Reserva 1 de 2010

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. G. S. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad y lo más detalladamente posible. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Dada la función $f(x) = 3x^3 - 36x + 2$, se pide:

a) Determina las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos. (1 punto)

b) Enuncia el teorema del valor medio de Lagrange. Analiza si es posible aplicarlo a la función $f(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$ y, en caso afirmativo, calcula en qué puntos se verifica la tesis del teorema en dicho intervalo. (1,5 puntos)

2A. a) Dado un número real $a > 0$, calcula el área del recinto encerrado entre la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = a + 1$. (1,5 puntos)

b) Explica razonadamente que cuando a tiende a ∞, dicho área tiende a cero. (1 punto)

3A. a) Clasifica en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$ el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 100y & - & z & = & 100 \\ x & - & 100y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 300y & + & kz & = & 200 \end{array}\right.$$

(1,5 puntos)

b) Resuélvelo en el caso en que sea compatible indeterminado. (1 punto)

4A. a) Comprueba que las direcciones de las rectas $r \equiv \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y + z & = & 1 \end{array}\right.$ y $r' \equiv \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1 + 2\lambda \\ y & = & 2 + \lambda \\ z & = & \lambda \end{array}\right.$, $\lambda \in \mathbb{R}$, son perpendiculares. (1 punto)

b) Halla la ecuación general de un plano π que contenga a la recta r y sea paralelo a r'. (1,5 puntos)

(sigue a la vuelta)

Reserva 1 de 2010

$\vec{Cipri}$

Propuesta A

1A $f(x) = 3x^3 - 36x + 2$

a) Máximos y mínimos relativos

$$f'(x) = 9x^2 - 36$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 9x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$f''(x) = 18x$$

$f''(2) > 0 \Rightarrow$ $x = 2$ es un mín. relativo de coordenadas $(2, f(2)) = (2, -34)$

$f''(-2) < 0 \Rightarrow$ $x = -2$ es un máx. relativo de coordenadas $(-2, f(-2)) = (-2, 110)$

b) Teorema del valor medio de Lagrange

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces $\exists c \in (a,b)$ t.q.

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Aplicación

$f(x) = 3x^3 - 36x + 2$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, por ser una función polinómica, luego es continua en $[-2,2]$ y derivable en $(-2,2)$ y, por tanto, por el teorema del valor medio de Lagrange, $\exists c \in (-2,2)$ t.q.

$$f(2) - f(-2) = f'(c)(2-(-2))$$

Como $\left.\begin{array}{l} f(2) = -34 \\ f(-2) = -110 \\ f'(x) = 9x^2 - 36 \end{array}\right\} \Rightarrow -34 - 110 = (9c^2 - 36)\cdot 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow -36 = 9c^2 - 36 \Rightarrow 9c^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{c = 0 \in [-2,2]}$$

$\boxed{2A}$ $f(x) = \frac{1}{x^2}$

a) $A = \int_a^{a+1} f(x)\,dx$, $a>0$

Primitiva

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{-1}{x} + C = G(x)$$

Área

$$\boxed{A =} \int_a^{a+1} f(x)\,dx = G(a+1) - G(a) = \frac{-1}{a+1} + \frac{1}{a} =$$

$$= \frac{-a+a+1}{a(a+1)} = \boxed{\frac{1}{a(a+1)}\ u^2}$$

b) $\lim_{a\to\infty} A(a) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{a(a+1)} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$

$\boxed{3A}$ a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 100 & -1 \\ 1 & -100 & 2 \\ 1 & 300 & k \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 100 & -1 & 100 \\ 1 & -100 & 2 & 0 \\ 1 & 300 & k & 200 \end{pmatrix}$

Rango de A

$$|A| = -100k + 200 - 300 - 100 - 600 - 100k = -800 - 200k = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow k = -4$

Si $k \neq -4 \Rightarrow$ rango $A = 3$

$k = -4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 100 & -1 \\ 1 & -100 & 2 \\ 1 & 300 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 100 \\ 1 & -100 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ rango $A = 2$

Rango de $\tilde{A}$

Si $k = -4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 100 & -1 & 100 \\ 1 & -100 & 2 & 0 \\ 1 & 300 & -4 & 200 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 100 & -1 & 100 \\ 0 & -200 & 3 & -100 \\ 0 & 200 & -3 & 100 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\xrightarrow{F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 100 & -1 & 100 \\ 0 & -200 & 3 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango $\tilde{A} = 2$

Discusión

Si $k \neq -4 \Rightarrow$ rango $A = 3 =$ rango $\tilde{A} =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D.

$k = -4 \Rightarrow$ rango $A = 2 =$ rango $\tilde{A} < 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.I.

donde hemos usado el teorema de Rouché-Fröbenius

b) Resolución para $k = -4$

Por lo visto en el apartado a), tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 100 & -1 & 100 \\ 0 & -200 & 3 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c}[1]\\ [2] \\ \end{array}$$

Llamamos $z = \lambda \in \mathbb{R}$

Sustituyendo en [2]: $y = \dfrac{-100-3\lambda}{-200} = \dfrac{100+3\lambda}{200}$

Sustituyendo en [1]: $x = 100 + \lambda - 100 \cdot \dfrac{100+3\lambda}{200} = \dfrac{100-\lambda}{2}$

$$\boxed{\text{Soluciones: } (x,y,z) = \left(\frac{100-\lambda}{2}, \frac{100+3\lambda}{200}, \lambda\right) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}}$$

4A a) $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$, $r' \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

$r: y = 1 - z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_r = (0,-1,1)$ y $\vec{u}_{r'} = (2,1,1)$

