

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} 5^{3x-2y} = 3125 \\ 11^{6x-7y} = 14641 \end{array} \right\}$$

Es una ecuación exponencial porque la incógnita se encuentra en el exponente.

Descomponemos 3125 y 14641 en factores primos y aplicamos las reglas de la potenciación:

$$3125 = 5^5$$

$$14641 = 11^4$$

Luego las ecuaciones quedan:

$$\left. \begin{array}{l} 5^{3x-2y} = 5^5 \\ 11^{6x-7y} = 11^4 \end{array} \right\}$$

Las ecuaciones finales son:

$$3x - 2y = 5 \text{ la multiplicamos por } (-2)$$

$$6x - 7y = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} -6x + 4y = -10 \\ 6x - 7y = 4 \end{array} \right\}$$

Sumamos ambas ecuaciones:

$$-6x + 6x + 4y - 7y = -10 + 4$$

$$-3y = -6$$

$$y = \frac{-6}{-3} = 2$$

Sustituyendo su valor en

$$3x - 2y = 5$$

$$3x - 2 \cdot 2 = 5$$

$$3x = 5 + 4$$

$$x = \frac{9}{3} = 3$$

La solución del sistema de ecuaciones es

$$y = 2$$

$$x = 3$$

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$2^{x+y} = 128$$

$$\log x + \log y = 1$$

$$2^{x+y} = 128$$

$$\log x + \log y = 1$$

Hacemos la descomposición factorial de 128

$$128 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7$$

Podemos poner:

$$2^{x+y} = 2^7 \quad \text{ecuación 1}$$

$$\log(xy) = \log 10 \quad \text{ecuación 2}$$

En la ecuación 1 ponemos:

$$x + y = 7 \quad \text{ecuación 3}$$

En la ecuación 2 podemos eliminar logaritmos

$$xy = 10 \quad \text{ecuación 4}$$

En la ecuación 3 despejamos x, y sustituimos su valor en la ecuación 4:

$$x = 7 - y$$

$$(7 - y)y = 10$$

$$7y - y^2 = 10$$

$$y^2 - 7y + 10 = 0$$

$$y = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} =$$

$$y_1 = \frac{7 + 3}{2} = \frac{10}{2} = \mathbf{5 \text{ solución válida}}$$

$$y_2 = \frac{7 - 3}{2} = \frac{4}{2} = \mathbf{2 \text{ solución válida}}$$

Para  $y=5$

$$x = 7 - y = 7 - 5 = \mathbf{2 \text{ solución válida}}$$

Para  $y=2$

$$x = 7 - y = 7 - 2 = \mathbf{5 \text{ solución válida}}$$

Resolver el sistema:

$$64^{2x} + 64^{2y} = 12$$

$$64^{x+y} = 4\sqrt{2}$$

$$64^{2x} + 64^{2y} = 12$$

$$64^{x+y} = 4\sqrt{2}$$

Operando:

$$(64^x)^2 + (64^y)^2 = 12 \text{ ecuación 1}$$

$$64^x \cdot 64^y = 4\sqrt{2} \text{ ecuación 2}$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$64^x = a$$

$$64^y = b$$

Quedando las ecuaciones 1y 2:

$$a^2 + b^2 = 12 \text{ ecuación 3}$$

$$a \cdot b = 4\sqrt{2} \text{ ecuación 4}$$

Despejando a de la ecuación 4

$$a = \frac{4\sqrt{2}}{b}$$

Sustituyendo el valor de a en la ecuación 3:

$$\left(\frac{4\sqrt{2}}{b}\right)^2 + b^2 = 12$$

$$\frac{16.2}{b} + b^2 = 12$$

$$32 + b^4 = 12b^2$$

$$b^4 - 12b^2 + 32 = 0 \text{ ecuación 5}$$

Al ser una ecuación bicuadrada hacemos un nuevo cambio de variable:

$$b^4 = c^2$$

$$b^2 = c$$

Luego la ecuación 5 queda:

$$c^2 - 12c + 32 = 0 \text{ ecuación 6}$$

$$c = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 128}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{12 \pm 4}{2}$$

$$c_1 = \frac{12 + 4}{2} = \frac{16}{2} = \mathbf{8}$$

$$c_2 = \frac{12 - 4}{2} = \frac{8}{2} = \mathbf{4}$$

Para  $c = 8$ , calculamos los valores de  $a$  y  $b$

$$b^2 = c$$

$$b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$a = \frac{4\sqrt{2}}{b} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2$$

Ahora deshacemos el cambio de variable inicial:

$$64^x = a$$

$$64^y = b$$

Para

$$a = 2$$

$$b = 2\sqrt{2}$$

Calculamos x:

$$64^x = a$$

$$2^{6x} = 2^1$$

Por tanto

$$6x = 1$$

$$x = \frac{1}{6} \text{ solución válida}$$

Calculamos y:

$$64^y = b$$

$$2^{6y} = 2\sqrt{2}$$

$$2^{6y} = 2^1 \cdot 2^{1/2} = 2^{3/2}$$

Por tanto

$$6y = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \text{ solución válida}$$

Para  $c = 4$ , calculamos los valores de a y b

$$b^2 = c$$

$$b = \sqrt{4} = 2$$

$$a = \frac{4\sqrt{2}}{b} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Estas soluciones son igualmente válidas como en el caso anterior

Salvo que cambiando el valor de x e y

$$x = \frac{1}{4} \text{ solución válida}$$

$$y = \frac{1}{6} \text{ solución válida}$$