

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1
- Junio, Ejercicio 2
- Reserva 1, Ejercicio 1
- Reserva 1, Ejercicio 2
- Reserva 2, Ejercicio 1
- Reserva 2, Ejercicio 2
- Reserva 3, Ejercicio 1
- Reserva 3, Ejercicio 2
- Reserva 4, Ejercicio 1
- Reserva 4, Ejercicio 2
- Julio, Ejercicio 1
- Julio, Ejercicio 2

Considera la función continua f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{x^2}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Calcula a y b .

b) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f .

MATEMÁTICAS II. 2022. JUNIO. EJERCICIO 1

RESOLUCIÓN

a) Estudiamos la continuidad en $x = -1$:

1) $f(-1) = -a + b$

$$2) \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x} &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax + b) &= -a + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \Rightarrow -a + b = -1$$

Estudiamos la continuidad en $x = 1$:

1) $f(1) = a + b$

$$2) \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b) &= a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2}{x+1} \right) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{aligned} -a + b &= -1 \\ a + b &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{3}{4}; b = -\frac{1}{4}$$

b) La rama $\frac{1}{x}$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$, pero no está en su dominio ya que $x < -1$.

Calculamos la asíntota horizontal: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0 \Rightarrow y = 0$ es una asíntota horizontal.

La rama $\frac{x^2}{x+1}$ tiene una asíntota vertical en $x = -1$, pero no está en su dominio ya que $x \geq 1$

No tiene asíntota horizontal ya que: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{L'Hopital} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1} = \infty$

Calculamos la oblícua: $y = x - 1$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \frac{x^2}{x^2 + x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{L'Hopital} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x+1} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{L'Hopital} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1$$

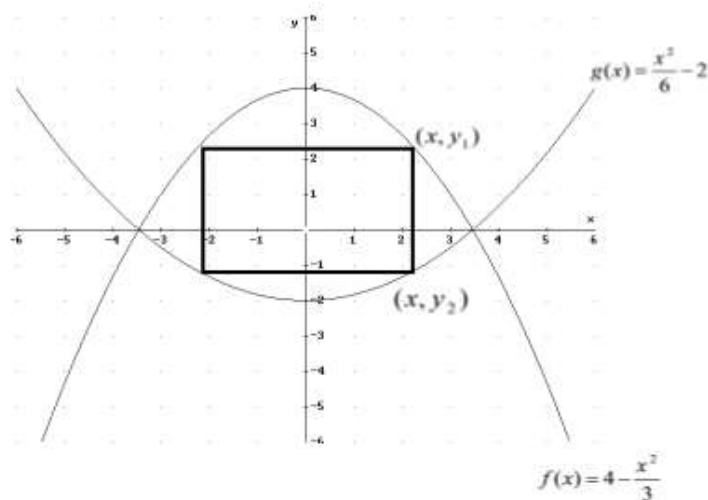
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x}{x+1} \right) = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{L'Hopital} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{1} = -1$$

De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas de las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 4 - \frac{x^2}{3}$ y $g(x) = \frac{x^2}{6} - 2$

MATEMÁTICAS II. 2022. JUNIO. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Dibujamos las dos parábolas que nos dan



En la figura vemos que:

la base del rectángulo es: $a = x + x = 2x$

la altura es: $b = y_1 - y_2 = \left(4 - \frac{x^2}{3}\right) - \left(\frac{x^2}{6} - 2\right) = 6 - \frac{x^2}{2}$

La función que queremos que sea máxima es: $S_{\max} = a \cdot b = 2x \cdot \left(6 - \frac{x^2}{2}\right) = 12x - x^3$

Derivamos e igualamos a cero: $S' = 12 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 2$. La solución $x = -2$ no sirve, ya que x es una longitud

Comprobamos que es un máximo: $S''(x) = -6x \Rightarrow S''(2) = -12 < 0 \Rightarrow$ Máximo

Luego, las dimensiones son:

la base del rectángulo es: $a = 2x = 4 \text{ u}$

la altura es: $b = y_1 - y_2 = \left(4 - \frac{2^2}{3}\right) - \left(\frac{2^2}{6} - 2\right) = \frac{8}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{12}{3} = 4 \text{ u}$

Sea f la función continua definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{ax+b}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

a) Determina a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$.

b) Para $a = 2$ y $b = -1$, estudia la derivabilidad de f .

