

### EJERCICIO 1

- a) Enuncia el teorema de Bolzano.
- b) Razona que las gráficas de las funciones  $f(x) = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3$  y  $g(x) = e^x$  se cortan en algún punto con coordenada de abscisa entre  $-1$  y  $0$ .
- c) Calcula los puntos de inflexión de  $f(x)$ .

### Solución

- a) **Teorema de Bolzano.**

Si  $f$  es una función continua en un intervalo  $[a, b]$  y  $\text{signo } f(a) \neq \text{signo } f(b)$ , entonces existe un número real  $c$  perteneciente al intervalo  $(a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .

- b) Sea  $h(x) = f(x) - g(x) = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3 - e^x$ . La función  $h$  es continua en todo  $\mathbb{R}$  por ser suma de funciones continuas. Además:

$$h(-1) = -3 - 10 - 10 + 3 - e^{-1} = -20 - e^{-1} = -(20 + e^{-1}) < 0$$

$$h(0) = 3 - e^0 = 3 - 1 = 2 > 0$$

Por el Teorema de Bolzano existe un punto  $c \in (-1, 0)$  tal que  $h(c) = 0$ , es decir, tal que  $f(c) - g(c) = 0$ , o sea  $f(c) = g(c)$ , con lo que hemos demostrado que las funciones  $f$  y  $g$  se cortan en el punto de abscisa  $x = c$ , entre  $-1$  y  $0$ .

- c) Hagamos la primera derivada, igualémosla a cero y extraigamos la soluciones de la ecuación correspondiente.

$$f'(x) = 15x^4 - 40x^3 + 30x^2, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 15x^4 - 40x^3 + 30x^2 = 0 \Leftrightarrow 5x^2(3x^2 - 8x + 6) = 0.$$

Esta ecuación solamente tiene la solución  $x = 0$ , pues la ecuación  $3x^2 - 8x + 6 = 0$  no tiene soluciones reales (su discriminante es menor que cero:  $\Delta = 64 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = 64 - 72 = -8$ ).

Hagamos ahora la segunda derivada y procedamos como antes:

$$f''(x) = 60x^3 - 120x^2 + 60x,$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 60x^3 - 120x^2 + 60x = 0 \Leftrightarrow 60x(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow 60x(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Si estos puntos tienen tercera derivada distinta de cero serán puntos de inflexión:

$$f'''(x) = 180x^2 - 240x + 60, \quad f'''(0) = 60 \neq 0, \quad f'''(1) = 180 - 240 + 60 = 0.$$

De lo anterior se deduce que  $x = 0$  es un punto de inflexión. Para ver que no hay ninguno más (o sea, que  $x = 1$  no lo es), hagamos la cuarta derivada.

$$f^{(iv)}(x) = 360x - 240, \quad f^{(iv)}(1) = 120 > 0.$$

Por tanto, lo que se puede afirmar del punto  $x = 1$  es que la función es creciente y convexa en el mismo pues  $f'(1) = 5 > 0$  y  $f^{(iv)}(1) = 120 > 0$ .

## EJERCICIO 2

Calcula el valor del parámetro  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , para que el valor (en unidades de superficie) del área de la región determinada por la parábola  $f(x) = -x^2 + a^2$  y el eje de abscisas, coincida con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  en el punto de abscisa  $x = -a$ .

### Solución

Calculemos los puntos donde la función  $f$  corta al eje de abscisas:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + a^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow (x+a)(x-a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \\ x = a \end{cases}.$$

Entonces el área de la región determinada por la parábola  $f(x) = -x^2 + a^2$  y el eje de abscisas es:

$$\int_{-a}^a (-x^2 + a^2) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + a^2 x \right]_{-a}^a = \left( -\frac{a^3}{3} + a^3 \right) - \left( \frac{a^3}{3} - a^3 \right) = 2a^3 - \frac{2a^3}{3} = \frac{4a^3}{3}.$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  en el punto de abscisa  $x = -a$ , es justamente la derivada de  $f$  en el punto de abscisa  $x = -a$ , o sea,  $f'(-a)$ . Como  $f'(x) = -2x$ , entonces  $f'(-a) = 2a$ .

