

1. a) Determina razonadamente los valores de  $a$  para los que la matriz  $A$  no tiene inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula razonadamente todos los posibles valores  $x, y, z$  para que el producto de las matrices  $C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$

y  $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  conmute.

### Solución

a) Una matriz cuadrada no tiene inversa si, y solamente si,  $|A| = 0$ . Hallemos el determinante de la matriz  $A$ .

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 2 & a \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a \cdot [a \cdot (a+1) - 2] = \\ &= -a \cdot (a^2 + a - 2) = -a(a-1)(a+2). \end{aligned}$$

En el primer paso se ha restado a la cuarta fila la tercera (con lo que el determinante no varía), y en siguiente se ha desarrollado el determinante por los elementos de la cuarta fila. El determinante de orden tres se ha resuelto desarrollando por los elementos de la última fila.

$$\text{Entonces } |A| = 0 \Leftrightarrow -a(a-1)(a+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -2 \end{cases}. \text{ Por tanto, } A \text{ no tiene inversa si } a = 0, a = 1 \text{ o } a = -2.$$

b) Para que las matrices  $C$  y  $D$  conmuten ha de ser  $C \cdot D = D \cdot C$ .

$$\text{Por un lado, } C \cdot D = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+1 & x-1 \\ 3y+z & y-z \end{pmatrix}.$$

$$\text{Y, por otro lado, } D \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y & 3+z \\ x-y & 1-z \end{pmatrix}.$$

$$\text{Entonces } C \cdot D = D \cdot C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x+1 & x-1 \\ 3y+z & y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y & 3+z \\ x-y & 1-z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 = 3x+y \\ x-1 = 3+z \\ 3y+z = x-y \\ y-z = 1-z \end{cases}.$$

La primera y la última ecuación del sistema anterior proporcionan claramente la solución  $y = 1$ . Sustituyendo

este valor en las ecuaciones segunda y tercera nos queda el sistema  $\begin{cases} x-1 = 3+z \\ 3+z = x-1 \end{cases}$ , formado por dos ecuaciones

iguales, luego hay infinitas soluciones. Llamando  $z = \lambda$ ,  $x-1 = 3+\lambda \Rightarrow x = 4+\lambda$ .

Así pues, para que  $C$  y  $D$  conmuten ha de ser  $x = 4+\lambda$ ,  $y = 1$  y  $z = \lambda$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

2. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro  $a \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} ax - ay - z = a \\ ax - ay = a \\ ax + 2y - z = 1 \end{cases}$$

b) Resuelve razonadamente el sistema anterior para  $a = 2$ , si es posible.

### Solución

a) La matriz de los coeficientes es  $A = \begin{pmatrix} a & -a & -1 \\ a & -a & 0 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix}$ , y la matriz ampliada es  $B = \begin{pmatrix} a & -a & -1 & a \\ a & -a & 0 & a \\ a & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Se tiene que  $|A| = (a^2 - 2a) - (a^2 + a^2) = -a^2 - 2a = a(-a - 2)$ . Por tanto,  $|A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases}$ . Entonces:

• Si  $a \neq 0$  y  $a \neq -2$ ,  $r(A) = 3 = r(B) = n$  ( $n$  representa el número de incógnitas). Por el teorema de Rouché, el sistema es compatible determinado (solución única).

• Si  $a = 0$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ , cuyo rango es dos pues contiene un menor de orden dos distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 - (-2) = 2 \neq 0. \text{ Además, la matriz ampliada es } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ cuyo rango no puede ser}$$

tres porque contiene una fila de ceros. Por tanto, en este caso,  $r(A) = 2 = r(B) < 3 = n$ , y el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

• Si  $a = -2$ ,  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ , cuyo rango es dos pues contiene un menor de orden dos distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0. \text{ Además, la matriz ampliada es } B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ cuyo rango es tres porque}$$

$$\text{contiene un menor de orden tres distinto de cero: } \begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-4 - 4) - (2 - 4) = -8 + 2 = -6 \neq 0.$$

Entonces, en este caso,  $r(A) = 2 \neq 3 = r(B)$ , con lo que el sistema es incompatible (no tiene solución).

b) Si  $a = 2$  el sistema es compatible determinado y queda del siguiente modo.

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 2 \\ 2x - 2y = 2 \\ 2x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de los coeficientes es  $|A| = 2(-2-2) = -8$ . Para resolver el sistema haremos uso de la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{(4-4)-(2+4)}{-8} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{(-4-2)-(-4-4)}{-8} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{0}{-8} = 0 \text{ (el determinante es cero porque las dos primeras filas son iguales).}$$

3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ \cos(\pi x) & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{\ln(x-2)}{3-x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a) Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

b) Calcula razonadamente el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{-x}}{1+2x-\cos(x^2)}$ .

