

EJERCICIO 1

Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, calcula los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ sabiendo que:

- La recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$ tiene pendiente -3 .
- $f(x)$ tiene un punto de inflexión de coordenadas $(1, 2)$.

Solución

Tenemos que $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ y $f''(x) = 6x + 2a$.

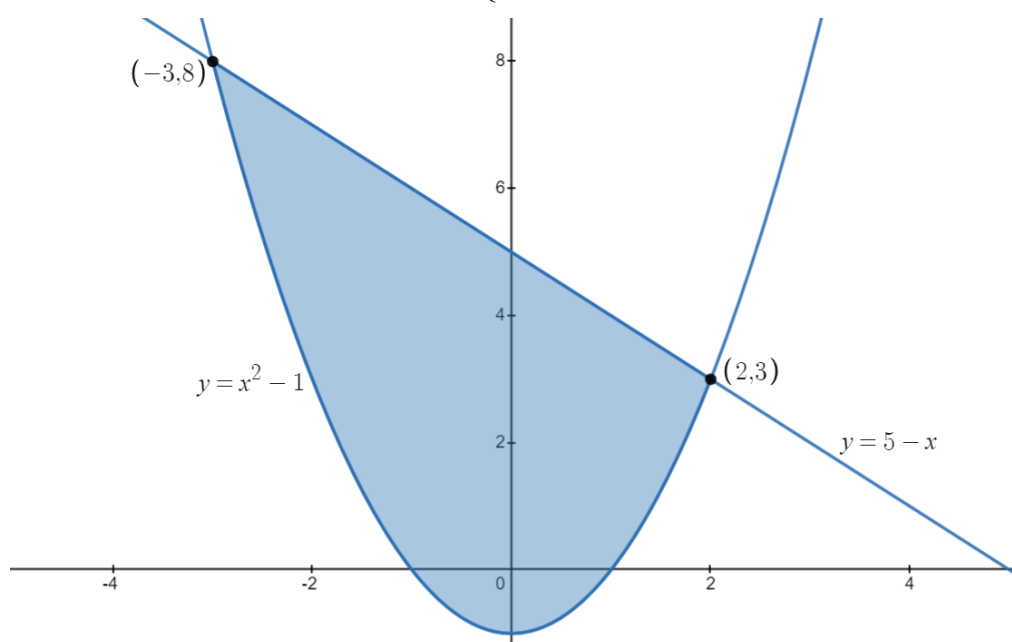
Como $(1, 2)$ es un punto de inflexión, entonces $f''(1) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 1 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3$. Así, la primera derivada queda $f'(x) = 3x^2 - 6x + b$. Además, $f'(-1) = -3$ pues la pendiente en $x = -1$ es -3 . Entonces $3(-1)^2 - 6(-1) + b = -3 \Rightarrow 3 + 6 + b = -3 \Rightarrow b = -12$. La función es pues $f(x) = x^3 - 3x^2 - 12x + c$. Como pasa por el punto $(1, 2)$, tenemos finalmente $f(1) = 2 \Rightarrow 1 - 3 - 12 + c = 2 \Rightarrow c = 16$.

EJERCICIO 2

- a) Esboza la región encerrada entre la parábola $f(x) = x^2 - 1$ y la recta $g(x) = 5 - x$.
- b) Calcula el área de la región anterior.

Solución

a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 5 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$.



b)
$$\int_{-3}^2 [(5-x) - (x^2-1)] dx = \int_{-3}^2 (-x^2 - x + 6) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-3}^2 = \left(-\frac{8}{3} - 2 + 12 \right) - \left(9 - \frac{9}{2} - 18 \right) = \frac{22}{3} - \left(-\frac{27}{2} \right) = \frac{125}{6} \text{ u}^2.$$

EJERCICIO 3

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ mx + (m+1)y + (m-1)z = m-2 \\ 3z + (m+3)y + 4z = m-2 \end{cases}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado.

Solución

a) La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ m & m+1 & m-1 \\ 3 & m+3 & 4 \end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos 2 pues hay al menos un

menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ m & m+1 & m-1 \end{vmatrix} = (2m - 2 + 3m + m + 1) - (2m + m - 1 + 3m + 3) = -3 \neq 0$, lo que demuestra que

$\text{rango}(A) = 3$, para todo $m \in \mathbb{R}$.

