

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 7
- Junio, Ejercicio 8
- Reserva 1, Ejercicio 7
- Reserva 1, Ejercicio 8
- Reserva 2, Ejercicio 7
- Reserva 2, Ejercicio 8
- Reserva 3, Ejercicio 7
- Reserva 3, Ejercicio 8
- Reserva 4, Ejercicio 7
- Reserva 4, Ejercicio 8
- Julio, Ejercicio 7
- Julio, Ejercicio 8

El plano perpendicular al segmento de extremos $P(0,3,8)$ y $Q(2,1,6)$ que pasa por su punto medio corta a los ejes coordenados en los puntos A , B y C . Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A , B y C .

MATEMÁTICAS II. 2023. JUNIO. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el punto medio del segmento PQ : $M = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{8+6}{2} \right) = (1, 2, 7)$

El vector $\overrightarrow{PQ} = (2, -2, -2)$ es el vector normal del plano, luego: $2x - 2y - 2z + D = 0$

De todos esos planos nos interesa el que pasa por el punto M , por lo tanto:

$$2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 7 + D = 0 \Rightarrow D = 16 \Rightarrow 2x - 2y - 2z + 16 = 0 \Rightarrow x - y - z + 8 = 0$$

Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados: $A = (-8, 0, 0)$; $B = (0, 8, 0)$;

$C = (0, 0, 8)$. Calculamos los vectores $\vec{AB} = (8, 8, 0)$ y $\vec{AC} = (8, 0, 8)$.

Hacemos el producto vectorial de los vectores:
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 64\vec{i} - 64\vec{j} - 64\vec{k}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2} \text{módulo}(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = \frac{1}{2} \sqrt{64^2 + 64^2 + 64^2} = \frac{\sqrt{12288}}{2} = \frac{64\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3} \text{ u}^2$$

Considera el punto $A(-1,1,3)$ y la recta r determinada por los puntos $B(2,1,1)$ y $C(0,1,-1)$

a) Halla la distancia del punto A a la recta r .

b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A , B y C .

MATEMÁTICAS II. 2023. JUNIO. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) La recta es: $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 \\ z = 1 - 2t \end{cases}$

El vector director de la recta $\vec{BC} = (-2, 0, -2)$ es el vector normal de un plano perpendicular a ella, luego: $-2x - 2z + D = 0$

Calculamos el que pasa por el punto A .

$$-2 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 + D = 0 \Rightarrow D = 4 \Rightarrow -2x - 2z + 4 = 0 \Rightarrow x + z - 2 = 0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano

$$x + z - 2 = 0 \Rightarrow 2 - 2t + 1 - 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{4}$$

Luego, el punto de corte es: $M = \left(2 - 2 \cdot \frac{1}{4}, 1, 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} \right) = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2} \right)$

La distancia que nos piden viene dada por el módulo del vector $\vec{AM} = \left(\frac{5}{2}, 0, -\frac{5}{2} \right)$, es decir:

$$|\vec{AM}| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + (0)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} u$$

b) Calculamos los vectores $\vec{AB} = (3, 0, -2)$ y $\vec{AC} = (1, 0, -4)$.

Hacemos el producto vectorial de los vectores:
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 10 \vec{j} = (0, 10, 0)$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2} \text{módulo}(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = \frac{1}{2} \sqrt{(0)^2 + (10)^2 + (0)^2} = 5 u^2$$

Considera los puntos $A(1, -2, 3)$ y $B(2, 0, -1)$.

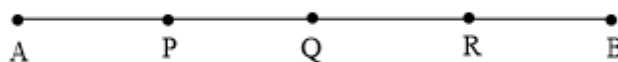
a) Halla los puntos que dividen al segmento AB en cuatro partes iguales.

b) Determina la ecuación del plano perpendicular al segmento AB y que pasa por el punto medio de dicho segmento.