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 1. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

a) Continua en $x = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+1}{x-1} &= \frac{1}{-1} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax+b}{(x+1)^2} &= \frac{b}{1} = b \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = -1$$

Extremo relativo en

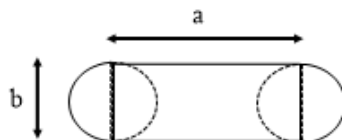
$$\begin{aligned} x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow f'(x) &= \frac{a \cdot (x+1)^2 - 2 \cdot (x+1) \cdot (ax+b)}{(x+1)^4} = \frac{a \cdot (x+1) - 2 \cdot (ax+b)}{(x+1)^3} \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(2) &= \frac{a \cdot 3 - 2 \cdot (2a-1)}{(2+1)^3} = 0 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

b) Calculamos la derivada

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2x-1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{2x(x-1) - 1(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2(x+1)^2 - 2(x+1)(2x-1)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1) - 2(2x-1)}{(x+1)^3} = \frac{-2x+4}{(x+1)^3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

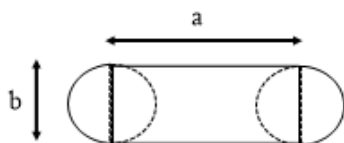
$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= -1 \\ f'(0^+) &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x = 0, \text{ luego, es derivable en } \mathbb{R} - \{0\}$$

Se quiere cercar un trozo de terreno como el de la figura, de modo que el área del recinto central rectangular sea de $\frac{200}{\pi}$ metros cuadrados. Sabiendo que el coste de la cerca que se puede poner en los tramos rectos es de 10 euros por metro lineal, y en los tramos circulares de 20 euros por metro lineal, calcula las dimensiones a y b del terreno para las que se minimiza el coste del cercado.



MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 1. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo: $C_{\min} = 2a \cdot 10 + 2\pi \frac{b}{2} \cdot 20 = 20a + 20\pi b$

b) Relación entre las variables: $a \cdot b = \frac{200}{\pi} \Rightarrow b = \frac{200}{a \cdot \pi}$

c) Expresamos la función que queremos que sea mínimo con una sola variable.

$$C_{\min} = 20a + 20\pi b = 20a + 20\pi \frac{200}{a \cdot \pi} = 20a + \frac{4000}{a}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$C'_{\min} = 20 - \frac{4000}{a^2} = \frac{20a^2 - 4000}{a^2} = 0 \Rightarrow 20a^2 - 4000 = 0 \Rightarrow a = \sqrt{200}$$

e) Comprobamos que corresponde a un mínimo

$$C'' = \frac{8000}{a^3} \Rightarrow C''(\sqrt{200}) = \frac{8000}{(\sqrt{200})^3} > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

Luego, las dimensiones son: $a = \sqrt{200} \text{ m} = 14'14 \text{ m}$; $b = \frac{200}{\sqrt{200} \cdot \pi} \text{ m} = 4'5 \text{ m}$

Sea f la función continua definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{ax + b} & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} & \text{si } 2 < x \end{cases}$

a) Calcula a y b .

b) Para $a = -1$ y $b = 4$, estudia si existe la derivada de f en $x = 2$. En caso afirmativo, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto.

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 2. EJERCICIO 1

RESOLUCIÓN

a) La función es continua, luego:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 2 &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{ax + b} &= \sqrt{b} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{b} = 2 \Rightarrow b = 4$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{ax + b} &= \sqrt{2a + 4} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} &= \frac{-2}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{2a + 4} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2a + 4 = 2 \Rightarrow a = -1$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{-x + 4} & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} & \text{si } 2 < x \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{-x + 4}} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(2^-) &= \frac{-1}{2\sqrt{-2 + 4}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ f'(2^+) &= \frac{-1}{2\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow \text{La función es derivable en } x = 2$$

Calculamos la recta tangente en $x = 2$: $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$

$$f(2) = \sqrt{-2 + 4} = \sqrt{2}$$

$$f'(2) = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Luego la recta tangente en } x = 2 \text{ es } y - \sqrt{2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ (donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .

b) Determina los intervalos de convexidad y de concavidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica.