La matriz ampliada es $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ m & m+1 & m-1 & m-2 \\ 3 & m+3 & 4 & m-2 \end{pmatrix}$, cuyo rango es, según lo visto en el apartado anterior,

por lo menos 3. Si su determinante es cero, no podrá tener rango 4 y en ese caso el sistema será compatible determinado ($\text{rango}(A) = \text{rango}(B) = n = 3$):

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ m & m+1 & m-1 & m-2 \\ 3 & m+3 & 4 & m-2 \end{vmatrix} = \{f_3 - f_4\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ m-3 & -2 & m-5 & 0 \\ 3 & m+3 & 4 & m-2 \end{vmatrix} = (m-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ m-3 & -2 & m-5 \end{vmatrix} = \\ &= \{c_2 - c_1\} = (m-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ m-3 & 1-m & -2 \end{vmatrix} = (m-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1-m & -2 \end{vmatrix} = (m-2)(2m-4) = 2(m-2)^2. \end{aligned}$$

Entonces $|B| = 0 \Leftrightarrow m = 2$. Así pues, si $m = 2$ el sistema es compatible determinado y en caso contrario el sistema es incompatible.

- b) Para $m = 2$, y eliminando la última ecuación el sistema queda
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$
 sistema homogéneo, con lo que su única solución es $x = y = z = 0$.

EJERCICIO 4

- a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $\pi \equiv x - y + 3z = -3$ con los ejes de coordenadas.
- b) Si llamamos A , B y C a los vértices del triángulo del apartado anterior, encuentra el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el tetraedro de vértices A , B , C y $D(-\lambda^2, 2 + \lambda, -3)$ tengan volumen mínimo.

Solución

- a) Los puntos de intersección del plano $\pi \equiv x - y + 3z = -3$ con los ejes son:
- Con el eje $X : (x, 0, 0)$. O sea, que haciendo $y = z = 0$ se tiene $x = -3$. Por tanto, el punto de corte con el eje X es $A(-3, 0, 0)$.
 - Con el eje $Y : (0, y, 0)$. Haciendo ahora $x = z = 0$ tenemos que $-y = -3 \Rightarrow y = 3$. Así, el punto de corte con el eje Y es $B(0, 3, 0)$.
 - Con el eje $Z : (0, 0, z)$. Ahora hemos de hacer $x = y = 0$ para obtener que $3z = -3 \Rightarrow z = -1$, con lo que el punto de corte con el eje Z es $C(0, 0, -1)$.

Dados tres puntos del espacio A , B y C , el área S del triángulo cuyos vértices son los puntos A , B y C viene dada por la expresión:

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

En nuestro caso tenemos que
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3i - (9k - 3j) = -3i + 3j - 9k = (-3, 3, -9).$$

Entonces:
$$S = \frac{1}{2} |(-3, 3, -9)| = \frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-9)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{99} \text{ u}^2.$$

- b) El volumen V del tetraedro de vértices $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ y $D(d_1, d_2, d_3)$ viene dado por:

$$V = \left| \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ -\lambda^2 + 3 & 2 + \lambda & -3 \end{vmatrix} \right| = |(3\lambda^2 - 9) - (-27 - 6 - 3\lambda)| = |3\lambda^2 + 3\lambda + 24|.$$

La ecuación $3\lambda^2 + 3\lambda + 24 = 0$ no tiene soluciones reales ya que su discriminante es menor que cero $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 24 < 0$. Esto quiere decir que la parábola $y = 3\lambda^2 + 3\lambda + 24$ no corta al eje X . Y, como se abre hacia arriba, ha de ser $3\lambda^2 + 3\lambda + 24 > 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Es decir: $V = |3\lambda^2 + 3\lambda + 24| = 3\lambda^2 + 3\lambda + 24$,

De lo anterior se deduce que el valor mínimo de $3\lambda^2 + 3\lambda + 24$ está en el vértice: $\lambda = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$, y para este

valor el volumen del tetraedro será mínimo. En concreto: $V = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 24 = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 24 = \frac{93}{4} \text{ u}^3$.

Obsérvese que, si tomamos como función volumen $V = 3\lambda^2 + 3\lambda + 24$, derivando tenemos: $V' = 6\lambda + 3$, con lo que $V' = 0 \Leftrightarrow 6\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow 6\lambda = -3 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$, obteniendo el mismo resultado que antes.

Además, como $V'' = 6 > 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda = -\frac{1}{2}$ es un mínimo de la función volumen.