### Solución

a) Estudiemos la continuidad en  $x = 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = \left[ \frac{3}{0} \right] = -\infty. \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \cos(\pi x) = \cos 2\pi = 1$$

Entonces  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  y no existe  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ . Por tanto  $f$  no es continua en  $x = 2$ . Además, como uno de los límites laterales es infinito, se trata de una discontinuidad de salto infinito.

Estudiemos ahora la continuidad en  $x = 3$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \cos(\pi x) = \cos 3\pi = -1. \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\ln(x-2)}{3-x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-2} = -1.$$

Entonces, por ser los límites laterales iguales,  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1$ . Además,  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1 = f(3)$ , con lo que  $f$  es continua en  $x = 3$ .

Si  $x$  es cualquier otro número real distinto de 2 y de 3,  $f$  también es continua por tratarse de funciones elementales, las cuales son continuas en todo su dominio de definición. Obsérvese que el “tercer trozo”

$y = \frac{\ln(x-2)}{3-x}$  tiene sentido para todo  $x > 3$ , pues el logaritmo siempre se hará de un número positivo y el denominador no se anula.

En resumen,  $f$  es continua en  $\mathbb{R} - \{2\}$  y en  $x = 2$  hay una discontinuidad de salto infinito.

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{-x}}{1+2x-\cos(x^2)} = \left[ \frac{0}{1+0-1} = \frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - xe^{-x}}{2+2x\sin(x^2)} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

4. Sea la función  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$

a) Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función  $f(x)$  y clasifícalos.

b) Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función  $f(x)$  en el punto de abscisa  $x = 0$ .

### Solución

a) La derivada de la función  $f$  es

$$f'(x) = \frac{(2x-2) \cdot (x^2+1) - (x^2-2x+1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^2-2-2x^3+4x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}$$

Entonces  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$ . Estos dos últimos puntos digamos que son los

“candidatos” a ser extremos relativos.

Hallemos la segunda derivada de  $f$ :

$$f''(x) = \frac{4x(x^2+1)^2 - (2x^2-2)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{4x(x^2+1) - 4x(2x^2-2)}{(x^2+1)^3} = \frac{4x(-x^2+3)}{(x^2+1)^3}$$

Estudiamos ahora el signo de la segunda derivada en  $x = -1$  y  $x = 1$ .

$$f''(-1) = \frac{-4(-1+3)}{(1+1)^3} = \frac{-8}{8} = -1 < 0 ; f''(1) = \frac{4(-1+3)}{(1+1)^3} = \frac{8}{8} = 1 > 0.$$

Entonces, por el criterio de la segunda derivada, se tiene que  $x = -1$  es un máximo relativo y  $x = 1$  es un mínimo relativo. Puesto que  $f(-1) = \frac{1+2+1}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$  y  $f(1) = \frac{1-2+1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$ , las coordenadas de los puntos son  $(-1, 2)$  (máximo relativo) y  $(1, 0)$  (mínimo relativo).

b) La rectas tangente y normal en  $x = 0$  son, respectivamente,  $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ , y

$$y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x - 0).$$

Puesto que  $f(0) = \frac{0-0+1}{0+1} = \frac{1}{1} = 1$  y  $f'(0) = \frac{0-2}{(0+1)^2} = \frac{-2}{1} = -2$ , la recta tangente en  $x=0$  es

$$y-1 = -2x \Rightarrow y = -2x+1, \text{ y la recta normal en } x=0 \text{ es } y-1 = -\frac{1}{-2}x \Rightarrow y = \frac{1}{2}x+1.$$

5. a) Calcula razonadamente la siguiente integral:  $\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1} dx$ .

b) Calcula, justificadamente, el área acotada del recinto limitado por la gráfica de la función

$$g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x \text{ y el eje de abscisas.}$$

### Solución

a) Se trata de una integral racional. Puesto que  $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ ,  $x=1$  es una raíz doble del denominador.