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 2. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo f'	–	+
Función	D	C

La función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$. Tiene un mínimo en $(0, 0)$

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo f''	–	+	–
Función	Cn	Cx	Cn

La función es cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y convexa en $(-1, 1)$. Tiene puntos de inflexión en $(-1, \ln 2)$ y $(1, \ln 2)$

Calcula a y b sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \operatorname{sen}(x) + x \ln(x+1) + b x^2}{x^3 + x^2} = 2$ (donde $\ln$ denota la función

logaritmo neperiano)

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 3. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \operatorname{sen}(x) + x \ln(x+1) + b x^2}{x^3 + x^2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Aplicamos la regla de L'Hopital}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos(x) + 1 \cdot \ln(x+1) + x \cdot \frac{1}{x+1} + 2b x}{3x^2 + 2x} = \frac{a}{0} \Rightarrow$$

Como el límite es finito, entonces, $a = 0$ y podemos seguir aplicando la regla de L'Hopital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \ln(x+1) + x \cdot \frac{1}{x+1} + 2b x}{3x^2 + 2x} = \frac{\frac{1}{x+1} + \frac{1 \cdot (x+1) - 1 \cdot x}{(x+1)^2} + 2b}{6x + 2} = \frac{1+1+2b}{2} = 2 \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

Luego, los valores son: $a = 0$; $b = 1$

Sea $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, la función definida por $f(x) = e^x (\cos(x) + \operatorname{sen}(x))$

a) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan)

b) Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{3\pi}{2}$

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 3. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = e^x (\cos x + \operatorname{sen} x) + e^x (-\operatorname{sen} x + \cos x) = e^x \cdot 2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}$$

	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
Signo $f'(x)$	+	—	+
Función	C	D	C

La función es creciente en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ y decreciente en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

Tiene un Máximo relativo en $\left(\frac{\pi}{2}, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$ y un mínimo relativo en $\left(\frac{3\pi}{2}, -e^{\frac{3\pi}{2}}\right)$

Calculamos: $f(0) = 1$; $f(2\pi) = e^{2\pi} = 535'49$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} = 4'81$; $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -e^{\frac{3\pi}{2}} = -111'31$

Luego el máximo absoluto es $(2\pi, 535'49)$ y el mínimo absoluto es $\left(\frac{3\pi}{2}, -111'31\right)$

b) La ecuación de la recta tangente es: $y - f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$ y la ecuación de la recta normal es: $y - f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \cdot \left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

Calculamos $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -e^{\frac{3\pi}{2}} = -111'31$ y $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

Luego, la recta tangente es: $y + e^{\frac{3\pi}{2}} = 0 \cdot \left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow y = -e^{\frac{3\pi}{2}}$

La recta normal es: $y + e^{\frac{3\pi}{2}} = -\frac{1}{0} \cdot \left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

Sea f la función continua definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda x} - e^x - x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \mu & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

a) Calcula λ y μ .

b) Para $\lambda = 2$, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 4. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

a) Como la función es continua se cumple que:

$$f(0) = \mu$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda x} - e^x - x}{x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'Hopital} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda e^{\lambda x} - e^x - 1}{2x} = \frac{\lambda - 2}{0} \Rightarrow \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

Como es continua el límite tiene que existir, luego, $\lambda - 2 = 0$ para que podamos seguir aplicando L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda x} - e^x - x}{x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'Hopital} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda e^{\lambda x} - e^x - 1}{2x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'Hopital} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{2x} - e^x}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \mu \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda x} - e^x - x}{x^2} &= \frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mu = \frac{3}{2}$$

b) La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ es: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

Calculamos: $f(1) = \frac{e^2 - e - 1}{1} = e^2 - e - 1$

$$f'(x) = \frac{(2e^{2x} - e^x - 1) \cdot x^2 - 2x \cdot (e^2 - e^x - x)}{x^4} \Rightarrow f'(1) = \frac{(2e^2 - e - 1) - 2 \cdot (e^2 - e - 1)}{1} = e + 1$$

Sustituyendo, tenemos:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Rightarrow y - e^2 + e + 1 = (e + 1)(x - 1) \Rightarrow y - e^2 + e + 1 = ex - e + x - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = (e + 1)x + e^2 - 2e - 2$$

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{(x+2)^3}$, para $x \neq -2$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f .

b) Calcula la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 4. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{-2\}$.

