

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[3]{2^{\frac{2x-y}{5}}} = 8 \\ \sqrt{3^{\frac{x-y}{3}}} = 81 \end{array} \right\}$$

Es una ecuación exponencial porque la incógnita se encuentra en el exponente.

Aplicamos las reglas de la potenciación y radicación:

$$\sqrt[3]{2^{\frac{2x-y}{5}}} = 2^3 \quad \sqrt{3^{\frac{x-y}{3}}} = 81$$

$$2^{\frac{2x-y}{5.3}} = 2^3 \quad 3^{\frac{x-y}{3.2}} = 3^4$$

$$\frac{2x-y}{5.3} = 3 \quad \frac{x-y}{3.2} = 4$$

Luego las ecuaciones son:

$$2x - y = 45$$

$$x - y = 24 \text{ la multiplicamos por } -2$$

$$2x - y = 45$$

$$-2x + 2y = -48$$

Sumando ambas tenemos

$$2x - 2x - y + 2y = 45 - 48$$

$$\mathbf{y = -3}$$

Sustituimos su valor en

$$x - y = 24$$

$$x - (-3) = 24$$

$$x + 3 = 24$$

$$\mathbf{x = 21}$$

Luego las soluciones son:

$$\mathbf{x = 21}$$

$$\mathbf{y = -3}$$

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$5^{3x-2y} = 3125$$

$$11^{6x-7y} = 14641$$

$$5^{3x-2y} = 3125$$

$$11^{6x-7y} = 14641$$

Hacemos la descomposición factorial de 3125 y 14641

$$3125 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5$$

$$14641 = 11 \times 11 \times 11 \times 11 = 11^4$$

Podemos poner:

$$5^{3x-2y} = 5^5 \text{ ecuación 1}$$

$$11^{6x-7y} = 11^4 \text{ ecuación 2}$$

En la ecuación 1 ponemos:

$$3x - 2y = 5 \text{ ecuación 3}$$

En la ecuación 2 ponemos:

$$6x - 7y = 4 \text{ ecuación 4}$$

En la ecuación 3 despejamos x, y sustituimos su valor en la ecuación 4:

$$3x = 5 + 2y$$

$$10 + 4y - 7y = 4$$

$$-3y = 4 - 10 = -6$$

$$-3y = -6$$

$$y = \frac{6}{3} = 2 \text{ solución válida}$$

Para $y=2$

$$3x = 5 + 2y$$

$$x = \frac{5 + 4}{3} = 3 \text{ solución válida}$$

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$5^{2^y} - 2^{4+3^x} = 497$$

$$5^{2+2^y} + 3^z = 15652$$

$$2^{3^x} + 3^{1+z} = 89$$

$$5^{2^y} - 2^{4+3^x} = 497 \text{ ecuación1}$$

$$5^{2+2^y} + 3^z = 15652 \text{ ecuación2}$$

$$2^{3^x} + 3^{1+z} = 89 \text{ ecuación3}$$

Operando sobre las tres ecuaciones ponemos:

$$5^{2^y} - (2^4 \cdot 2^{3^x}) = 497 \text{ ecuación1}$$

$$(5^2 \cdot 5^{2^y}) + 3^z = 15652 \text{ ecuación2}$$

$$2^{3^x} + (3 \cdot 3^z) = 89 \text{ ecuación3}$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$2^{3^x} = a$$

$$5^{2^y} = b$$

$$3^z = c$$

Así tenemos:

$$b - (2^4 \cdot a) = 497 \text{ ecuación 4}$$

$$(25 \cdot b) + c = 15652 \text{ ecuación 5}$$

$$a + (3 \cdot c) = 89 \text{ ecuación 6}$$

ordenando:

$$16a - b = -497 \text{ ecuación 7}$$

$$25b + c = 15652 \text{ ecuación 8}$$

$$a + 3c = 89 \text{ ecuación 9}$$

Tomando 7 y 8, y multiplicando la 7 por 25

$$400a - 25b = -12425 \text{ ecuación 10}$$

$$25b + c = 15652 \text{ ecuación 8}$$

Sumando la ecuación 8 y la 10 tenemos:

$$400a + c = 3227 \text{ ecuación 11}$$

Tomando la 9 y la 11, y multiplicando la 11 por -3

$$a + 3c = 89 \text{ ecuación 9}$$

$$-1200a - 3c = -9681 \text{ ecuación 11}$$

Sumando la ecuación 9 y la 11

$$-1199a = -9592$$

$$a = \frac{-9592}{-1199} = 8$$

Sustituyo el valor de a en la ecuación 9

$$a + 3c = 89 \text{ ecuación 9}$$

$$8 + 3c = 89$$

$$3c = 81$$

$$c = \frac{81}{3} = \mathbf{27}$$

Sustituyo el valor de c en la ecuación 8

$$25b + c = 15652 \text{ ecuación 8}$$

$$25b + 27 = 15652$$

$$b = \frac{15652 - 27}{25} = \mathbf{625}$$

Una vez obtenidos los valores de a, b y c, los sustituimos en

$$2^{3^x} = a$$

$$5^{2^y} = b$$

$$3^{z^z} = c$$

Así, para a=8

$$2^{3^x} = 8 = 2^3$$

$$3^x = 3^1$$

Luego

$$x = \mathbf{1}$$

Así, para $b=625$

$$5^{2^y} = 625 = 5^4$$

$$2^y = 4 = 2^2$$

Luego

$$\mathbf{y = 2}$$

Así, para $c=27$

$$3^z = 27 = 3^3$$

Luego

$$\mathbf{z = 3}$$