Entonces:  $\frac{3x-2}{x^2-2x+1} = \frac{3x-2}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$ . Igualando los numeradores se tiene que

$3x-2 = A(x-1)+B$ . Para  $x=1$ ,  $1=B$ . Y para  $x=0$ ,  $-2 = -A+B \Rightarrow -2 = -A+1 \Rightarrow A=3$ . De este modo:

$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1} dx = \int \frac{3}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = 3 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

b) Puesto que  $-x^3 + 2x^2 + 3x = -x(x^2 - 2x - 3) = -x(x+1)(x-3)$ , las soluciones de la ecuación

$-x^3 + 2x^2 + 3x = 0$  son  $x = -1$ ,  $x = 0$  y  $x = 3$ . Esto quiere decir que la gráfica de  $g$  corta al eje  $X$  en los puntos  $(-1, 0)$ ,  $(0, 0)$  y  $(3, 0)$ . De este modo, el recinto limitado por la gráfica de la función  $g$  y el eje de

abscisas lo podemos dividir en dos, el encerrado entre  $x = -1$  y  $x = 0$ , a cuya área llamaremos  $A_1$  y el encerrado entre  $x = 0$  y  $x = 3$ , a cuya área llamaremos  $A_2$ . Calculemos las integrales definidas.

$$\int_{-1}^0 (-x^3 + 2x^2 + 3x) dx = \left[ -\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_{-1}^0 = 0 - \left( -\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} = \frac{3+8-18}{12} = -\frac{7}{12}.$$

$$\int_0^3 (-x^3 + 2x^2 + 3x) dx = \left[ -\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^3 = \left( -\frac{81}{4} - \frac{54}{3} + \frac{27}{2} \right) - 0 = \frac{-243+216+162}{12} = \frac{135}{12}.$$

Por tanto:  $A_1 = \frac{7}{12} \text{ uds}^2$  y  $A_2 = \frac{135}{12} \text{ uds}^2$ .

Finalmente, si llamamos  $A$  al área acotada del recinto limitado por la gráfica de la función

$g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$  y el eje de abscisas, se tiene que  $-\frac{7}{12} + \frac{135}{12} = \frac{142}{12} = \frac{71}{6} \text{ uds}^2 \cong 11,83 \text{ uds}^2$ .

6. Dados los planos  $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$  y  $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda - \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$

a) Calcula razonadamente el ángulo que forman los dos planos.

b) Halla razonadamente el volumen del tetraedro formado por el punto  $P(3, -3, 2)$  y los puntos de corte del plano  $\pi_1$  con los ejes de coordenadas.

**Solución**

a) Expresemos, en primer lugar, el plano  $\pi_2$  en su forma general:

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ y & -1 & 1 \\ z+2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi_2 \equiv (z+2-2y) - (z+2+2x+2) = 0 \Leftrightarrow \pi_2 \equiv -2x-2y-2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \pi_2 \equiv x+y+1 = 0.$$

Un vector normal o perpendicular al plano  $\pi_1$  es  $\vec{u} = (2,1,1)$ , y un vector normal o perpendicular al plano  $\pi_2$  es  $\vec{v} = (1,1,0)$ .

El ángulo  $\alpha$  formado por los dos planos coincide con el ángulo formado por sus vectores normales o

perpendiculares. Por tanto:  $\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Entonces:  $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$

b) Como todo punto del eje  $X$  es de la forma  $(x,0,0)$ , el punto  $Q$  de corte del plano  $\pi_1$  con el eje  $X$  será:  
 $2x+0+0-2=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow Q(1,0,0).$

Como todo punto del eje  $Y$  es de la forma  $(0,y,0)$ , el punto  $R$  de corte del plano  $\pi_1$  con el eje  $Y$  será:  
 $0+y+0-2=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow R(0,2,0).$

Como todo punto del eje  $Z$  es de la forma  $(0,0,z)$ , el punto  $S$  de corte del plano  $\pi_1$  con el eje  $Z$  será:  
 $0+0+z-2=0 \Rightarrow z=2 \Rightarrow S(0,0,2).$

El volumen  $V$  del tetraedro formado por los puntos  $P, Q, R$  y  $S$  es igual a la sexta parte del valor absoluto del producto mixto  $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS})$ . Hallemos este producto mixto. Para ello hemos de tener en cuenta que  $\overrightarrow{PQ} = (-2,3,-2)$ ,  $\overrightarrow{PR} = (-3,5,-2)$ ,  $\overrightarrow{PS} = (-3,3,0)$ . Entonces:

$$(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (18+18) - (30+12) = 36 - 42 = -6.$$

Finalmente:  $V = \frac{1}{6} \cdot |(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS})| = \frac{1}{6} \cdot |-6| = \frac{6}{6} = 1 \text{ ud}^3.$

7. Dados el plano  $\pi \equiv \begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = 1 + \lambda + a\mu \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases}$  y la recta  $s \equiv \begin{cases} x - 2y = 1 - b \\ z = -3 \end{cases}$

- a) Calcula razonadamente el valor de los parámetros  $a$  y  $b$  para que la recta  $s$  esté contenida en el plano  $\pi$ .
- b) Si  $a = 0$  y  $b = 3$ , calcula razonadamente la ecuación en forma implícita de la recta  $r$  que pasa por el punto  $P(1,-1,-8)$ , es paralela al plano  $\pi$  y perpendicular a la recta  $s$ .

