

1. En una clase de bachillerato, el 60% de los alumnos aprueban matemáticas, el 50% aprueban inglés y el 30% aprueban las dos asignaturas. Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar:
 - a) **[1 punto]** No apruebe matemáticas y no apruebe inglés.
 - b) **[1 punto]** Apruebe matemáticas sabiendo que ha aprobado inglés.
 - c) **[0,5 puntos]** ¿Son independientes los sucesos “aprobar matemáticas” y “aprobar inglés”? Razona la respuesta.
2. En un colegio se imparten, como primer idioma, inglés, alemán y francés. El 65 % de los alumnos estudian inglés, el 20 % alemán y el resto francés. La asignatura de robótica es optativa y la estudia el 30 % de los alumnos de inglés, el 50 % de los que estudian alemán y el 70 % de los que cursan francés. Se elige un alumno al azar.
 - a) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que estudie robótica?
 - b) **[1 punto]** Si el alumno elegido no estudia robótica, ¿cuál es la probabilidad de que estudie francés?
 - c) **[0,5 puntos]** Si el alumno elegido estudia robótica, ¿cuál es la probabilidad de que no estudie alemán?
3. Supongamos que un estudiante responde al azar a un examen de 8 preguntas de verdadero o falso.
 - a) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que acierte exactamente 4?
 - b) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que acierte por lo menos seis?
 - c) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es el número esperado de respuestas correctas? ¿Y la desviación típica?
4. El tiempo que un alumno puede estar concentrado y escuchar al profesor en una clase de Matemáticas se modela como una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.
 - a) **[1 punto]** Hallar la probabilidad de que un alumno esté concentrado más de 20 minutos.
 - b) **[1 punto]** Hallar la probabilidad de que un alumno esté concentrado entre 10 y 30 minutos.
 - c) **[0,5 puntos]** La probabilidad de que un alumno esté concentrado más de x minutos vale 0,75. Hallar este valor de x minutos.

Soluciones

1. En una clase de bachillerato, el 60% de los alumnos aprueban matemáticas, el 50% aprueban inglés y el 30% aprueban las dos asignaturas. Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar:

- a) **[1 punto]** No apruebe matemáticas y no apruebe inglés.

Llamemos M al suceso “aprobar matemáticas”, I al suceso “aprobar inglés”. Entonces, según el enunciado,

$P(M) = 0,6$, $P(I) = 0,5$ y $P(M \cap I) = 0,3$. La probabilidad de no aprobar matemáticas ni inglés será:

$$P(\overline{M} \cap \overline{I}) = P(\overline{M \cup I}) = 1 - P(M \cup I) = 1 - [P(M) + P(I) - P(M \cap I)] = 1 - (0,6 + 0,5 - 0,3) = 0,2.$$

- b) **[1 punto]** Apruebe matemáticas sabiendo que ha aprobado inglés.

Se trata de una probabilidad condicionada: $P(M / I) = \frac{P(M \cap I)}{P(I)} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$.

- c) **[0,5 puntos]** ¿Son independientes los sucesos “aprobar matemáticas” y “aprobar inglés”? Razona la respuesta.

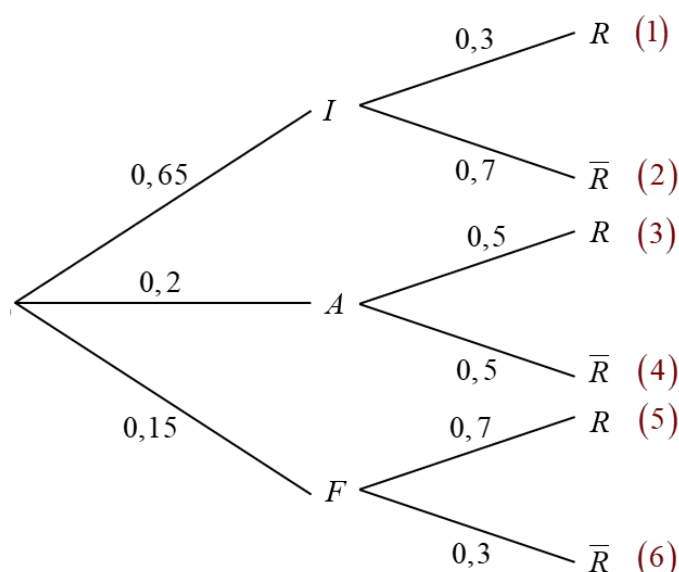
$P(M) \cdot P(I) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3 = P(M \cap I)$. Por tanto, los sucesos son independientes

2. En un colegio se imparten, como primer idioma, inglés, alemán y francés. El 65 % de los alumnos estudian inglés, el 20 % alemán y el resto francés. La asignatura de robótica es optativa y la estudia el 30 % de los alumnos de inglés, el 50 % de los que estudian alemán y el 70 % de los que cursan francés. Se elige un alumno al azar.