EJERCICIO 1

La concentración (en %) de nitrógeno de un compuesto viene dada, en función del tiempo $t \in [0, +\infty)$ medido en segundos, por la función

$$N(t) = \frac{60}{1 + 2e^{-t}}$$

- a) Comprueba que la concentración de nitrógeno crece con el tiempo. ¿Para qué $t \in [0, +\infty)$ la concentración de nitrógeno es mínima y cuál es esta concentración?
- b) ¿A qué valor tiende la concentración de nitrógeno cuando el tiempo tiende a infinito?

Solución

$$a) \quad N'(t) = \frac{-60}{(1 + 2e^{-t})^2} \cdot (-2e^{-t}) = \frac{120e^{-t}}{(1 + 2e^{-t})^2} = \frac{\frac{120}{e^t}}{\left(1 + \frac{2}{e^t}\right)^2} = \frac{\frac{120}{e^t}}{\left(\frac{e^t + 2}{e^t}\right)^2} = \frac{\frac{120}{e^t}}{\frac{(e^t + 2)^2}{e^{2t}}} = \frac{120e^t}{(e^t + 2)^2}.$$

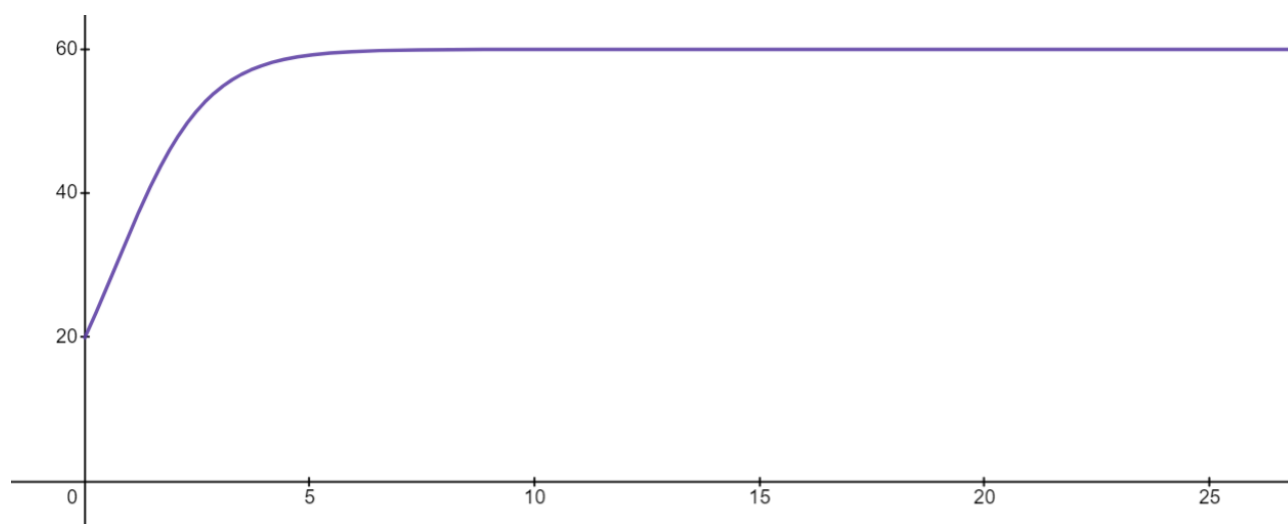
Como la función exponencial es positiva ($e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$) está claro que $N'(t) > 0, \forall t \in [0, +\infty)$ y, por tanto, la concentración de nitrógeno crece con el tiempo. Como $N'(t)$ no se anula nunca N no tiene extremos relativos. Su valor mínimo, absoluto además, ha de estar pues en cero (instante inicial) y en este momento la concentración es $N(0) = \frac{60}{1 + 2e^0} = \frac{60}{1 + 2} = 20\%$.

Para el razonamiento anterior no es necesario simplificar tanto la derivada. Basta con quedarse en

$$N'(t) = \frac{-60}{(1 + 2e^{-t})^2} \cdot -2e^{-t} = \frac{120e^{-t}}{(1 + 2e^{-t})^2}.$$

- b) Al ser $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t} = 0$, se tiene que $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{60}{1 + 2e^{-t}} = 60\%$. La recta $y = 60$ es una asíntota horizontal.

Merece la pena detenerse a observar la gráfica de la función:



EJERCICIO 2

Calcula las siguientes integrales: $\int \frac{1}{4+9x^2} dx$, $\int \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) dx$.