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 1. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a)



El punto Q es el punto medio del segmento AB , luego:

$$Q = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{-2+0}{2}, \frac{3-1}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, -1, 1 \right)$$

El punto P es el punto medio del segmento AQ , luego: $P = \left(\frac{1+\frac{3}{2}}{2}, \frac{-2-1}{2}, \frac{3+1}{2} \right) = \left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{2}, 2 \right)$

El punto R es el punto medio del segmento QB , luego: $R = \left(\frac{\frac{3}{2}+2}{2}, \frac{-1+0}{2}, \frac{1-1}{2} \right) = \left(\frac{7}{4}, -\frac{1}{2}, 0 \right)$

b) El vector normal del plano es $\vec{AB} = (1, 2, -4)$, luego, la ecuación de todos los planos perpendiculares al segmento AB es: $x + 2y - 4z + D = 0$.

Como queremos el plano que pasa por el punto Q , se debe verificar que:

$$1 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 + D = 0 \Rightarrow D = \frac{9}{2}$$

Luego, el plano pedido es: $x + 2y - 4z + \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow 2x + 4y - 8z + 9 = 0$

Considera el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$ y la recta $r \equiv x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$. Halla la ecuación de un plano π' , paralelo a π , tal que si Q y Q' son respectivamente los puntos de corte de la recta r con los planos π y π' , entonces la distancia entre Q y Q' sea de 2 unidades.
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 1. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

π' tendrá de ecuación $\pi' \equiv x + y + z + D = 0$. Pasamos la recta a paramétricas

$$r \equiv x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = -1+2t \end{cases} \text{ y calculamos los puntos de corte con los planos}$$

$$1+t+2t-1+2t=0 \Rightarrow 5t=0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow Q=(1,0,-1)$$

$$1+t+2t-1+2t+D=0 \Rightarrow 5t=-D \Rightarrow t=-\frac{D}{5} \Rightarrow Q'=\left(\frac{4D}{5}, -\frac{2D}{5}, -\frac{7D}{5}\right)$$

Calculamos la distancia entre los dos puntos:

$$d=2=|\overline{QQ'}|=\sqrt{\frac{D^2}{25}+\frac{4D^2}{25}+\frac{49D^2}{25}}=\frac{5|D|}{5} \Rightarrow \begin{cases} 2=\frac{3D}{5} \Rightarrow D=\frac{10}{3} \Rightarrow 3x+3y+3z+10=0 \\ 2=\frac{-3D}{5} \Rightarrow D=-\frac{10}{3} \Rightarrow 3x+3y+3z-10=0 \end{cases}$$

Luego, el plano que nos piden es: $\pi' \equiv 3x+3y+3z+10=0$ ó $\pi' \equiv 3x+3y+3z-10=0$

Considera el plano π , determinado por los puntos $A(-1,0,0)$, $B(0,1,1)$ y $C(2,1,0)$, y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}.$$

Halla los puntos de r cuya distancia a π es $\sqrt{14}$ unidades.

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 2. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

El plano viene definido por el punto A y los vectores $\vec{AB} = (1,1,1)$; $\vec{AC} = (3,1,0)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 3 \\ y & 1 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = x - 3y + 2z + 1 = 0$$

Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$

Calculamos la distancia

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|3 + 2t - 3 \cdot (2 + t) + 2 \cdot t + 1|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{|t - 2|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |t - 2| = 14 \Rightarrow \begin{cases} t - 2 = 14 \Rightarrow t = 16 \\ -t + 2 = 14 \Rightarrow t = -12 \end{cases}$$

Luego, los puntos son: $(35, 18, 16)$ y $(-21, -10, -12)$

Considera el paralelogramo cuyos vértices consecutivos son los puntos $P(-1,2,3)$, $Q(-2,1,0)$, $R(0,5,1)$ y S .

a) Halla las coordenadas del punto S .

b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que contiene a los puntos P , Q y R .