Entonces:

$$\frac{4a^3}{3} = 2a \Leftrightarrow 4a^3 = 6a \Leftrightarrow 4a^3 - 6a = 0 \Leftrightarrow 2a(2a^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2a^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}.$$

Como el valor del parámetro que se pide ha de ser mayor que cero, la solución es  $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$ .

## EJERCICIO 3

a) Encuentra dos matrices  $A$ ,  $B$  cuadradas de orden 2 que cumplan:

- Su suma es la matriz identidad de orden 2.
- Al restar a la matriz  $A$  la matriz  $B$  se obtiene la traspuesta de la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

b) Si  $M$  es una matriz cuadrada de orden 2 tal que  $|M| = 7$ , razona cuál es el valor de los determinantes  $|M^2|$  y  $|2M|$ .

### Solución

a) Las dos condiciones se pueden expresar mediante un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A - B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones se tiene:

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 1 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

De manera similar, restando ambas ecuaciones:

$$2B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 \\ -1 & -3/2 \end{pmatrix}$$

- b) Se sabe que el determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las matrices respectivas. Por tanto:

$$|M^2| = |M \cdot M| = |M| \cdot |M| = 7 \cdot 7 = 49.$$

Otra propiedad de los determinantes dice que si una fila (o una columna) de un determinante tiene un factor común, éste puede sacarse fuera del determinante.

La matriz  $2M$  es el resultado de multiplicar cada fila (o cada columna) de la matriz  $M$  por 2. Así pues, las dos filas de  $M$  (o las dos columnas tendrán al número 2 como factor común, con lo que:

$$|2M| = 2^2 |M| = 4 \cdot 7 = 28.$$

En general, si  $M$  es una matriz cuadrada de orden  $n$  y  $k$  es un número real cualquiera:  $|kM| = k^n |M|$ .

#### EJERCICIO 4

- a) Estudia la posición relativa del plano  $\pi \equiv x - y - z = a$  y la recta  $r \equiv \begin{cases} 2x + y + az = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ , en función del parámetro  $a \in \mathbb{R}$ .
- b) Calcula la distancia entre  $\pi$  y  $r$  para cada valor de  $a \in \mathbb{R}$ .

#### Solución

- a) Estudiemos el sistema conjunto formado por el plano y la recta:

$$\begin{cases} x - y - z = a \\ 2x + y + az = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

La matriz de los coeficientes es  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ . Su rango es al menos dos pues existe un menor de orden

dos distinto de cero:  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-2) = 3 \neq 0$ .

El determinante de la matriz  $A$  es  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (0 - a + 4) - (-1 + 0 - 2a) = a + 5$ . Entonces el

determinante se anula para  $a = -5$ , con lo que:  $\text{rango } A = 3 \Leftrightarrow a \neq -5$  y  $\text{rango } A = 2 \Leftrightarrow a = -5$ .

La matriz ampliada es  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & a \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- Claramente, si  $a \neq -5$ ,  $\text{rango } A = \text{rango } B = 3 = n$  (número de incógnitas), con lo que el sistema es compatible determinado (solución única). Esto quiere decir que, en este caso, el plano  $\pi$  y la recta  $r$  se cortan en un punto.

Veamos qué ocurre si  $a = 5$ .

La matriz ampliada queda de la forma  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , cuyo rango es tres pues tiene un menor de

orden tres distinto de cero:  $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 1 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -50$ .

- Por tanto, si  $a = -5$ ,  $\text{rango } A = 2 \neq \text{rango } B = 3$ , con lo que el sistema es incompatible (no existe solución). Entonces el plano  $\pi$  y la recta  $r$  son paralelos.

b) Hemos visto que si  $a \neq -5$ , el plano y la recta son secantes, con lo que la distancia entre ambos será nula:

- Si  $a \neq -5 \Rightarrow d(r, \pi) = 0$ .