Solución

- $\int \frac{1}{4+9x^2} dx = \int \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{9}{4}x^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \int \frac{\frac{3}{2}}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2} dx = \frac{1}{6} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}x\right) + C.$
- $\int \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) dx = \int \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right) dx = -\ln(\cos x) + \ln(\operatorname{sen} x) + C = \ln \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + C.$

EJERCICIO 3

a) Sean A y B matrices cuadradas de orden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tales que B es la inversa de A :

- Si $|A| = 3$, razona cuánto vale $|B|$.
- ¿Cuál es el rango de B ?

b) Calcula el determinante de la matriz cuadrada X de orden 3 que verifica

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución

a) El determinante del producto es el producto de los determinantes: $|AB| = |A||B|$. Entonces, en el caso particular de que B sea la inversa de A se tiene $AB = I \Rightarrow |AB| = |I| = 1 \Rightarrow |A||B| = 1 \Rightarrow |B| = \frac{1}{|A|}$. Es fácil por tanto

deducir que, si $|A| = 3$, entonces $|B| = \frac{1}{3}$.

Por ser A cuadrada de orden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ y con determinante distinto de cero, su rango es n . El rango de su inversa B es el mismo, n , por la misma razón argumentada anteriormente.

b) Llamemos $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Por un lado $|C| = 21$, luego C tiene inversa:

$$C^{-1} = \frac{1}{21} (C^d)^t = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 56 & 0 & -7 \\ -74 & 3 & 10 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 21 & 56 & -74 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8/3 & -74/21 \\ 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & -1/3 & 10/21 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Así pues } X = C^{-1} \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 8/3 & -74/21 \\ 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & -1/3 & 10/21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -74/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10/3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Entonces } |X| = \begin{vmatrix} 1 & 8 & -74/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10/3 \end{vmatrix} = (0+0+0) - (0+0-1) = 1.$$

Sin embargo, es mucho más sencillo y se tarda mucho menos si se aplica la propiedad del apartado a), pues así

$$\text{nos evitamos el cálculo de inversas: } |C| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 21; \quad |D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 21.$$

$$\text{Ahora, como } C \cdot X = D, \text{ entonces } |C \cdot X| = |D| \Rightarrow |C| \cdot |X| = |D| \Rightarrow 21 \cdot |X| = 21 \Rightarrow |X| = 1.$$

EJERCICIO 4

$$\text{Dados el plano } \pi \equiv 2x - z = 6 \text{ y la recta } r \equiv \begin{cases} y + z = 0 \\ x - y + az = 4 \end{cases}$$

- Encuentra el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que π y r sean paralelos.
- Para el valor de a del apartado anterior, da la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π .

Solución

$$\text{a) Sin } \pi \text{ y } r \text{ han de ser paralelos el sistema } \begin{cases} 2x - z = 6 \\ y + z = 0 \\ x - y + az = 4 \end{cases} \text{ no puede tener soluciones, es decir, el rango de la}$$

matriz A de los coeficientes no puede ser tres (en ese caso habría solución única y el plano y la recta se cortarían). Por tanto, su determinante ha de ser igual a cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2a - (-1 - 2) = 0 \Leftrightarrow 2a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$$

El rango de la matriz ampliada B es tres pues

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2$$

De este modo si $a = -\frac{3}{2}$, $\text{rango}(A) = 2 \neq 3 = \text{rango}(B)$ (sistema incompatible) y en este caso la recta y el plano son paralelos.

b) Para $a = -\frac{3}{2}$ la recta es $r \equiv \begin{cases} y + z = 0 \\ x - y + \frac{3}{2}z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} y + z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 8 \end{cases}$, cuyas ecuaciones paramétricas son

$$r \equiv \begin{cases} x = 4 - 5/2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

De las ecuaciones anteriores se deduce que un punto de r es $P(4,0,0)$ y un vector director suyo es $\vec{u} = (-5, -2, 2)$. El plano π' que se pide pasa por P y una de sus direcciones es la de $\vec{u}$, ya que contiene a r . Además, por ser perpendicular a $\pi \equiv 2x - z = 6$, otra de sus direcciones será la de un vector normal a π , o sea, $\vec{v} = (2, 0, -1)$. Por tanto, la ecuación general del plano π' es:

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y & z \\ -5 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi' \equiv (2x-8+4y) - (-4z+5y) = 0 \Leftrightarrow \pi' \equiv 2x - y + 4z - 8 = 0.$$