Asíntotas Verticales: En principio es la recta $x = -2$. Vamos a comprobarlo

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{(x+2)^3} = \frac{6}{0^-} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{(x+2)^3} = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

Luego $x = -2$ es una asíntota vertical

Asíntota horizontal:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{(x+2)^3} &= \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{L'Hopital} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 6x}{3(x+2)^2} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{L'Hopital} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^2 - 6}{6(x+2)} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{L'Hopital} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24x}{6} = \infty \Rightarrow \text{No tiene} \end{aligned}$$

Asíntota oblicua: $y = x - 6$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^4 - 3x^2 + 2 - x^4 - 6x^3 - 12x^2 - 8x}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{-6x^3 - 15x^2 - 8x + 2}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} \right] = -6$$

b) La ecuación de la recta normal es: $y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x - 0)$

$$f(0) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = \frac{(4x^3 - 6x)(x+2)^3 - 3(x+2)^2(x^4 - 3x^2 + 2)}{(x+2)^6} = \frac{(4x^3 - 6x)(x+2) - 3(x^4 - 3x^2 + 2)}{(x+2)^4} \Rightarrow f'(0) = \frac{-6}{16} = -\frac{3}{8}$$

$$y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x - 0) \Rightarrow y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{-\frac{3}{8}}(x - 0) \Rightarrow y - \frac{1}{4} = \frac{8}{3}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{8}{3}x + \frac{1}{4}$$

Calcula a sabiendo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{(\ln(x))^3 + 2x} = 1$

(donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano)

MATEMÁTICAS II. 2022. JULIO. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{(\ln(x))^3 + 2x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Aplicamos la regla de L'Hopital}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{3(\ln(x))^2 \cdot \frac{1}{x} + 2} = \frac{a}{3 \cdot \infty \cdot \frac{1}{\infty} + 2} \quad \text{Pero como la función polinómica crece mucho más rápido que}$$

la función logarítmica, aunque esté al cuadrado, entonces:

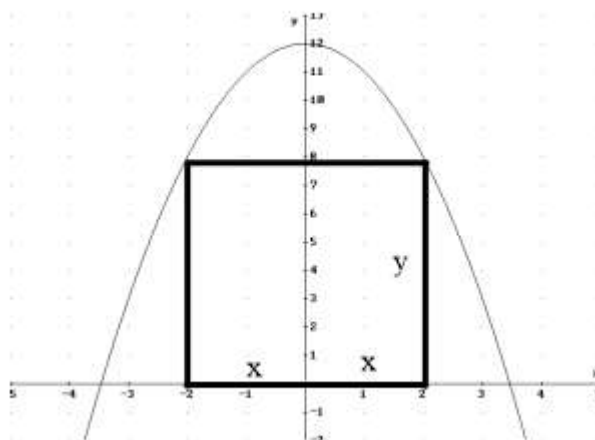
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{3(\ln(x))^2 \cdot \frac{1}{x} + 2} = \frac{a}{3 \cdot \infty \cdot \frac{1}{\infty} + 2} = \frac{a}{\frac{3}{\infty} + 2} = \frac{a}{0 + 2} = 1 \Rightarrow a = 2$$

Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima inscrito en el recinto limitado por la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 12$ y el eje de abscisas, y que tiene su base sobre dicho eje.

MATEMÁTICAS II. 2022. JULIO. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Hacemos un dibujo



a) La función que queremos que sea máxima es: $S_{\max} = 2x \cdot y$

b) Relación entre las variables: $y = -x^2 + 12$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\max} = 2x \cdot (-x^2 + 12) = -2x^3 + 24x$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S' = -6x^2 + 24 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{4} = \pm 2$$

La solución válida es $+2$ ya que es una longitud. Comprobamos que es máximo.

$$S'' = -12x \Rightarrow S''(2) = -24 < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

Luego, las dimensiones son: $\text{base} = 2x = 4 \text{ u}$; $\text{altura} = y = 8 \text{ u}$

El área es: $S_{\max} = 2x \cdot y = 2 \cdot 2 \cdot 8 = 32 \text{ u}^2$

Los vértices son: $(2, 0)$; $(-2, 0)$; $(2, 8)$; $(-2, 8)$