Si  $a = -5$  el plano y la recta son paralelos y entonces la distancia entre ambos coincidirá con la distancia entre un punto cualquiera de la recta y el plano. En este caso la recta es  $r \equiv \begin{cases} 2x + y - 5z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ . Es fácil extraer un punto suyo. Si  $y = 1$ ,  $x = 2$ . Sustituyendo en la primera ecuación:  $4 + 1 - 5z = 0 \Rightarrow 5z = 5 \Rightarrow z = 1$ . Así pues, un punto de la recta es  $P(2, 1, 1)$ . Además, el plano es, en este caso,  $\pi \equiv x - y - z + 5 = 0$ .

La fórmula de la distancia entre una recta  $r$  y un plano  $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$  paralelos viene dada por

$d(r, \pi) = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ , donde  $P(a_1, a_2, a_3)$  es un punto de la recta. De este modo:

- Si  $a = -5 \Rightarrow d(r, \pi) = \frac{|1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{|2 - 1 - 1 + 5|}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$ .

### EJERCICIO 1

- a) Calcula los valores de los parámetros  $a, b \in \mathbb{R}$  para que la función

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x+1}$$

tenga como asíntota oblicua la recta  $y = 2x + 3$ .

- b) Para los valores encontrados, escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  en el punto de abscisas  $x = 0$ .

### Solución

- a) Si  $y = mx + n$  es una asíntota oblicua, entonces  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  y  $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$ .

En nuestro caso:

$$2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^2 + bx}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx}{x^2 + x} = a. \text{ Por tanto } a = 2.$$

$$3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + bx}{x+1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + bx - 2x^2 - 2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(b-2)x}{x+1} = b-2 \Rightarrow b-2 = 3 \Rightarrow b = 5.$$

- b) Para los valores encontrados en el apartado anterior la función queda de la forma:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x}{x+1}$$

La recta tangente en el punto de abscisas  $x = 0$  es:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

Derivemos y evaluemos en cero la derivada:

$$f'(x) = \frac{(4x+5) \cdot (x+1) - (2x^2 + 5x) \cdot 1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{5 \cdot 1}{1^2} = 5.$$

$$\text{Por otro lado: } f(0) = \frac{2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0}{0+1} = 0.$$

Entonces la recta tangente en el punto de abscisas  $x = 0$  es:

$$y - 0 = 5(x - 0) \Rightarrow y = 5x$$

### EJERCICIO 2

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx \qquad \int \frac{x^2 + x - 4}{x^3 - 4x} dx$$

### Solución:

- $\int \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx$ . Es inmediata pues la derivada del denominador es justamente el numerador. Por tanto:  

$$\int \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx = \ln |1 + \operatorname{sen}^2 x| + C.$$
- $\int \frac{x^2 + x - 4}{x^3 - 4x} dx$ . Es de tipo racional. El grado del denominador es mayor que el del numerador. Factoricemos el denominador:  $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x+2)(x-2)$ . Entonces podemos descomponer la fracción algebraica del siguiente modo:

$$\frac{x^2 + x - 4}{x^3 - 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x+2)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

Igualando denominadores y dando valores a  $x$  tenemos:

- ✓ Si  $x = 0$ , entonces  $-4 = -4A \Rightarrow A = 1$ .
- ✓ Si  $x = -2$ , entonces  $-2 = 8B \Rightarrow B = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$ .
- ✓ Si  $x = 2$ , entonces  $2 = 8C \Rightarrow C = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ .

Por tanto:

$$\int \frac{x^2 + x - 4}{x^3 - 4x} dx = \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+2} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-2} dx = \ln |x| - \frac{1}{4} \ln |x+2| + \frac{1}{4} \ln |x-2| + C.$$

### EJERCICIO 3

a) Sabiendo que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2$$

donde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , calcula los determinantes

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta.

- b) Razona que, puesto que  $|A| = 2$ , los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  deben ser distintos entre sí (no puede haber dos iguales).

### Solución:

- a) Calculemos el valor del primer determinante:

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} \\ \stackrel{(3)}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{(4)}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{(5)}{=} 5 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(6)}{=} 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 = 10$$

*Propiedades utilizadas:*

(1) y (3): Si dos determinantes tienen todos sus elementos iguales salvo, a lo sumo, los de una fila o columna, entonces se pueden sumar, dando como resultado otro determinante con la misma parte común y con el resultado de sumar las dos líneas respectivas.

(2) y (4): Un determinante con dos filas o dos columnas proporcionales vale cero.

