Resolver

$4^{x} - 5 \cdot 2^{x} + 4 = 0$

$4^{x} - 5 \cdot 2^{x} + 4 = 0$

$(2^{2})^{x} - 5 \cdot 2^{x} + 4 = 0$

$2^{2x} - 5 \cdot 2^{x} + 4 = 0$

$2^{x} \cdot 2^{x} - 5 \cdot 2^{x} + 4 = 0$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$2^{x} = t$

$t^{2} - 5t + 4 = 0$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$t_1 = \frac{5 + 3}{2} = 4$$

$$t_2 = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

Por tanto,

Para t_1= 4

$2^{x} = 4$

$2^{x} = 2^{2}$

$\mathbf{x = 2 \quad 1^{a}\ solución}$

Para t_2= 1

$2^{x} = 1$

$2^{x} = 2^{0}$ $\qquad$ $\mathbf{x = 0 \quad 2^{a}\ solución}$

Resolver

$7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} + 1 = 0$

$7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} + 1 = 0$

$7^{2x} \cdot 7^3 - 8 \cdot 7^x \cdot 7 + 1 = 0$

$7^x \cdot 7^x \cdot 7^3 - 8 \cdot 7^x \cdot 7 + 1 = 0$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$7^x = t$

$343t^2 - 56t + 1 = 0$

$$t = \frac{56 \pm \sqrt{3136 - 1372}}{686} = \frac{56 \pm \sqrt{1764}}{686} = \frac{56 \pm 42}{686}$$

$$t_1 = \frac{56 + 42}{686} = \frac{1}{7}$$

$$t_2 = \frac{56 - 42}{686} = \frac{1}{49}$$

Por tanto,

Para t_1= 1/7

$$7^x = \frac{1}{7}$$

$7^x = 7^{-1}$

$\mathbf{x = -1 \quad 1^{a}\ solución}$

Para t_2= 1/49

$$7^x = \frac{1}{49}$$

$7^x = 7^{-2}$

$\mathbf{x = -2 \quad es\ la\ \ 2^{a}\ solución}$

Resolver

$2^{2x} + (-2)^{x+1} = 2^{x+1}$

$x \in N$

$2^{2x} + (-2)^{x+1} = 2^{x+1}$

$2^{2x} + [(-1) \cdot (2)]^{x+1} = 2^{x+1}$

$2^{2x} + (-1)^{x+1} \cdot (2)^{x+1} = 2^{x+1}$

$2^{2x} + (-1)^{x+1} \cdot (2)^{x} \cdot 2 = 2^{x} \cdot 2$

Hacemos el cambio de variable:

$2^{x} = t$

Luego:

$t^2 + (-1)^{x+1} \cdot 2t = 2t$

$t^2 + (-1)^{x+1} \cdot 2t - 2t = 0 \;\; ecuación\ 1$

Veamos que valores puede tomar la expresión de abajo en función de que x sea par o impar:

$C = (-1)^{x+1}$

Si x es impar:

$C = (-1)^{x+1} = (-1)^{1+1} = (-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

Sustituimos su valor en la ecuación 1:

$t^2 + 1 \cdot 2t - 2t = 0$

$t^2 + 2t - 2t = 0$

$t^2 = 0$

$t = 0$

Deshaciendo el cambio de variable:

$2^x = t$

$2^x = 0; solución\ no\ válida$

Si x es par:

$C = (-1)^{x+1} = (-1)^{2+1} = (-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$

Sustituimos su valor en la ecuación 1:

$t^2 + (-1) \cdot 2t - 2t = 0$

$t^2 - 2t - 2t = 0$

$t^2 - 4t = 0$

$t(t - 4) = 0$

$t = 0; ya\ hemos\ visto\ que\ no\ es\ válido$

$t - 4 = 0$

$t = 4$

Deshaciendo el cambio de variable:

$2^x = 4$

$2^x = 2^2$

$x = 2; \quad x \in N$

ECUACIONES EXPONENCIALES

Problema 38:

Resolver la ecuación:

$$5^{x} + 5^{1-x} = 6$$

Solución Problema 38:

$$5^{x} + 5^{1-x} = 6$$

$$5^{x} + 5 \cdot 5^{-x} = 6$$

$$5^{x} + \frac{5}{5^{x}} - 6 = 0$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$5^{x} = t$$

Sustituyendo tenemos:

$$t + \frac{5}{t} - 6 = 0$$

$$t^{2} + 5 - 6t = 0$$

$$t^{2} - 6t + 5 = 0$$

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$t_1 = \frac{6+4}{2} = 5$$

$$t_2 = \frac{6-4}{2} = 1$$

Para t= 5

$$5^{x} = t$$

$$5^{x} = 5^{1}$$

$$x = 1$$

Para t= 1

$5^{x} = t$

$5^{x} = 1$

$5^{x} = 5^{0}$

$x = 0$

ECUACIONES EXPONENCIALES

Problema 39:

Resolver la ecuación:

$9^{x} - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$

Solución Problema 39:

$9^{x} - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$

$(3^{x})^{2} - 2 \cdot 3^{x} \cdot 3^{2} + 81 = 0$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$3^{x} = t$

Sustituyendo tenemos:

$t^{2} - 18t + 81 = 0$

$$t = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 324}}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Para t= 9

$3^{x} = 9$

$3^{x} = 3^{2}$

$x = 2$

ECUACIONES EXPONENCIALES

Problema 41:

Resolver la siguiente ecuación:

$$3^{x-1} + 3^{x} + 3^{x+1} = 117$$

Solución Problema 41:

$$3^{x-1} + 3^{x} + 3^{x+1} = 117$$

$$\frac{3^{x}}{3} + 3^{x} + 3^{x} \cdot 3 = 117$$

Hacemos el cambio de variable:

$$3^{x} = t$$

$$\frac{t}{3} + t + 3t = 117$$

$$t + 3t + 9t = 351$$

$$13t = 351$$

$$13t = 351$$

$$t = \frac{351}{13} = 27$$

Sustituyendo su valor,

$$3^{x} = t$$

$$3^{x} = 27$$

$$3^{x} = 3^{3}$$

$$x = 3$$