**Solución**

a) Hallemos, en primer lugar, la ecuación general del plano  $\pi$  :

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 1 \\ y-1 & 1 & a \\ z-1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi \equiv (-x-1+2y-2)-(z-1+2ax+2a) = 0 \Leftrightarrow (-1-2a)x+2y-z-2-2a=0.$$

De aquí se obtiene que un vector normal o perpendicular a  $\pi$  es  $\vec{u} = (-1-2a, 2, -1)$ .

Ahora vamos a expresar la recta  $s$  en paramétricas.

Llamando  $y = \lambda$  se obtiene que  $s \equiv \begin{cases} x = 1 - b + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 \end{cases}$ . De aquí se obtiene que un punto de  $s$  es  $P(1-b, 0, -3)$  y

un vector director de  $s$  es  $\vec{v} = (2, 1, 0)$ .

Para que  $s \subset \pi$ , se debe cumplir que  $\vec{u} \perp \vec{v}$ , es decir,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ . Esto nos llevará a deducir el valor de  $a$  :

$$(-1-2a) \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 0 \Rightarrow -2 - 4a + 2 = 0 \Rightarrow a = 0.$$

De lo anterior se deduce que la ecuación del plano es  $\pi \equiv -x + 2y - z - 2 = 0$ .

Además, debe ocurrir también que  $P \in \pi$ . O sea:

$$-(1-b) + 2 \cdot 0 - (-3) - 2 = 0 \Rightarrow -1 + b + 1 = 0 \Rightarrow b = 0.$$

b) Ya hemos visto que, si  $a = 0$ , la ecuación general del plano es  $\pi \equiv -x + 2y - z - 2 = 0$ . Además, si  $b = 3$ , las

ecuaciones paramétricas de la recta son  $s \equiv \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 \end{cases}$ . En este caso  $\pi$  y  $s$  son paralelos. Por dos razones: la

primera es que, al igual que en el apartado anterior, el vector normal del plano,  $\vec{u} = (-1, 2, -1)$ , y el vector director de la recta,  $\vec{v} = (2, 1, 0)$ , son claramente perpendiculares. Y la segunda, porque el punto  $P(-2, 0, -3)$  de  $s$  no pertenece a  $\pi$ , ya que  $-(-2) + 2 \cdot 0 - (-3) - 2 = 2 + 3 - 2 = 3 \neq 0$ .

Un vector director de la recta  $r$  que se pide será el producto vectorial de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ . Esto es porque el producto vectorial de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  es un vector perpendicular a ambos y, por tanto, la recta que tenga su dirección será perpendicular a la recta  $s$  y perpendicular al vector normal del plano  $\pi$  (o sea, paralela al mismo).

Hagamos los cálculos.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2j - k) - (4k - i) = i - 2j - 5k \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = (1, -2, -5).$$

De este modo, la ecuación continua de la recta  $r$  que se pide es:  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+8}{-5}$ . Pasando estas

ecuaciones a la forma implícita tenemos:  $r \equiv \begin{cases} -2x + 2 = y + 1 \\ -5x + 5 = z + 8 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} -2x - y + 1 = 0 \\ -5x - z = 3 \end{cases}$ .

8. a) En servicio de emergencias el 60 % de los avisos que se reciben se clasifican con el código amarillo, el 30 % con el naranja y el 10 % con el rojo. Se sabe que el porcentaje de avisos recibidos que son falsas alarmas es 3 % en caso de código amarillo, 2 % en el naranja y 1 % en el rojo. Si se recibe un aviso,
- a1) ¿qué probabilidad hay de que se trate de una falsa alarma?
- a2) Si se sabe que el aviso recibido no ha sido falsa alarma, ¿qué probabilidad hay de que haya sido un aviso código rojo o naranja?
- b) Si en una centralita se reciben nueve avisos,
- b1) ¿Qué probabilidad hay de que la centralita reciba 2 o menos avisos naranjas?
- b2) ¿Qué probabilidad hay de que todos los avisos sen amarillos o naranjas?