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 2. EJERCICIO 8

RESOLUCIÓN

a) El punto medio de la diagonal PR es: $M = \left(\frac{-1+0}{2}, \frac{2+5}{2}, \frac{3+1}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 2 \right)$

El punto medio de la diagonal SQ , también es M , luego si llamamos $S(a,b,c)$, se tiene que cumplir:

$$M = \left(\frac{-2+a}{2}, \frac{1+b}{2}, \frac{0+c}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 2 \right) \Rightarrow S(1,6,4)$$

b) Calculamos los vectores $\vec{PQ} = (-1, -1, -3)$ y $\vec{PR} = (1, 3, -2)$, el vector normal del plano es:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (11, -5, -2)$$

La recta que nos piden es: $\frac{x}{11} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{-2}$

Determina el punto simétrico de $A(2, -4, -3)$ con respecto al plano que contiene a los puntos $B(1, 1, 2)$, $C\left(0, \frac{1}{3}, 1\right)$ y $D(-3, 0, 3)$.

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 3. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los vectores $\vec{BC} = \left(-1, -\frac{2}{3}, -1\right)$; $\vec{BD} = (-4, -1, 1)$. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -4 \\ y-1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ z-2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{5}{3}x + 5y - \frac{5}{3}z = 0 \Rightarrow x - 3y + z = 0$$

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular al plano

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z+3}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 2+t \\ y = -4-3t \\ z = -3+t \end{cases}$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano, sustituyendo la recta en la ecuación del plano

$$x - 3y + z = 0 \Rightarrow 2+t - 3(-4-3t) - 3+t = 0 \Rightarrow 11+11t = 0 \Rightarrow t = -1$$

luego, el punto es: $M = (2-1, -4+3, -3-1) = (1, -1, -4)$

Como el punto M es el punto medio del segmento AA' , si llamamos (a, b, c) a las coordenadas del punto A' , se debe verificar que:

$$\begin{aligned} \frac{2+a}{2} &= 1 \Rightarrow a = 0 \\ \frac{-4+b}{2} &= -1 \Rightarrow b = 2 \\ \frac{-3+c}{2} &= -4 \Rightarrow c = -5 \end{aligned}$$

Luego el simétrico es: $A' = (0, 2, -5)$

Dados los puntos $O(0,0,0)$, $A(2,-1,0)$, $B(3,0,x)$ y $C(-x,1,-1)$, los vectores $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ y $\vec{OC}$ determinan un paralelepípedo.

a) Calcula los posibles valores de x sabiendo que el volumen del paralelepípedo es 5 unidades cúbicas.

b) para $x=1$, halla el área de la cara del paralelepípedo que contiene a los vértices O , A y B .

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 3. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) El paralelepípedo viene definido por los vectores: $\vec{OA}=(2,-1,0)$, $\vec{OB}=(3,0,x)$ y $\vec{OC}=(-x,1,-1)$ y su volumen es:

$$V = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & x \\ -x & 1 & -1 \end{vmatrix} = |x^2 - 3 - 2x| = 5 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases} \\ -x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow \text{No tiene solución} \end{cases}$$

b) Calculamos los vectores $\vec{OA}=(2,-1,0)$ y $\vec{OB}=(3,0,1)$. El área de la cara viene dada por el módulo del vector producto vectorial de los vectores $\vec{OA}$ y $\vec{OB}$, luego:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\text{Área} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{14} \, u^2$$

Determina los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$ que son equidistantes de los planos cartesianos

OYZ y OXZ.

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 4. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$. Cualquier punto de la recta tiene

de coordenadas: $A = (1 - 3t, t, -1 + 4t)$.

La ecuación del plano OYZ es: $x = 0$ y la ecuación del plano OXZ es: $y = 0$

Aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\frac{|1 - 3t|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{|t|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} \Rightarrow |1 - 3t| = |t| \Rightarrow \begin{cases} 1 - 3t = t \Rightarrow t = \frac{1}{4} \\ 1 - 3t = -t \Rightarrow t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Luego, los puntos son: si $t = \frac{1}{4} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$; $t = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - 2z = -2 \end{cases}$

a) Determina la ecuación del plano paralelo a r que contiene a la recta $-x + 1 = y = \frac{z-3}{2}$

b) Calcula la distancia entre la recta r y el plano $2x + 5y + 3z = 41$.

