1) Sean $A$ y $B$ dos sucesos independientes tales que $P(B) = 0.05$ y $P(A/B) = 0.35$.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que suceda al menos uno de ellos? *(2 puntos)*
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el suceso $A$ pero no el $B$? *(2 puntos)*
2) En una agrupación musical el 60% de sus componentes son mujeres. El 20% de las mujeres y el 30% de los hombres de la citada agrupación están jubilados.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente de la agrupación, elegido al azar, esté jubilado? *(2 puntos)*
   b) Sabiendo que un componente de la agrupación, elegido al azar, está jubilado ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? *(2 puntos)*
3) En un hospital se han producido 200 nacimientos en un mes. De ellos, 105 son varones y, de éstos, 21 tienen los ojos azules. Asimismo se ha observado que 38 de las niñas nacidas en ese mes tienen los ojos azules. Se elige, al azar, un recién nacido entre los 200 citados.
   a) Calcule la probabilidad de que tenga los ojos azules. *(1 punto)*
   b) Si el recién nacido que se elige tiene los ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que sea un varón? *(1 punto)*

## [Soluciones]

1) Sean $A$ y $B$ dos sucesos independientes tales que $P(B) = 0.05$ y $P(A/B) = 0.35$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que suceda al menos uno de ellos? *(2 puntos)*

El suceso "Al menos uno de ellos" es el suceso unión (su verificación requiere que suceda $A$ ó $B$ o ambos a la vez): $A \cup B$. Sabemos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Como los sucesos son independientes, $P(A/B) = P(A) = 0,35$.
- También conocemos $P(B) = 0,05$.
- Por la fórmula de la probabilidad condicionada, $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow$

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = 0,35 \cdot 0,05 = 0,0175$$

Según todo lo anterior:

$$P(A \cup B) = 0,35 + 0,05 - 0,0175 = 0,3825$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el suceso $A$ pero no el $B$? *(2 puntos)*

Nos piden la probabilidad de que suceda $A$ y, a la vez (es decir, intersección), que no suceda $B$ (es decir, que suceda $B^C$): $P(A \cap B^C)$.

Si $A$ y $B$ son independientes, también lo son $A$ y $B^C$ (discutiremos esto más abajo). Es decir, $P(A/B^C) = P(A)$. Por tanto, usando la definición de probabilidad condicionada:

$$P(A \cap B^C) = P(A/B^C) \cdot P(B^C) = P(A) \cdot P(B^C) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = 0,35(1 - 0,05) = 0,3325$$

Retomamos la discusión aplazada. Si $A$ y $B$ son independientes, la verificación de $B$ no influye en la de $A$. Por tanto, la no verificación de $B$ tampoco. Luego $A$ y $B^C$ son, igualmente, independientes.
Pero podemos demostrarlo con rigor. El suceso $B^C/A$ consiste en, sabiendo con seguridad que $A$ se ha verificado, que no se cumpla $B$. Su suceso contrario es, entonces, $B/A$ porque, en nuestra situación, seguimos sabiendo con seguridad que $A$ se ha verificado. Como la probabilidad de un suceso más la de su contrario suman 1:

$$P(B^C/A) + P(B/A) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(B^C/A) = 1 - P(B/A) = 1 - P(B) = P(B^C)$$

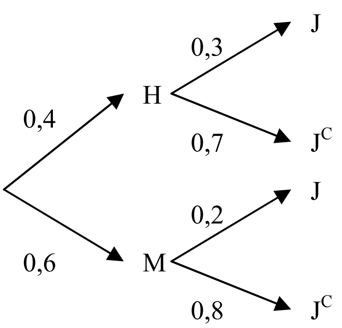
porque sabemos que $A$ y $B$ son independientes, por lo que $P(B/A) = P(B)$. Pues bien:

$$P(A/B^C) = \frac{P(A \cap B^C)}{P(B^C)} = \frac{P(B^C \cap A)}{P(B^C)} = \frac{P(B^C / A) \cdot p(A)}{P(B^C)} = \frac{P(B^C) \cdot p(A)}{P(B^C)} = P(A)$$

Luego $A$ y $B^C$ son, también, independientes, como queríamos demostrar.

2) En una agrupación musical el 60% de sus componentes son mujeres. El 20% de las mujeres y el 30% de los hombres de la citada agrupación están jubilados.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente de la agrupación, elegido al azar, esté jubilado? *(2 puntos)*




Éste es un problema típico de probabilidad total. Hay dos experiencias aleatorias sucesivas: escoger un componente al azar y anotar su sexo (H=hombre ó M=mujer). A continuación, una vez conocido el sexo, anotar si está jubilado (J) o no lo está ($J^C$).
Construimos el correspondiente diagrama en árbol (adjunto). Tenemos en cuenta para ello que, en cada situación, todas las probabilidades de las distintas posibilidades deben sumar 1. Por ejemplo, en la situación de partida, todas las probabilidades son H ó M.