n	k	P												
		0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.33	0.35	0.40	0.45	0.49	0.50
9	0	0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0272	0.0207	0.0101	0.0046	0.0023	0.0020
	1	0.0830	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1206	0.1004	0.0605	0.0339	0.0202	0.0176
	2	0.0034	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2376	0.2162	0.1612	0.1110	0.0776	0.0703
	3	0.0001	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2731	0.2716	0.2508	0.2119	0.1739	0.1641
	4	0.0000	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2017	0.2194	0.2508	0.2600	0.2506	0.2461
	5	0.0000	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.0994	0.1181	0.1672	0.2128	0.2408	0.2461
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0326	0.0424	0.0743	0.1160	0.1542	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0069	0.0098	0.0212	0.0407	0.0635	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0008	0.0013	0.0035	0.0083	0.0153	0.0176
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0016	0.0020	

### Solución

- a) Recibido un aviso, sean  $A$ ,  $N$  y  $R$  los sucesos “aviso clasificado como código amarillo”, “aviso clasificado como código naranja” y “aviso clasificado como código rojo”, respectivamente. Sea también  $F$  el suceso “el aviso recibido es una falsa alarma”. Entonces, según el enunciado,  $P(A) = 0,6$ ;  $P(N) = 0,3$  y  $P(R) = 0,1$ . Además, también tenemos que  $P(F/A) = 0,03$ ;  $P(\bar{F}/A) = 0,97$ ;  $P(F/N) = 0,02$ ;  $P(\bar{F}/N) = 0,98$ ;

$$P(F/R) = 0,01; P(\bar{F}/R) = 0,99.$$

- a1) Por el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que, recibido un aviso, sea una falsa alarma es:

$$P(F) = P(F \cap A) + P(F \cap N) + P(F \cap R) = P(A) \cdot P(F/A) + P(N) \cdot P(F/N) + P(R) \cdot P(F/R) = 0,6 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,1 \cdot 0,01 = 0,018 + 0,006 + 0,001 = 0,025.$$

- a2) En primer lugar, la probabilidad de que, recibido un aviso, no sea una falsa alarma es:

$$P(\bar{F}) = 1 - P(F) = 1 - 0,025 = 0,975.$$

Supongamos que el aviso recibido no ha sido falsa alarma. La probabilidad de que haya sido un código rojo es

$$P(R/\bar{F}) = \frac{P(R \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{P(R) \cdot P(\bar{F}/R)}{P(\bar{F})} = \frac{0,1 \cdot 0,99}{0,975} = \frac{0,099}{0,975} = 0,1015.$$

Y la probabilidad de que haya sido código naranja:

$$P(N/\bar{F}) = \frac{P(N \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{P(N) \cdot P(\bar{F}/N)}{P(\bar{F})} = \frac{0,3 \cdot 0,98}{0,975} = \frac{0,294}{0,975} = 0,3015.$$

Por tanto, si el aviso recibido no ha sido falsa alarma, la probabilidad de que haya sido un código rojo o naranja es

$$P(R/\bar{F}) + P(N/\bar{F}) = 0,1015 + 0,3015 = 0,403$$

Este subapartado también se puede hacer del siguiente modo.

Si el aviso recibido no ha sido falsa alarma, el suceso código rojo o naranja es el contrario del suceso código amarillo.

$$P((R \cup N)/\bar{F}) = 1 - P(A/\bar{F}) = 1 - \frac{P(A \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = 1 - \frac{P(A) \cdot P(\bar{F}/A)}{P(\bar{F})} = 1 - \frac{0,6 \cdot 0,97}{0,975} = 1 - 0,597 = 0,403$$

Todo este apartado se puede hacer igualmente usando un diagrama de árbol, obteniéndose idénticos resultados.

b) Se trata en, ambos casos, de una variable que sigue una distribución binomial con  $n = 9$ . En cada uno de ellos consideraremos como éxito el suceso adecuado para poder hacer uso de la tabla.

b1) Consideraremos que el éxito es “recibir aviso naranja”. Entonces  $p = 0,3$ . Entonces la probabilidad de recibir 2 o menos avisos naranjas es, haciendo uso de la tabla:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,0404 + 0,1556 + 0,2668 = 0,4628.$$

b2) Que todos los avisos sean amarillos o naranjas es lo mismo que no recibir ningún aviso de código rojo. Si ahora consideramos el éxito “recibir código rojo”, tendremos que  $p = 0,1$ , con lo que la probabilidad que se pide será la misma que la de que se reciban cero códigos rojos. Haciendo uso de la tabla se tiene que:

$$P(X = 0) = 0,3874.$$

También se puede hacer de esta otra forma.

Si llamamos éxito a “recibir código amarillo o naranja”, tendremos que  $p = 0,9$ . Y la variable  $X$  se distribuirá según una binomial  $B(9; 0,9)$ . Haciendo uso de la función de probabilidad de la binomial:

$$P(X = 9) = \binom{9}{9} \cdot 0,9^9 \cdot 0,1^0 = 0,9^9 = 0,3874.$$