(5): Si en un determinante multiplicamos todos los términos de una fila o de una columna por un número, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

(6): Si en un determinante se intercambian entre sí dos filas o dos columnas el determinante conserva el mismo valor absoluto, pero cambia de signo. Como se han hecho dos intercambios (1ª y 3ª fila y luego 2ª y 3ª fila), el determinante cambia dos veces de signo y permanece igual.

Calculemos ahora el valor del segundo determinante:

$$\begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+2a+1 & a^2+2b+1 & a^2+2c+1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} a^2 & a^2 & a^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a+1 & 2b+1 & 2c+1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \\ \stackrel{(2)}{=} \begin{vmatrix} 2a+1 & 2b+1 & 2c+1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \stackrel{(4)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2$$

*Propiedades utilizadas:*

(1) y (3): Si dos determinantes tienen todos sus elementos iguales salvo, a lo sumo, los de una fila o columna, entonces se pueden sumar, dando como resultado otro determinante con la misma parte común y con el resultado de sumar las dos líneas respectivas.

(2) y (4): Un determinante con dos filas o dos columnas iguales vale cero.

b) Si  $a = b$ , la primera y la segunda columna serían iguales y el determinante valdría cero, lo cual contradice que  $|A| = 2$ . Por tanto  $a \neq b$ .

Si  $a = c$ , la primera y la tercera columna serían iguales y el determinante valdría cero, lo cual contradice que  $|A| = 2$ . Por tanto  $a \neq c$ .

Del mismo modo se puede razonar si se supusiera que  $b \neq c$ . En este caso la segunda y tercera columna serían iguales y se llegaría también a contradicción. Por tanto  $b = c$ .

## EJERCICIO 4

a) Estudia la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{cases}$$

b) Calcula la distancia entre las rectas  $r$  y  $s$ .

### Solución:

a) Pasemos ambas rectas a paramétricas. Para ello hagamos  $z = \lambda$ :

$$\bullet \quad r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x + y = 1 + \lambda \\ 2x + y = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

Restando ambas ecuaciones:  $-x = -\lambda \Rightarrow x = \lambda$ .

Multiplicando la primera por  $-2$  y sumando a la segunda:  $-y = -1 \Rightarrow y = 1$ .

$$\text{Por tanto: } r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\bullet \quad s \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ x + 2y - z = 12 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ x + 2y = 12 + \lambda \end{cases}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:  $\lambda + 2y = 12 + \lambda \Rightarrow y = 6$ .

$$\text{Por tanto: } s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 6 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ambas rectas tienen el mismo vector director:  $\vec{u} = (1, 0, 1)$ . Luego ambas rectas han de ser paralelas o coincidentes. Un punto de  $r$  es  $P(0, 1, 0)$  y un punto de  $s$  es  $Q(0, 6, 0)$ . Como el vector  $\overrightarrow{PQ} = (0, 5, 0)$  no tiene la misma dirección que  $\vec{u}$  las rectas no pueden ser coincidentes. Por tanto  $r$  y  $s$  son paralelas.

b) Al ser paralelas, la distancia entre  $r$  y  $s$  coincidirá con la distancia entre un punto de  $r$ , por ejemplo el punto  $P(0, 1, 0)$ , y la recta  $s$ :

$$d(r, s) = d(P, s).$$

Esta distancia será también igual a la distancia de  $P$  a  $M$ , donde  $M$  es el punto de intersección de  $s$  con el plano  $\pi$  que pasa por  $P$  y es perpendicular a  $s$  (ver figura).

El vector  $\vec{u} = (1, 0, 1)$ , dirección de  $r$  y  $s$  nos servirá como vector normal del plano (así el plano será perpendicular a  $s$ ). Por tanto  $\pi \equiv x + z + D = 0$ . Como  $\pi$  pasa por  $P$ , claramente  $D = 0$ . Entonces  $\pi \equiv x + z = 0$ . El corte de este plano y  $s$  es justamente  $Q(0, 6, 0)$  (es muy fácil de comprobar). Luego  $M = Q$ . Por tanto:

$$d(r, s) = d(P, s) = d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{0^2 + 5^2 + 0^2} = 5.$$