Por tanto, si el 60% de los componentes son M, el resto (los H) constituyen el 40%. Igualmente, en la situación de tener escogida una persona que es H, como el 30% están jubilados, los no jubilados ($J^C$) son el 70%. Etc.
Entonces, la probabilidad de cada rama terminal del árbol es el producto de las probabilidades de las distintas ramas recorridas desde el punto origen (a la izquierda) hasta dicho punto terminal. Y eso es así por la definición de probabilidad condicionada. Por ejemplo, calculemos la probabilidad de la primera rama terminal (la primera J). Cuando llegamos ahí es porque hemos escogido una persona que ha sido, en primer lugar, H y, además, J. O sea:

$$P(\mathrm{J}\cap\mathrm{H}) = P(\mathrm{J/H})\cdot P(\mathrm{H}) = 0{,}3\cdot 0{,}4 = 0{,}12$$

Pues bien, una vez explicado cómo se construye el árbol y cómo funciona, para averiguar la probabilidad de escoger a un jubilado, por el teorema de la probabilidad total, sumamos las probabilidades de las distintas terminales donde aparece J:

$$\mathrm{P(J)} = P(\mathrm{J/H})\cdot P(\mathrm{H}) + P(\mathrm{J/M}\cdot P(\mathrm{M}) = 0{,}3\cdot 0{,}4 + 0{,}2\cdot 0{,}6 = 0{,}24$$

b) Sabiendo que un componente de la agrupación, elegido al azar, está jubilado ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? *(2 puntos)*

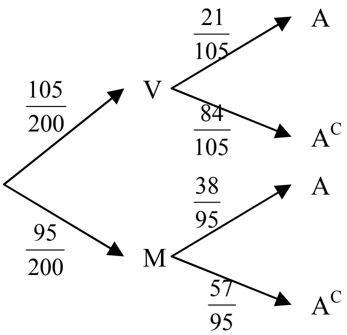
Y éste es un problema típico de probabilidades a posteriori (Fórmula de Bayes):

$$P(\mathrm{M/J}) = \frac{P(\mathrm{M}\cap\mathrm{J})}{P(\mathrm{J})} = \frac{P(\mathrm{J}\cap\mathrm{M})}{P(\mathrm{J})} = \frac{P(\mathrm{J/M})\,p(\mathrm{M})}{P(\mathrm{J})} = \frac{0{,}2\cdot 0{,}6}{0{,}24} = 0{,}5$$

3) En un hospital se han producido 200 nacimientos en un mes. De ellos, 105 son varones y, de éstos, 21 tienen los ojos azules. Asimismo se ha observado que 38 de las niñas nacidas en ese mes tienen los ojos azules. Se elige, al azar, un recién nacido entre los 200 citados.

a) Calcule la probabilidad de que tenga los ojos azules. *(1 punto)*

Este problema se puede enfocar igual que el anterior, aunque después lo haremos de otra forma. Construimos el correspondiente diagrama en árbol (V=varón; M=mujer; A=tener los ojos azules; $A^C$=no tener los ojos azules), teniendo en cuenta los datos del problema, la fórmula de probabilidad de Laplace y las indicaciones dadas en el problema anterior.




Entonces, por el Teorema de la Probabilidad Total (suma de todas las ramas terminales en las que aparece A):

$$P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A/V})\cdot P(\mathrm{V}) + P(\mathrm{A/M})\cdot P(\mathrm{M}) = \frac{21}{105}\frac{105}{200} + \frac{38}{95}\frac{95}{200} = \frac{59}{200} = 0{,}295$$

De otra forma: El problema puede enfocarse mediante una tabla de contingencia. En primer lugar, ponemos los datos que nos da el problema (tabla de la izquierda) y, a continuación, considerando los totales, rellenamos los datos que nos faltan (tabla final, de la derecha):

| | A | $A^C$ | Total |
|---|---|---|---|
| V | 21 | | 105 |
| M | 38 | | |
| Total | | | 200 |

| | A | $A^C$ | Total |
|---|---|---|---|
| V | 21 | 84 | 105 |
| M | 38 | 57 | 95 |
| Total | 59 | 141 | 200 |

Según los datos de la tabla completa, por Laplace, obtenemos el mismo resultado que antes:

$$P(\mathrm{A}) = \frac{59}{200} = 0{,}295$$

b) Si el recién nacido que se elige tiene los ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que sea un varón? *(1 punto)*

Abordando el problema por la forma del esquema en árbol, por la Fórmula de Bayes:

$$P(\mathrm{V/A}) = \frac{P(\mathrm{V} \cap \mathrm{A})}{P(\mathrm{A})} = \frac{P(\mathrm{A/V}) \cdot P(\mathrm{V})}{P(\mathrm{A})} = \frac{\frac{21}{105}\,\frac{105}{200}}{\frac{59}{200}} = \frac{\frac{21}{200}}{\frac{59}{200}} = \frac{21}{59} = 0{,}3559$$

Y por tablas de contingencia:

$$P(\mathrm{V/A}) = \frac{21}{59} = 0{,}3559$$

porque, de entre los 59 niños con ojos azules, 21 son varones, según vemos en la tabla de contingencia.