EJERCICIO 1

En cierto experimento la cantidad de agua en estado líquido $C(t)$, medida en litros, está determinada en función del tiempo t, medido en horas, por la expresión:

$$C(t)=\frac{2}{3}+10t+\frac{10}{t}+\frac{240}{t^3},\qquad t\in[1,\,10]$$

Halla cuál es la cantidad mínima de agua en estado líquido y en qué instante de tiempo se obtiene, en el intervalo comprendido entre $t=1$ hora y $t=10$ horas.

Solución

La función $C(t)$ se puede expresar así: $C(t)=\frac{2}{3}+10t+10t^{-1}+240t^{-3}$. De esta forma se puede derivar con facilidad:

$$C'(t)=10+10(-1)t^{-2}+240(-3)t^{-4}=10-10t^{-2}-720t^{-4}=10-\frac{10}{t^2}-\frac{720}{t^4}.$$

La segunda derivada es:

$$C''(t)=-10(-2)t^{-3}-720(-4)t^{-5}=\frac{20}{t^3}+\frac{2880}{t^5}.$$

Resolviendo la ecuación $C'(t)=0$ obtenemos aquellos puntos singulares o críticos que pueden ser máximos o mínimos relativos de la función:

$$C'(t)=0\Leftrightarrow 10-\frac{10}{t^2}-\frac{720}{t^4}=0\Leftrightarrow 10t^4-10t^2-720=0\Leftrightarrow t^4-t^2-72=0\ .$$

Resolviendo la ecuación: $t^2=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-72)}}{2\cdot1}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+288}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{289}}{2}=\dfrac{1\pm17}{2}=\begin{cases}\dfrac{18}{2}=9\\ -\dfrac{16}{2}=-8\end{cases}.$

Si $t^2=-8$, no existe solución real para t. Si $t^2=9\Rightarrow\begin{cases}t_1=-3\\ t_2=3\end{cases}$. De estos dos valores, el único candidato a máximo o mínimo es $t_2=3$, pues es el que se encuentra en el intervalo comprendido entre $t=1$ hora y $t=10$ horas. Sustituyendo en la segunda derivada se tiene que $C''(t_2)=C(3)=\frac{20}{3^3}+\frac{2880}{3^5}>0\Rightarrow t_2=3$ es un mínimo.

Así pues, la cantidad mínima de agua en estado líquido se da en el instante $t=3$ horas. Dicha cantidad mínima será:

$$C(3)=\frac{2}{3}+10\cdot3+\frac{10}{3}+\frac{240}{3^3}=\frac{2}{3}+30+\frac{10}{3}+\frac{240}{27}=34+\frac{240}{27}=\frac{918+240}{27}=\frac{1158}{27}=\frac{386}{9}\simeq 44{,}89 \text{ litros.}$$

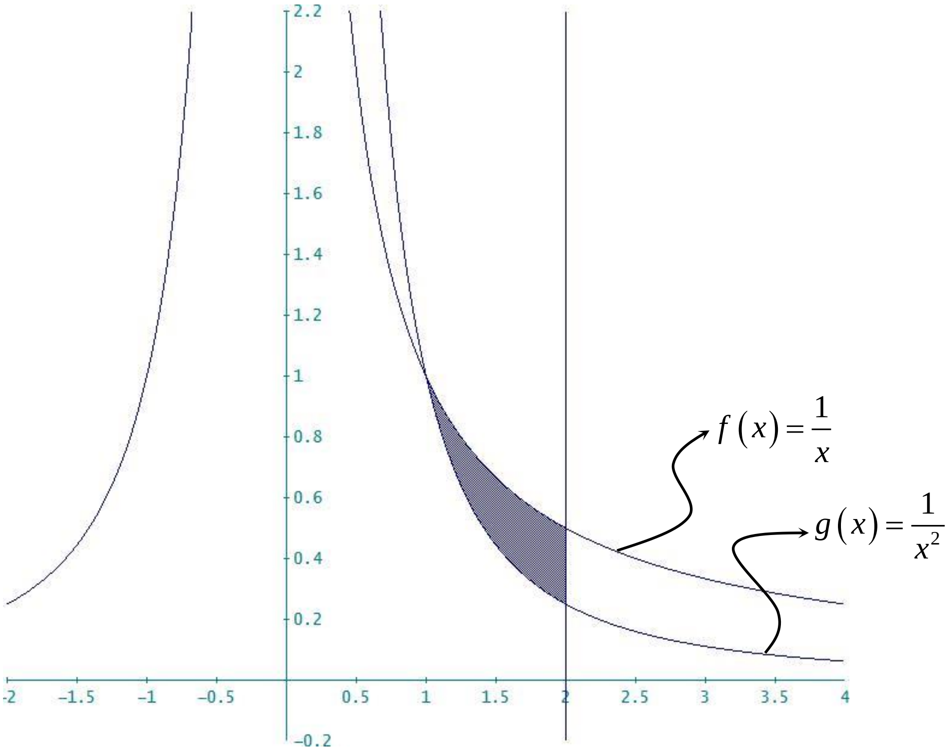
EJERCICIO 2

a) Representa gráficamente la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=\frac{1}{x^2}$, y la recta $x=2$.

b) Calcula el área de dicha región.