$\vec{u}_r \perp \vec{u}_{r'} \Leftrightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{u}_{r'} = 0 \Leftrightarrow (0,-1,1)\cdot(2,1,1) = -1+1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{las direcciones de } r \text{ y } r' \text{ son perpendiculares}}$

b) $\pi \equiv \{P_r, \vec{u}_r, \vec{u}_{r'}\}$ donde $P_r \in r$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ y-1 & -1 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - y - z + 1 = 0}$$

Cálculo de X

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/13 & -2/13 & 1/13 \\ 1/13 & 6/13 & -3/13 \\ -2/13 & 1/13 & 6/13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

4B $\pi \equiv ax + y + bz = c$

$\pi' \equiv x + 2y = 3$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

- Pasa por el origen de coordenadas

$O(0,0,0) \in \pi \Rightarrow a \cdot 0 + 0 + b \cdot 0 = c \Rightarrow c = 0$

- $\pi \perp \pi'$

$\pi \perp \pi' \Leftrightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{n}_{\pi'} \Leftrightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi'} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a, 1, b) \cdot (1, 2, 0) = 0 \Rightarrow a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$

- $r \subset \pi$

$r \subset \pi \Rightarrow \vec{u}_r \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$

$(1,1,1) \cdot (-2, 1, b) = 0 \Rightarrow -2 + 1 + b = 0 \Rightarrow b = 1$

Solución: el plano pedido es $-2x + y + z = 0$

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. G. S. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Reserva 1 de 2010

PROPUESTA B

1B. El espacio recorrido por una partícula, medido en metros, está determinado en función del tiempo $t \geq 0$, medido en segundos, por la expresión $e(t) = A\,t^2 + B\,Ln(t+1) + C$. Se pide:

a) Determina los coeficientes $A, B, C \in \mathbb{R}$ sabiendo que en el instante $t = 0$ la partícula ha recorrido $6\,m$, la velocidad inicial para $t = 0$ es de $8\,m/sg$ y que la aceleración cuando $t = 1$ segundo es de $2\,m/sg^2$. (1,5 puntos)

b) Para los valores obtenidos de A, B y C, calcula $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{e(t)}{t^2}$. (1 punto)

(Nota: $Ln(t+1)$ representa el logaritmo neperiano de $t+1$. Recuerda además que la velocidad es la derivada primera del espacio respecto del tiempo y la aceleración la derivada segunda.)

2B. Calcula la integral indefinida: $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 + x^2}\,dx$. (2,5 puntos)

3B. a) Despeja X en la ecuación matricial $X \cdot A = B - 2X$, donde A, B y X son matrices cuadradas de orden 3. (1,25 puntos)

b) Calcula la matriz X siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. (1,25 puntos)

4B. Calcula los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ de la ecuación del plano $\pi \equiv ax + y + bz = c$, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas, es perpendicular al plano de ecuación $\pi' \equiv x + 2y = 3$ y que contiene a la recta de ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} x &= 1 + \lambda \\ y &= 1 + \lambda \\ z &= 1 + \lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

(2,5 puntos)

Cipri

Reserva 1 de 2010

Propuesta B

1B $e(t)=At^2+B\ln(t+1)+C \quad , t\geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ e(0)=6 \\ \bullet\ e'(0)=8 \\ \bullet\ e''(1)=2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} e(0)=C=6 \\ v(0)=e'(0)=B=8 \\ \qquad e'(t)=2At+\dfrac{B}{t+1} \end{array}$$

$$a(1)=e''(1)=2A-\frac{8}{4}=2A-2=2 \Rightarrow A=2$$

$$e''(t)=2A-\frac{B}{(t+1)^2}$$

$\boxed{\text{Solución: } (A,B,C)=(2,8,6) \text{ cumplen lo que se pide}}$

b) $e(t)=2t^2+8\ln(t+1)+6$

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty}\frac{e(t)}{t^2}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2t^2+8\ln(t+1)+6}{t^2}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}2+8\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t+1)}{t^2}+\lim_{t\to+\infty}\frac{6}{t^2}=2+8\cdot 0+0=\boxed{2}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t+1)}{t^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{t+1}}{2t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{(t+1)2t}=0$$

2B $\displaystyle\int\frac{1}{x^3+x^2}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples $\dfrac{1}{x^3+x^2}$

$x^3+x^2=x^2(x+1)=0 \Rightarrow x=0$ (doble)

$x=-1$

$$\frac{1}{x^3+x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}=\frac{Ax(x+1)+B(x+1)+C(x^2)}{x^2(x+1)}$$

$$1=Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2\left\{\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow B=1 \\ x=-1 \Rightarrow C=1 \\ \text{Derivamos: } 0=2Ax+A+B+2xC \end{array}\right.$$

$$x=0 \Rightarrow 0=A+B \Rightarrow A=-1$$

Integral

$$\int \frac{1}{x^3+x^2}\,dx = \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= -\ln|x| + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \ln|x+1| = \boxed{-\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1| + C}$$

3B a) $XA = B - 2X$

$XA + 2X = B$

$X(A+2I) = B$

$X(A+2I)(A+2I)^{-1} = B(A+2I)^{-1}$

$$\boxed{X = B(A+2I)^{-1}}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

Cálculo de $A+2I$

$$A+2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $(A+2I)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2:2]{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-3F_1+F_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} & 1 & -1/2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3:\left(-\frac{13}{2}\right)}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/13 & 1/13 & 6/13 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_3+F_1]{-\frac{1}{2}F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4/13 & -2/13 & 1/13 \\ 0 & 1 & 0 & 1/13 & 6/13 & -3/13 \\ 0 & 0 & 1 & -2/13 & 1/13 & 6/13 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow (A+2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 4/13 & -2/13 & 1/13 \\ 1/13 & 6/13 & -3/13 \\ -2/13 & 1/13 & 6/13 \end{pmatrix}$$