

**MATEMÁTICAS II**

**TEMA 5: INTEGRALES**

- Junio, Ejercicio 3
- Junio, Ejercicio 4
- Reserva 1, Ejercicio 3
- Reserva 1, Ejercicio 4
- Reserva 2, Ejercicio 3
- Reserva 2, Ejercicio 4
- Reserva 3, Ejercicio 3
- Reserva 3, Ejercicio 4
- Reserva 4, Ejercicio 3
- Reserva 4, Ejercicio 4
- Julio, Ejercicio 3
- Julio, Ejercicio 4

Considera la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x|x-1|$ . Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de dicha función y su recta tangente en el punto de abscisa  $x=0$ .  
**MATEMÁTICAS II. 2023. JUNIO. EJERCICIO 3**

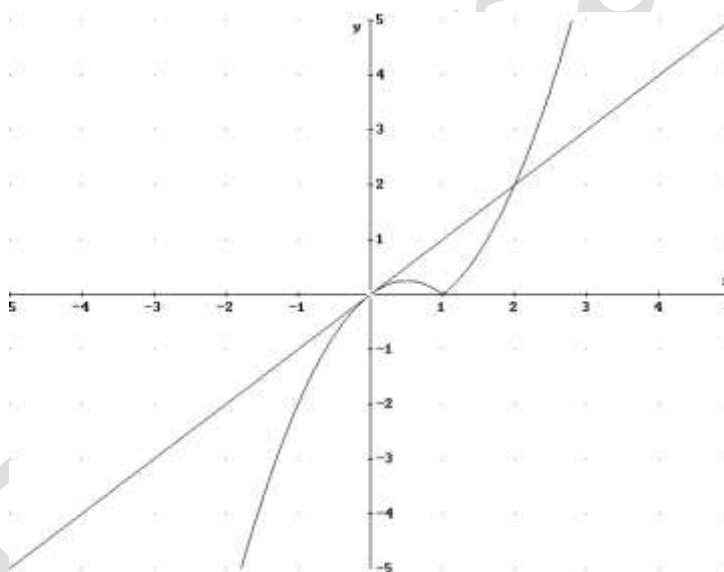
### R E S O L U C I Ó N

Abrimos la función  $f(x) = x|x-1| = \begin{cases} x(-x+1) = -x^2 + x & \text{si } x \leq 1 \\ x(x-1) = x^2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calculamos la recta tangente en  $x=0$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(x) = -2x + 1 \Rightarrow f'(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Rightarrow y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = x$$

y hacemos el dibujo.



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - x \\ y = x \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 2$$

Calculamos el área que nos piden

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_0^1 [x - (-x^2 + x)] dx + \int_1^2 [x - (x^2 - x)] dx = \\ &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (-x^2 + 2x) dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[ -\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_1^2 = \frac{1}{3} + \left( -\frac{8}{3} + 4 \right) - \left( -\frac{1}{3} + 1 \right) = 1 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Considera la función  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:  $F(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$ . Calcula  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot F(x)}{\sin(x^2)}$ .

**MATEMÁTICAS II. 2023. JUNIO. EJERCICIO 4**

### R E S O L U C I Ó N

$$F(0) = \int_0^0 \sin(t^2) dt = 0$$

Según el teorema fundamental del cálculo integral, si  $f(x)$  es continua en  $[a, b]$ , la función  $F(x)$  definida por:  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  con  $x \in [a, b]$  es derivable y ocurre que:

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow F''(x) = f'(x)$$

En nuestro caso:  $F'(x) = \sin(x^2) \Rightarrow F''(x) = 2x \cdot \cos(x^2)$ , luego:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot F(x)}{\sin(x^2)} &= \frac{0}{0} \xrightarrow{L'Hopital} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot F(x) + x \cdot F'(x)}{2x \cdot \cos(x^2)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'Hopital} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x) + F'(x) + x \cdot F''(x)}{2 \cdot \cos(x^2) - 4x^2 \cdot \sin(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) + \sin(x^2) + x \cdot 2x \cdot \cos(x^2)}{2 \cdot \cos(x^2) - 4x^2 \cdot \sin(x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin(x^2) + 2x^2 \cdot \cos(x^2)}{2 \cdot \cos(x^2) - 4x^2 \cdot \sin(x^2)} = \frac{0+0}{2-0} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

