0 \Rightarrow x=\frac{36}{18}=2$

$$\begin{array}{ccccc} & - & & + & \\ \hline & 0 & 2 & 3 & \end{array}$$ signo de f''

$f'''(x)=18$

$f'''(2)\neq 0$

Conclusión: f es $\begin{cases} \text{cóncava hacia arriba } (\cup) \text{ en } (2,+\infty) \\ \text{cóncava hacia abajo } (\cap) \text{ en } (-\infty,2) \end{cases}$

f tiene en $x=2$ un punto de inflexión de coordenadas $(2,f(2))=(2,-49)$

2B a) Sea $D\subseteq\mathbb{R}$ un intervalo y, f y g dos funciones con derivada continua en D. Entonces

$$\int fg' = fg-\int f'g$$

b) $\int x\ln x\,dx=\begin{bmatrix} u=\ln x \longrightarrow du=\frac{1}{x}dx \\ dv=x\,dx \longrightarrow v=\frac{x^2}{2} \end{bmatrix}=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx=$

$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}=\boxed{\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{x^2}{4}+C}$

3B $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & \lambda \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \tilde{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

Rango de A

$|A| = 5\lambda - 10 \Rightarrow 5\lambda - 10 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$

Si $\lambda \neq 2 \Rightarrow$ rango $A = 3$

$\lambda = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ rango $A = 2$

Rango de $\tilde{A}$

Si $\lambda = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2F_3+F_1]{-2F_2+F_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango $\tilde{A} = 3$

Discusión

Si $\lambda \neq 2 \Rightarrow$ rango $A = 3 =$ rango $\tilde{A} =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D.

$\lambda = 2 \Rightarrow$ rango $A = 2 \neq 3 =$ rango $\tilde{A} \Rightarrow$ S.I.

donde hemos usado el teorema de Rouché-Fröbenius

b) **Resolución para $\lambda = 3$**

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_3+F_1]{-2F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -20 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -20 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$

De [3]: $z = \frac{-20}{2} = -10$

Sustituimos en [2]: $y = \frac{-(-10)}{5} = 2$

Sustituimos en [1]: $x = \frac{-3\cdot(-10)-2}{2} = 14$

$\boxed{\text{Solución: } (x,y,z) = (14, 2, -10)}$

4B a) $\pi \equiv ax + by + 3z = c$

$\pi' \equiv 2x - y + z = 3$

$\pi \parallel \pi'$ si $\begin{cases} \vec{n}_\pi \parallel \vec{n}_{\pi'} \\ P \in \pi \Rightarrow P \notin \pi' \end{cases}$

$Cipri$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}_\pi=(a,b,3)\\ \vec{n}_{\pi'}=(2,-1,1)\end{array}\right\}\ \vec{n}_\pi \parallel \vec{n}_{\pi'} \Rightarrow \frac{a}{2}=\frac{b}{-1}=\frac{3}{1} \Rightarrow \begin{cases}\frac{a}{2}=3 \Rightarrow a=6\\ \frac{b}{-1}=3 \Rightarrow b=-3\end{cases}$$

$$\text{Si } x=y=0 \Rightarrow P\left(0,0,\frac{c}{3}\right)\in\pi \Rightarrow 2\cdot 0-0+\frac{c}{3}=3 \Rightarrow c\neq 9$$

$$\boxed{\underline{\text{Conclusión}}:\ \pi\parallel\pi' \text{ si } a=6,\ b=-3 \text{ y } c\neq 9}$$

b) $\pi\equiv 6x-3y+3z=c \Rightarrow \vec{n}_\pi=(6,-3,3)$

$$r\equiv\begin{cases}2x+3z=0\\ y+2z=-4\end{cases} \Rightarrow \vec{u}_r=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&0&3\\0&1&2\end{vmatrix}=2\vec{k}-3\vec{i}-4\vec{j}=(-3,-4,2)$$

$$\vec{u}_r\cdot\vec{n}_\pi=(-3,-4,2)\cdot(6,-3,3)=-18+12+6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}_r\perp\vec{n}_\pi \Rightarrow \begin{cases} r\subset\pi & \text{si } [P\in r \Rightarrow P\in\pi]\\ r\parallel\pi & \text{si } [P\in r \Rightarrow P\notin\pi]\end{cases}$$

$$\text{Si } z=0 \Rightarrow y=-4 \text{ y } x=0 \Rightarrow P(0,-4,0)\in r$$

$$¿P\in\pi?\quad 6\cdot 0-3\cdot(-4)+3\cdot 0=c \Rightarrow c=12$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } c=12 \Rightarrow r\subset\pi\\ \quad\ \ c\neq 12 \Rightarrow r\parallel\pi\end{array}}$$