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 4. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta r a paramétricas $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}t \\ y = -\frac{5}{3} + \frac{5}{3}t \\ z = t \end{cases}$

La recta r , viene definida por el punto $A = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, 0\right)$ y el vector director $\vec{u} = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1\right)$. La recta s , viene definida por el punto $(1, 0, 3)$ y el vector director.

El plano que nos piden viene definido por el punto B y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, luego su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -1 & \frac{2}{3} \\ y & 1 & \frac{5}{3} \\ z-3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7x + 7y - 7z + 28 = 0 \Rightarrow x - y + z - 4 = 0$$

b) Como la recta y el plano son perpendiculares, la distancia entre ambos es cero.

Considera los planos $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y = 2$.

a) Calcula la distancia entre la recta intersección de π_1 y π_2 y el punto $P(2, 6, -2)$.

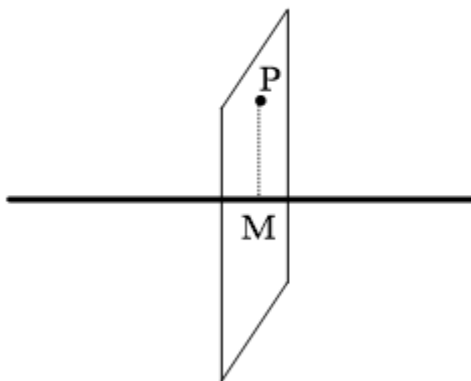
b) Halla el ángulo que forman π_1 y π_2 .

MATEMÁTICAS II. 2023. JULIO. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$

Calculamos la ecuación de un plano perpendicular a r y que pasa por P



El vector normal del plano es el vector director de la recta r , luego: $-x + y + 2z + D = 0$ y queremos que pase por el punto P , por lo tanto:

$$(-1) \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-2) + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow -x + y + 2z = 0$$

Calculamos el punto M de corte de la recta con el plano

$$-x + y + 2z = 0 \Rightarrow -(2 - t) + t + 2 \cdot (-2 + 2t) = 0 \Rightarrow 6t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Luego, $M = (1, 1, 0)$

La distancia vendrá dada por el módulo del vector $\overrightarrow{PM} = (-1, -5, 2)$

$$d = |\overrightarrow{PM}| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{30} = 5'47 \text{ u}$$

b) Los vectores normales de los planos son: $\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$ y $\vec{n}_2 = (1, 1, 0)$. Aplicando la fórmula del ángulo de dos planos, tenemos:

$$\cos \alpha = \frac{1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{0}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

Calcula el volumen del tetraedro que limita el plano determinado por los puntos $A(0,2,-2)$, $B(3,2,1)$ y $C(2,3,2)$ con los planos cartesianos.
MATEMÁTICAS II. 2023. JULIO. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la ecuación del plano que viene definido por el punto $A(0,2,-2)$ y los vectores $\vec{AB} = (3,0,3)$ y $\vec{AC} = (2,1,4)$.

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 2 \\ y-2 & 0 & 1 \\ z+2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x - 6y + 3z + 18 = 0 \Rightarrow x + 2y - z - 6 = 0$$

Calculamos los puntos de corte con los ejes coordenados

$$\text{Eje X} \Rightarrow x + 2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 6 = 0 \Rightarrow D(6,0,0)$$

$$\text{Eje Y} \Rightarrow 0 + 2 \cdot y - 1 \cdot 0 - 6 = 0 \Rightarrow E(0,3,0)$$

$$\text{Eje Z} \Rightarrow 0 + 2 \cdot 0 - 1 \cdot z - 6 = 0 \Rightarrow F(0,0,-6)$$

El tetraedro viene definido por los vectores: $\vec{OD} = (6,0,0)$, $\vec{OE} = (0,3,0)$ y $\vec{OF} = (0,0,-6)$ y su volumen es:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 18 \text{ u}^3$$