Calcula  $\int_6^{12} \frac{dx}{9-x^2}$

**MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 1. EJERCICIO 3**

**R E S O L U C I Ó N**

Las raíces del denominador son:  $x = 3$  ;  $x = -3$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{9-x^2} = \frac{-1}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-3)}{x^2-9}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular  $A$ ,  $B$  y  $C$  sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$x = 3 \Rightarrow -1 = 6A \Rightarrow A = -\frac{1}{6}$$

$$x = -3 \Rightarrow -1 = -6B \Rightarrow B = \frac{1}{6}$$

Con lo cual:

$$\begin{aligned} \int_6^{12} \frac{1}{x^2-9} dx &= \int_6^{12} \frac{-\frac{1}{6}}{x-3} dx + \int_6^{12} \frac{\frac{1}{6}}{x+3} dx = \left[ -\frac{1}{6} \ln(x-3) + \frac{1}{6} \ln(x+3) \right]_6^{12} = \\ &= \left( -\frac{1}{6} \ln(12-3) + \frac{1}{6} \ln(12+3) \right) - \left( -\frac{1}{6} \ln(6-3) + \frac{1}{6} \ln(6+3) \right) = \\ &= -\frac{1}{6} \ln 9 + \frac{1}{6} \ln 15 + \frac{1}{6} \ln 3 - \frac{1}{6} \ln 9 = \frac{1}{6} (-\ln 9 + \ln 15 + \ln 3 - \ln 9) = \frac{1}{6} (\ln 45 - 2 \ln 9) = \frac{1}{6} \ln \frac{45}{81} = \frac{1}{6} \ln \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Considera la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2 + 1$

a) Determina el punto de la gráfica de  $f$  en el que la recta tangente es  $y = 4x - 3$ .

b) Haz un esbozo del recinto limitado por la gráfica de  $f$ , la recta  $y = 4x - 3$  y el eje de ordenadas. Calcula el área del recinto indicado.

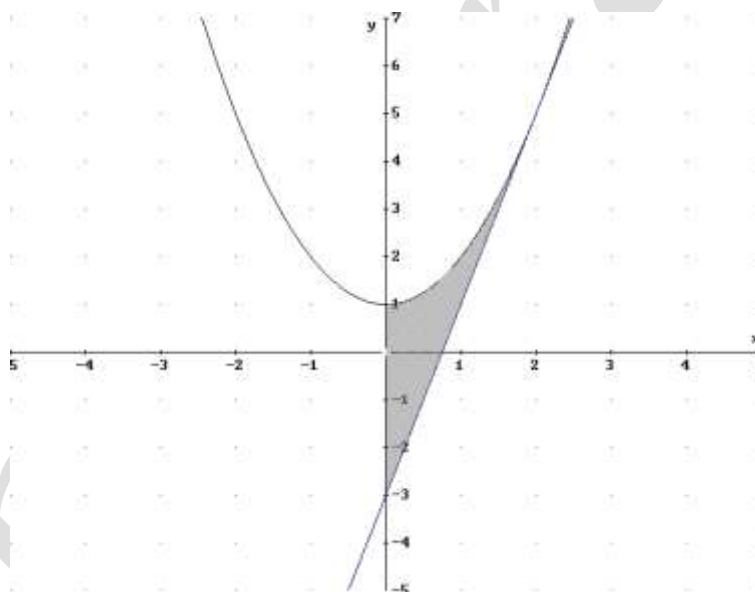
**MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 1. EJERCICIO 4**

## RESOLUCIÓN

a) Calculamos la derivada de la función:  $f(x) = x^2 + 1$

$$f'(x) = 2x = m = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \text{el punto es: } (2, 5)$$

b) Hacemos el dibujo



El área que nos piden es:

$$A = \int_0^2 [(x^2 + 1) - (4x - 3)] dx = \int_0^2 [x^2 - 4x + 4] dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x \right]_0^2 = \left( \frac{8}{3} - 8 + 8 \right) - 0 = \frac{8}{3} u^2$$

Sabiendo que  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:  $F(x) = e^{x^2}$  es una primitiva de  $f$ .

a) Comprueba que  $f$  es creciente.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función  $f$ , el eje de abscisas y la recta  $x = 1$ .

**MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 2. EJERCICIO 3**

### R E S O L U C I Ó N

Como  $F(x)$  es una primitiva de  $f(x)$ , entonces:  $f(x) = F'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$

Calculamos la derivada de  $f(x)$

$$f'(x) = 2 \cdot e^{x^2} + 2x \cdot 2x \cdot e^{x^2} = e^{x^2} (2 + 4x^2) = 0 \Rightarrow 2 + 4x^2 = 0 \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

Luego, será creciente o decreciente en su dominio.

$$f'(0) = e^0 (2 + 4 \cdot 0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Creciente en su dominio}$$

b) Calculamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas

$$f(x) = 2x \cdot e^{x^2} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Luego, el área que nos piden es:

$$A = \int_0^1 2x \cdot e^{x^2} dx = \left[ e^{x^2} \right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1 \text{ u}^2$$

Considera la función  $f(x):[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$  definida por  $f(x)=\cos(\sqrt{x})$ . Calcula, si es posible, una primitiva de  $f$  cuya gráfica pase por el punto  $(0,5)$ . Sugerencia: haz el cambio  $\sqrt{x}=t$

**MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 2. EJERCICIO 4**

### R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular cuánto vale  $dx$ :

$$\sqrt{x}=t\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt\Rightarrow dx=2t\,dt$$

Hacemos la integral por partes. Sustituyendo, nos queda:

$$\int 2t \cdot \cos t \, dt = 2t \cdot \sin t - \int 2 \sin t \, dt = 2t \cdot \sin t + 2 \cos t + C = 2\sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + C$$

$$\begin{aligned} u &= 2t; \, du = 2 \, dt \\ dv &= \cos t \, dt; \, v = \sin t \end{aligned}$$

$$\text{Como: } F(0) = 5 \Rightarrow 2 \cdot 0 \cdot \sin 0 + 2 \cos 0 + C = 5 \Rightarrow C = 3$$

$$\text{Luego: } F(x) = 2\sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + 3$$

Determina la función  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , sabiendo que es dos veces derivable, su gráfica pasa por el punto  $(1, 0)$ ,  $f'(e) = e$  y  $f''(x) = 2\ln(x) + 1$ , para todo  $x > 0$  ( $\ln$  denota la función logaritmo neperiano).

**MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 3. EJERCICIO 3**

### R E S O L U C I Ó N

$$f'(x) = \int (2\ln x + 1) dx = 2 \int \ln x dx + \int dx = 2(x \ln x - x) + x = 2x \ln x - x + C$$

Hacemos por partes la integral de  $\ln x$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

$$\begin{aligned} u &= \ln x; du = \frac{1}{x} dx \\ dv &= dx; v = x \end{aligned}$$

Como  $f'(e) = e \Rightarrow 2e \cdot \ln e - e + C = e \Rightarrow C = 0$

$$f(x) = \int 2x \ln x - x dx = 2 \int x \ln x dx - \int x dx$$

Hacemos por partes la integral de  $x \ln x$

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$$

$$\begin{aligned} u &= \ln x; du = \frac{1}{x} dx \\ dv &= x dx; v = \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Luego: } f(x) = 2 \int x \ln x dx - \int x dx = 2 \left( \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) - \frac{x^2}{2} + D$$

$$\text{Como pasa por el punto } (1, 0), \text{ tenemos que: } f(1) = 0 \Rightarrow 2 \left( \frac{1^2}{2} \ln 1 - \frac{1^2}{4} \right) - \frac{1^2}{2} + D = 0 \Rightarrow D = 1$$

$$\text{La función que nos piden es: } f(x) = 2 \left( \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) - \frac{x^2}{2} + 1 = x^2 \ln x - x^2 + 1$$

Considera las funciones  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $f(x) = |x^2 - 1|$  y  $g(x) = x + 5$ .

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones y esboza el recinto que determinan.

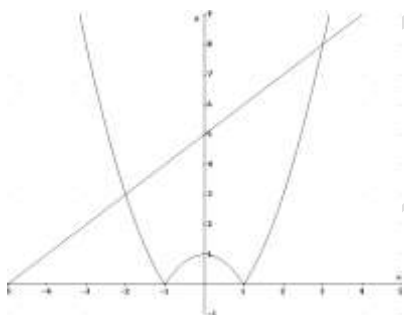
b) Determina el área del recinto anterior.

**MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 3. EJERCICIO 4**

### R E S O L U C I Ó N

a) Dibujamos la función  $g(x) = x + 5$  que es una recta, haciendo una tabla de valores. Abrimos la

$$\text{función } f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \text{ y hacemos el dibujo.}$$



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 1 \\ g(x) = x + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 1 = x + 5 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 ; x = -2$$

Luego, los puntos de corte son el  $(-2, 3)$  y  $(3, 8)$

b) Calculamos el área que nos piden

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{-1} [(x+5) - (x^2-1)] dx + \int_{-1}^1 [(x+5) - (-x^2+1)] dx + \int_1^3 [(x+5) - (x^2-1)] dx = \\ &= \int_{-2}^{-1} (-x^2 + x + 6) dx + \int_{-1}^1 (x^2 + x + 4) dx + \int_1^3 (-x^2 + x + 6) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^{-1} + \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x \right]_{-1}^1 + \\ &+ \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_1^3 = \left( -\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 6(-1) \right) - \left( -\frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} + 6(-2) \right) + \\ &+ \left( \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 4 \cdot 1 \right) - \left( \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 4 \cdot (-1) \right) + \left( -\frac{(3)^3}{3} + \frac{(3)^2}{2} + 6 \cdot 3 \right) - \left( -\frac{(1)^3}{3} + \frac{(1)^2}{2} + 6(1) \right) = \\ &= -\frac{31}{6} - \left( -\frac{22}{3} \right) + \frac{29}{6} - \left( -\frac{23}{6} \right) + \frac{27}{2} - \frac{37}{6} = \frac{109}{6} u^2 \end{aligned}$$

Calcula una primitiva de la función  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \arctg(\sqrt{x})$  cuya gráfica pase por el punto  $(0,1)$  ( $\arctg$  denota la función arco tangente). Sugerencia: efectúa el cambio  $x = t^2$ .

**MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 4. EJERCICIO 3**

### R E S O L U C I Ó N

$$x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$$

$$F(x) = \int \arctg(\sqrt{x}) dx = \int \arctg t \cdot 2t dt = 2 \int t \arctg t dt$$

Calculamos la integral por partes

$$\begin{aligned} F(t) &= \int t \arctg t dt = \frac{t^2}{2} \arctg t - \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{1+t^2} dx = \frac{t^2}{2} \arctg t - \frac{1}{2} \left[ \int 1 dt + \int \frac{-1}{1+t^2} dt \right] = \\ &= \frac{t^2}{2} \arctg t - \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \arctg t + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \arctg t; du = \frac{1}{1+t^2} dt \\ dv &= t dt; v = \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

$$F(x) = 2 \left[ \frac{t^2}{2} \arctg t - \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \arctg t \right] = t^2 \arctg t - t + \arctg t = x \arctg \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctg \sqrt{x} + C$$

Calculamos el valor de la constante  $C$ .

$$F(0) = 0 \cdot \arctg \sqrt{0} - \sqrt{0} + \arctg \sqrt{0} + C = 1 \Rightarrow C = 1$$

Luego, la primitiva que nos piden es:  $F(x) = x \arctg \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctg \sqrt{x} + 1$

Considera la función  $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \ln(x+1)$ , donde  $\ln$  denota la función logaritmo neperiano. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de  $f$ , el eje de abscisas y la recta  $x = e - 1$ .

**MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 4. EJERCICIO 4**

### R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral  $I_1 = \int \ln(x+1) dx$ , que es una integral por partes.

$$\begin{aligned} u &= \ln(x+1); \quad du = \frac{1}{x+1} dx \\ dv &= dx; \quad v = x \end{aligned}$$

$$I_1 = \int \ln(x+1) dx = x \cdot \ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1} dx = x \cdot \ln(x+1) - I_2$$

La integral  $I_2 = \int \frac{x}{x+1} dx$  es una integral racional

$$I_2 = \int \frac{x}{x+1} dx = \int \left( 1 + \frac{-1}{x+1} \right) dx = x - \ln(x+1)$$

Sustituyendo, nos queda:  $I_1 = \int \ln(x+1) dx = x \cdot \ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1} dx = x \cdot \ln(x+1) - x + \ln(x+1)$

Una vez que hemos calculado la integral indefinida, ahora resolvemos la que nos proponía el problema.

$$A = \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx = \left[ x \cdot \ln(x+1) - x + \ln(x+1) \right]_0^{e-1} = 1 \text{ u}^2$$

Calcula  $a$  con  $0 < a < 1$ , tal que  $\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x} dx + 2 = 0$  ( $\ln$  denota la función logaritmo neperiano).

