Reserva 2 de 2010

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. G. S. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad y lo más detalladamente posible. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Dada la función $f(x) = arctg\left(\sqrt{x-1}\right)$ definida para $x \geq 1$, se pide:

a) Calcula y simplifica $f'(x)$. (1,5 puntos)

b) Explica razonadamente por qué en ningún punto de la gráfica de la función $f(x)$ la recta tangente es horizontal. (1 punto)

2A. Calcula $a \in \mathbb{R}$, siendo $a > 0$, para que el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = 6x^2$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ sea igual a $2000\, u^2$. (2,5 puntos)

3A. Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Estudia para qué valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ el rango de la matriz $M - \lambda N$ es igual a 3. (1,25 puntos)

b) Resuelve el sistema de ecuaciones: $\left\{ \begin{array}{rcrcl} 3X & + & Y & = & M \\ X & + & Y & = & N \end{array} \right.$, donde X e Y son matrices cuadradas de orden 3. (1,25 puntos)

4A. Dado el plano de ecuación general $\pi \equiv 2x + ay - z = 4$, se pide:

a) Determina, si es posible, un valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ de modo que el plano π sea paralelo al plano de ecuación $\pi' \equiv x + y + z = 2$. (1,25 puntos)

b) Determina, si es posible, un valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ de modo que el plano π sea paralelo a la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 1 - \lambda \\ y & = & 2\lambda \\ z & = & 2 + \lambda \end{array} \right.$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (1,25 puntos)

(sigue a la vuelta)

Reserva 2 de 2010

Propuesta A

1A $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x-1}\right), \quad x \geq 1$

a) $$\boxed{f'(x) = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x-1}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{1+x-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2x\sqrt{x-1}}}$$

b) Para que la recta tangente sea horizontal, tiene que tener pendiente cero, luego $f'(x) = 0$, lo que implica que $0 = 1$ Falso.
Por tanto, no hay ningún punto en el que la recta tangente a $f(x)$ sea horizontal.

2A Límites de integración (puntos de corte con OX)

$f(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

El otro límite de integración es $x = a$

Primitiva

$$\int f(x)\,dx = \int 6x^2\,dx = \frac{6x^3}{3} = 2x^3 + C = G(x)$$

Área

$$A = \int_0^a f(x)\,dx = G(a) - G(0) = 2a^3 = 2000\ u^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \sqrt[3]{\frac{2000}{2}} = 10}$$

3A $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Rango de $M - \lambda N$

$$M - \lambda N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 2\lambda & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \\ -2\lambda & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|M-\lambda N| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \\ -2\lambda & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 2(1-\lambda)(3-\lambda) - 4\lambda(3-\lambda) + 8\lambda =$$

$$= 6\lambda^2 - 12\lambda + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 1$$

Si $\lambda \neq 1 \Rightarrow \text{rango}(M-\lambda N) = 3$

Si $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(M-\lambda N) = 2$

(no se pide)

$\boxed{\underline{\text{Solución:}} \text{ para } \lambda \neq 1, \text{ rango}(M-\lambda N) = 3}$

b) $3X + Y = M \qquad\qquad 3X + Y = M$

$X + Y = N \xrightarrow{\cdot(-1)} -X - Y = -N$

sumamos $\quad 2X = M - N \Rightarrow X = \frac{1}{2}(M-N)$

Como $X + Y = N \Rightarrow Y = N - \frac{1}{2}(M-N)$

$$X = \frac{1}{2}[M-N] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$Y = N - \frac{1}{2}(M-N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

4A a) $\pi \equiv 2x + ay - z = 4$

$\pi' \equiv x + y + z = 2$

$\pi \parallel \pi' \Rightarrow \vec{n}_\pi \parallel \vec{n}_{\pi'} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{a}{1} = \frac{-1}{1}$ Imposible $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\nexists a \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \pi \parallel \pi'}$

b) $\pi \parallel r \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{u}_r \Rightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2, a, -1)\cdot(-1, 2, 1) = 0 \Rightarrow -2 + 2a - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{2}}$

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. G. S. E.

Reserva 2 de 2010 **Materia: MATEMÁTICAS II**

PROPUESTA B

1B. Determina los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ de forma que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ cumpla que pasa por el punto de coordenadas $(3, 10)$ y tiene un extremo relativo en el punto de coordenadas $(1, -2)$. (2,5 puntos)

2B. Calcula la integral indefinida: $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\, dx$.

(Nota: Puedes probar el cambio de variable $y = x + 1$) (2,5 puntos)

3B. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 10$, obtén el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ y & x & z \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$.