Solución

a) $f(x)=g(x)\Leftrightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow x^2=x\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow x(x-1)=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$. Entonces las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en el punto $x=1$ (el punto $x=0$ no pertenece al dominio de ninguna de las dos funciones). Gráficamente:



b) El área de la región sombreada es $\int_1^2 \left(f(x)-g(x)\right)$:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\ln x+\frac{1}{x}\right]_1^2=\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)-\left(\ln 1+1\right)=\ln 2-\frac{1}{2}\simeq 0{,}19 \text{ uds}^2$$

EJERCICIO 3

a) Clasifica, en función del parámetro $\lambda\in\mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda x+2y-z=\lambda \\ 3x-y-z=1 \\ 5x+y-2z=3 \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda=2$.

Solución

a) Sea A la matriz de los coeficientes $A=\begin{pmatrix} \lambda & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos 2, pues contiene un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=3-(-5)=-8$.

El determinante de A es $|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & -1\\ 3 & -1 & -1\\ 5 & 1 & -2\end{vmatrix}=(2\lambda-10-3)-(5-12-\lambda)=3\lambda-6$. Obsérvese pues que $|A|=0\Leftrightarrow 3\lambda-6=0\Leftrightarrow\lambda=2$. Por tanto:

- Si $\lambda\neq 2\Rightarrow \text{rango}(A)=3$.
- Si $\lambda=2\Rightarrow \text{rango}(A)=2$.

Estudiemos ahora el rango de la matriz ampliada $B=\begin{pmatrix}\lambda & 2 & -1 & \lambda\\ 3 & -1 & -1 & 1\\ 5 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

- Si $\lambda\neq 2\Rightarrow \text{rango}(B)=3$, pues en este caso el rango de A ya era 3.
- Si $\lambda=2$, $\text{rango}(B)=\text{rango}\begin{pmatrix}2 & 2 & -1 & 2\\ 3 & -1 & -1 & 1\\ 5 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix}=2$, pues todos los menores de orden 3 deben ser igual a cero (obsérvese que la tercera fila es la suma de la primera y la segunda).

Resumiendo:

- Si $\lambda\neq 2\Rightarrow \text{rango}(A)=\text{rango}(B)=3=n$ (número de incógnitas). Entonces el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si $\lambda=2\Rightarrow \text{rango}(A)=\text{rango}(B)=2<3=n$. En este caso el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Ya hemos visto que para $\lambda=2$ hay infinitas soluciones pues $\text{rango}(A)=\text{rango}(B)=2<3=n$. El grado de libertad del sistema, en este caso, es igual a 1. Llamando $z=t$ y eliminando la tercera ecuación tenemos el sistema equivalente $\begin{cases}2x+2y=2+t\\ 3x-y=1+t\end{cases}$, cuyas soluciones son:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2+t & 2\\ 1+t & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}}=\frac{(-2-t)-(2+2t)}{-2-6}=\frac{-4-3t}{-8}=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}t.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 2+t\\ 3 & 1+t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}}=\frac{(2+2t)-(6+3t)}{-2-6}=\frac{-4-t}{-8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}t.$$

Por tanto, las soluciones del sistema son $(x,\ y,\ z)=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}t,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{8}t,\ t\right),\ t\in\mathbb{R}$.

EJERCICIO 4

Dados los puntos de coordenadas $A(0,1,0)$, $B(1,2,3)$, $C(0,2,1)$ y $D(k,1,1)$, donde $k\in\mathbb{R}$:

a) Determina el área del triángulo de vértices A, B y C.

b) ¿Para qué valores del parámetro k el tetraedro cuyos vértices son A, B, C y D tienen un volumen de $5\ \text{u}^3$?

Solución

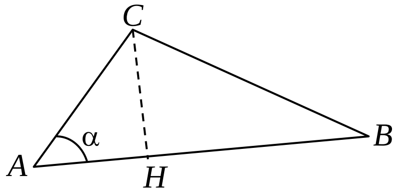
Área de un triángulo:

Sean tres puntos del espacio $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ y $C(c_1,c_2,c_3)$. Llamemos S al área del triángulo cuyos vértices son A, B y C, y $\vec{u}$ al vector $\vec{u}=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3\end{vmatrix}$. Entonces:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

Demostración.

El área del triángulo ABC es:



$\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CH=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$ (la última igualdad es la definición de módulo del producto vectorial de dos vectores).

a) Por el resultado anterior, llamando S al área del triángulo de vértices A, B y C:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1-0 & 2-1 & 3-0\\ 0-0 & 2-1 & 1-0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|\left(\vec{i}+\vec{k}\right)-\left(\vec{j}+3\vec{i}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|-2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4+1+1}=\frac{\sqrt{6}}{2}\simeq 1,225\ \text{uds}^2$$

b) Recordemos que el volumen V de un tetraedro de vértices $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$ y $D(d_1,d_2,d_3)$ es igual a la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$, es decir:

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3\\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3\end{matrix}\right\|$$

Como

$$\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3\\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1-0 & 2-1 & 3-0\\ 0-0 & 2-1 & 1-0\\ k-0 & 1-1 & 1-0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ k & 0 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|(1+k)-(3k)\right|=\frac{1}{6}\left|1-2k\right|,$$

se tiene que:

$$\frac{1}{6}\left|1-2k\right|=5\Leftrightarrow\left|1-2k\right|=30\Leftrightarrow\begin{cases}1-2k=30\Rightarrow 2k=-29\Rightarrow k=-\dfrac{29}{2}\\ 1-2k=-30\Rightarrow 2k=31\Rightarrow k=\dfrac{31}{2}\end{cases}.$$