**MATEMÁTICAS II. 2023. JULIO. EJERCICIO 3**

### R E S O L U C I Ó N

Calculamos la expresión que nos dan

$$\begin{aligned} \int_a^1 \frac{\ln x}{x} dx + 2 = 0 &\Rightarrow \left[ \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_a^1 + 2 = 0 \Rightarrow \frac{(\ln 1)^2}{2} - \frac{(\ln a)^2}{2} + 2 = 0 \Rightarrow -\frac{(\ln a)^2}{2} + 2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\ln a)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} \ln a = 2 \Rightarrow a = e^2 \\ \ln a = -2 \Rightarrow a = e^{-2} \end{cases} \end{aligned}$$

Como  $0 < a < 1$ , el valor de  $a$  es:  $a = e^{-2}$

Considera las funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(x) = 5 - x^2$  y  $g(x) = \frac{4}{x^2}$

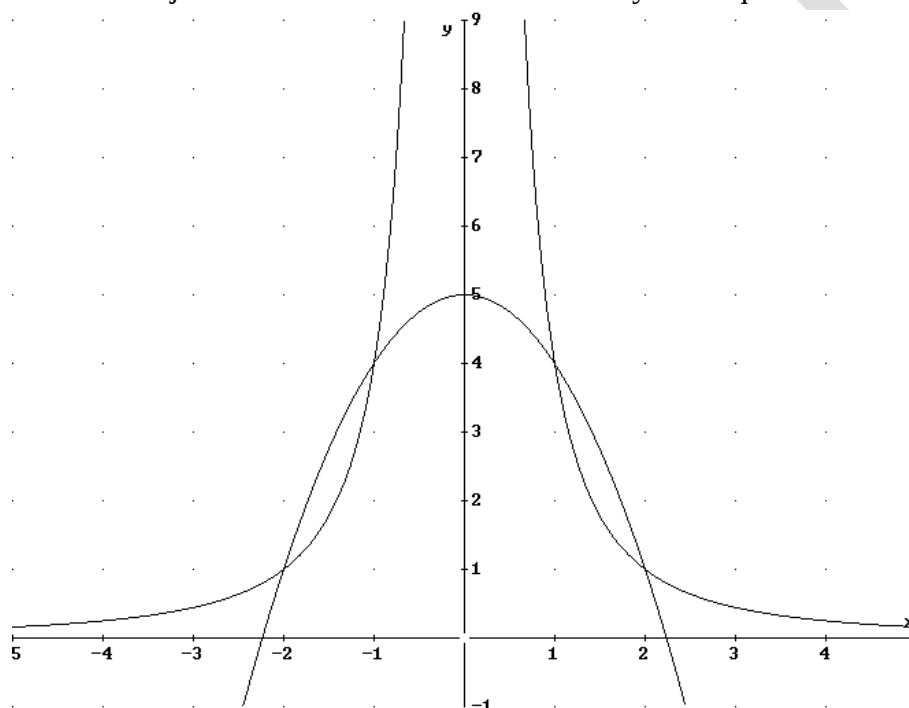
a) Esboza las gráficas de las dos funciones y calcula los puntos de corte entre ellas.

b) Calcula la suma de las áreas de los recintos limitados por las gráficas de  $f$  y  $g$ .

**MATEMÁTICAS II. 2023. JULIO. EJERCICIO 4**

### R E S O L U C I Ó N

a) La función  $f(x) = 5 - x^2$  es una parábola fácil de dibujar. La función  $g(x) = \frac{4}{x^2}$  es una hipérbola, la podemos dibujar dando 3 ó 4 valores a la derecha y a la izquierda de 0.



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones

$$5 - x^2 = \frac{4}{x^2} \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Es una ecuación bicuadrada.

$$t = x^2 \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} t = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ t = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Vemos que las dos funciones se cortan en los puntos  $(-2, 1)$ ,  $(-1, 4)$ ,  $(1, 4)$  y  $(2, 1)$

b) Como vemos en el dibujo el área de las dos regiones son iguales, luego el área pedida es:

$$A = 2 \int_1^2 \left( 5 - x^2 - \frac{4}{x^2} \right) dx = 2 \cdot \left[ 5x - \frac{x^3}{3} + \frac{4}{x} \right]_1^2 = 2 \cdot \left[ \left( 10 - \frac{8}{3} + 2 \right) - \left( 5 - \frac{1}{3} + 4 \right) \right] = \frac{4}{3} u^2$$