(0,75 puntos el apartado a), 0,75 puntos el apartado b) y 1 punto el apartado c))

4B. Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 2-\lambda \\ y & = & 2\lambda \\ z & = & 2+\lambda \end{array} \right. \ \lambda \in \mathbb{R}$ y $r' \equiv \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 2+\mu \\ y & = & -2\mu \\ z & = & 4+\mu \end{array} \right. \ \mu \in \mathbb{R}$, se pide:

a) Comprueba que las dos rectas se cortan en un punto calculando dicho punto de corte. (1,5 puntos)

b) Determina el ángulo de corte entre ambas rectas. (1 punto)

Reserva 2 de 2010

Propuesta B

1B $f(x) = ax^2 + bx + c$

- f pasa por $(3,10) \Rightarrow f(3) = 10$
- f tiene un extremo relativo en $(1,-2) \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = -2 \end{cases}$

$$\begin{cases} f(3) = 10 \Rightarrow 9a + 3b + c = 10 \\ f(1) = -2 \Rightarrow a + b + c = -2 \\ \quad f'(x) = 2ax + b \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 9 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_1+F_3]{-9F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -8 & 28 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{-6F_3+F_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -8 & 28 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [3]: $z = 1$

Sustituimos en [2]: $y = \dfrac{28 + 8 \cdot 1}{-6} = -6$

Sustituimos en [1]: $x = -2 - (-6) - 1 = 3$

$\boxed{\text{Solución: la función pedida es } f(x) = 3x^2 - 6x + 1}$

2B $\displaystyle \int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left[\begin{array}{l} y = x+1 \\ dy = dx \end{array}\right] = \int \frac{y+1}{\sqrt{y}}\,dy = \int \frac{y}{\sqrt{y}}\,dy + \int \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy =$

$$= \int y^{+1/2}\,dy + \int y^{-1/2}\,dy = \frac{y^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{y^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{2\sqrt{y^3}}{3} + 2\sqrt{y} =$$

$$= \frac{2y\sqrt{y}}{3} + \frac{6\sqrt{y}}{3} = \frac{(2y+2)\sqrt{y}}{3} = \frac{[2(x+1)+6]\sqrt{x+1}}{3} = \boxed{\frac{(2x+8)\sqrt{x+1}}{3} + C}$$

<u>De otra forma</u> (con otro cambio de variable)

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}dx = \left[\begin{array}{l} t^2 = x+1 \\ 2t\,dt = dx \end{array}\right] = \int \frac{t^2+1}{t}2t\,dt = 2\int (t^2+1)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3}+t\right) \underset{\substack{\uparrow \\ t=\sqrt{x+1} \Rightarrow t^3 = \sqrt{(x+1)^3}}}{=} 2\left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3} + \sqrt{x+1}\right) = 2\left[\frac{(x+1)\sqrt{x+1} + 3\sqrt{x+1}}{3}\right] =$$

$$= \boxed{\frac{(2x+8)\sqrt{x+1}}{3} + C}$$

$\boxed{3B}$ $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

a) $$\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{3\cdot\frac{1}{2}\cdot 10 = 15}$$

b) $$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ y & x & z \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ x & y & z \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -\left(-\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}\right) = 5\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\cdot 10 = \boxed{50}$$

c) $$\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 5\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} = 5\cdot 10 = 50$$

$\boxed{4B}$ a) $\{P\} = r \cap r'$

$$\left.\begin{array}{r} 2-\lambda = 2+\mu \\ 2\lambda = -2\mu \\ 2+\lambda = 4+\mu \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lambda+\mu = 0 \\ 2\lambda+2\mu = 0 \Rightarrow \lambda+\mu=0 \\ \lambda-\mu = 2 \end{array} \left.\right\} \begin{array}{l} \lambda+\mu = 0 \\ \lambda-\mu = \\ \hline 2\lambda \quad = 2 \Rightarrow \lambda = 1 \\ \Rightarrow \mu = -1 \end{array}$$

Sustituyendo $\lambda = 1$ en las ecuaciones de r (o $\mu = -1$ en las ecuaciones de r'), obtenemos P:

$$P\begin{cases} x = 2-1 \\ y = 2\cdot 1 \\ z = 2+1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(1,2,3)}$$

b) $\boxed{\alpha = \measuredangle\{r, r'\} = \arccos\left|\dfrac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_{r'}}{|\vec{u}_r|\,|\vec{u}_{r'}|}\right| = \arccos\dfrac{4}{6} = 48^\circ 11' 22{,}87''}$

$\vec{u}_r \cdot \vec{u}_{r'} = (-1,2,1)\cdot(1,-2,1) = -1-4+1 = -4$

$|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_{r'}| = |-4| = 4$

$|\vec{u}_r| = \sqrt{(-1)^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}$

$|\vec{u}_{r'}| = \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{6}$