Antes de contestar a cada uno de los apartados, vamos a declarar cada uno de los sucesos y elaboraremos un diagrama de árbol.

Llamemos, respectivamente, I , A y F , a los sucesos “estudiar inglés”, “estudiar alemán” y “estudiar francés”.

Llamemos también R al suceso “estudiar robótica”. La información resumida en un diagrama de árbol queda así:



- a) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que estudie robótica?

$$P(R) = (1) + (3) + (5) = 0,65 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,5 + 0,15 \cdot 0,7 = 0,4.$$

- b) **[1 punto]** Si el alumno elegido no estudia robótica, ¿cuál es la probabilidad de que estudie francés?

$$P(F / \overline{R}) = \frac{P(F \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{(6)}{1 - P(R)} = \frac{0,15 \cdot 0,3}{1 - 0,4} = \frac{0,045}{0,6} = 0,075.$$

- c) **[0,5 puntos]** Si el alumno elegido estudia robótica, ¿cuál es la probabilidad de que no estudie alemán?

$$P(\overline{A} / R) = 1 - P(A / R) = 1 - \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = 1 - \frac{0,2 \cdot 0,5}{0,4} = 1 - 0,25 = 0,75.$$

3. Supongamos que un estudiante responde al azar a un examen de 8 preguntas de verdadero o falso.

Si llamamos éxito a “acertar una pregunta”, la variable X , número de éxitos, sigue una distribución binomial con $n=8$ y $p=0,5$: $X \rightarrow B(8;0,5)$

a) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que acierte exactamente 4?

$$P(X=4) = \binom{8}{4} \cdot 0,5^4 \cdot 0,5^4 = 0,2734.$$

b) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que acierte por lo menos seis?

$$P(X \geq 6) = P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) = 0,1094 + 0,0313 + 0,0039 = 0,1446.$$

c) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es el número esperado de respuestas correctas? ¿Y la desviación típica?

El número esperado de respuestas correctas es la media o esperanza de la binomial: $\mu = np = 8 \cdot 0,5 = 4$.

La desviación típica es $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{8 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = \sqrt{2} = 1,4142$.

4. El tiempo que un alumno puede estar concentrado y escuchar al profesor en una clase de Matemáticas se modela como una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

Si llamamos X a la variable “tiempo en minutos que el alumno está concentrado y escucha al profesor en una clase de Matemáticas”, X sigue una distribución normal de media $\mu=15$ y desviación $\sigma=5$: $X \rightarrow N(15,5)$.

a) **[1 punto]** Hallar la probabilidad de que un alumno esté concentrado más de 20 minutos.

$$P(X > 20) = P\left(Z > \frac{20-15}{5}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587.$$

b) **[1 punto]** Hallar la probabilidad de que un alumno esté concentrado entre 10 y 30 minutos.

$$\begin{aligned} P(10 < X < 30) &= P\left(\frac{10-15}{5} < Z < \frac{30-15}{5}\right) = P(-1 < Z < 3) = P(Z < 3) - P(Z < -1) = \\ &= P(Z < 3) - P(Z > 1) = P(Z < 3) - [1 - P(Z < 1)] = 0,9987 - (1 - 0,8413) = 0,84. \end{aligned}$$

c) **[0,5 puntos]** La probabilidad de que un alumno esté concentrado más de x minutos vale 0,75. Hallar este valor de x minutos.

Una observación: puesto que $P(X > x) = 0,75$, debe ser $x < 15$, ya que se sabe que $P(X > 15) = 0,5$ y $0,75 > 0,5$. Entonces $\frac{x-15}{5} < 0 \Rightarrow \frac{15-x}{5} > 0$. Teniendo en cuenta lo anterior ya es fácil hacer este apartado.

$$P(X > x) = 0,75 \Rightarrow P\left(Z > \frac{x-15}{5}\right) = 0,75 \Rightarrow P\left(Z < \frac{15-x}{5}\right) = 0,75.$$

Mirando en la tabla de la normal estándar, se tiene que

$$\frac{15-x}{5} = 0,675 \Rightarrow -x = 0,675 \cdot 5 - 15 \Rightarrow -x = -11,625 \Rightarrow x = 11,625 \text{ minutos.}$$