1. Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} y+z=2 \\ -2x+y+z=-1 \\ (2-2m)x+(2m-2)z=m-1 \end{cases}$, se pide:

   a) **[1 punto]** Discutirlo de manera razonada según los valores del parámetro m.

   b) **[2 puntos]** Resolverlo en todos aquellos casos en los que el sistema sea compatible.

2. Un equipo de fútbol gana 4 partidos de cada 6 que juega en casa y 2 de cada 5 que juega fuera.
   a) **[1 punto]** Sin saber dónde jugará el próximo partido, calcula la probabilidad de que gane.
   b) **[1 punto]** Si el último partido del campeonato no lo ganó, ¿cuál es la probabilidad de que se jugara en casa?

3. En una clase de 45 alumnos, la probabilidad de que una persona tenga los ojos azules es $0,35$.
   a) **[0,5 puntos]** Explica cuál es la variable objeto de estudio y qué clase de distribución de probabilidad sigue. Calcula, además, su media y su varianza.
   b) **[1 punto]** Usa la fórmula asociada a esta distribución para hallar la probabilidad de que exactamente 10 alumnos tengan los ojos azules.
   c) **[1 punto]** Calcula razonadamente la probabilidad de que menos de 23 alumnos tengan los ojos azules.

4. Una empresa fabrica tornillos cuyo diámetro sigue una distribución normal de media 5 mm. Se sabe que el 16,35% de los tornillos tienen un diámetro inferior a 4,5 mm.
   a) **[1 punto]** ¿Cuál es la desviación típica?
   b) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que un tornillo tenga un diámetro entre 4 y 6 mm?
   c) **[1 punto]** El 1% de los tornillos se rechazan por tener un diámetro demasiado grande. ¿A partir de qué valor del diámetro se rechazará un tornillo?

Soluciones

1. Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} y+z=2 \\ -2x+y+z=-1 \\ (2-2m)x+(2m-2)z=m-1 \end{cases}$, se pide:

   a) **[1 punto]** Discutirlo de manera razonada según los valores del parámetro m.

   b) **[2 puntos]** Resolverlo en todos aquellos casos en los que el sistema sea compatible.

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2-2m & 0 & 2m-2 \end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos dos porque contiene un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=0-(-2)=2$. Calculemos ahora su determinante:

$$|A|=(2-2m)-(2-2m-4m+4)=4m-4=0 \Leftrightarrow m=1 \Rightarrow \begin{cases} r(A)=3 \text{ si } m\neq 1 \\ r(A)=2 \text{ si } m=1 \end{cases}$$

Si llamamos B a la matriz ampliada, deducimos que, si $m\neq 1$, $r(A)=r(B)=3=n$, y el sistema es compatible determinado (solución única). Hallemos tal solución usando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 2m-2 \end{vmatrix}}{4m-4}=\frac{4m-4+m-1-(m-1-2m+2)}{4m-4}=\frac{6m-6}{4m-4}=\frac{6(m-1)}{4(m-1)}=\frac{3}{2}\ ;$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2-2m & m-1 & 2m-2 \end{vmatrix}}{4m-4}=\frac{4-4m-2m+2-(-2+2m-8m+8)}{4m-4}=\frac{0}{4m-4}=0\ ;$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2-2m & 0 & m-1 \end{vmatrix}}{4m-4}=\frac{-2+2m-(4-4m-2m+2)}{4m-4}=\frac{8m-8}{4m-4}=\frac{8(m-1)}{4(m-1)}=2$$

Si $m=1$ la matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo rango es claramente 2.

Por tanto, en este caso, $r(A)=r(B)=2<n=3$ y el sistema es compatible indeterminado: infinitas soluciones. Eliminando la tercera ecuación y llamando $z=\lambda$, el sistema queda del siguiente modo:

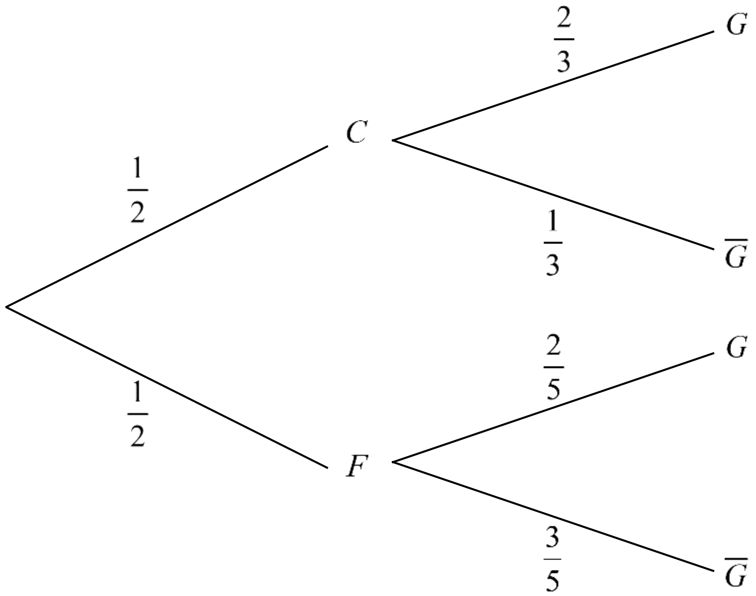
$$\begin{cases} y+\lambda=2 \\ -2x+y+\lambda=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2-\lambda \\ -2x+y=-1-\lambda \end{cases}.$$

Sustituyendo el valor de y en la segunda ecuación: $-2x+2-\lambda=-1-\lambda \Rightarrow -2x=-3 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

Por tanto, las infinitas soluciones del sistema son $x=\dfrac{3}{2}$, $y=2-\lambda$, $z=\lambda$.

2. Un equipo de fútbol gana 4 partidos de cada 6 que juega en casa y 2 de cada 5 que juega fuera.
   a) **[1 punto]** Sin saber dónde jugará el próximo partido, calcula la probabilidad de que gane.
   b) **[1 punto]** Si el último partido del campeonato no lo ganó, ¿cuál es la probabilidad de que se jugara en casa?

Llamemos C al suceso "jugar en casa" y F al suceso "jugar fuera". Llamemos también G al suceso "que el equipo gane". Elaboremos un diagrama con los datos del enunciado.



a) $P(G)=P(G\cap C)+P(G\cap F)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{3+5}{15}=\dfrac{8}{15}\cong 0,533$.

b) $P\left(C/\overline{G}\right)=\dfrac{P\left(C\cap\overline{G}\right)}{P\left(\overline{G}\right)}=\dfrac{1/2\cdot 1/3}{1-8/15}=\dfrac{1/6}{7/15}=\dfrac{15}{42}=\dfrac{5}{14}\cong 0,357$.

3. En una clase de 45 alumnos, la probabilidad de que una persona tenga los ojos azules es $0,35$.
   a) **[0,5 puntos]** Explica cuál es la variable objeto de estudio y qué clase de distribución de probabilidad sigue. Calcula, además, su media y su varianza.

      La variable objeto de estudio es el número de éxitos, donde el éxito consiste en que una persona tenga los ojos de color azul. Esta variable sigue una distribución binomial con $n=45$ y $p=0,35$ (que es la probabilidad de éxito): $B(45,\ 0,35)$.

      La media es $\overline{x}=np=45\cdot 0,35=15,75$. La varianza es $\sigma^2=npq=45\cdot 0,35\cdot 0,65=10,2375$, con lo que la desviación típica será $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{45\cdot 0,35\cdot 0,65}=3,2$.

   b) **[1 punto]** Usa la fórmula asociada a esta distribución para hallar la probabilidad de que exactamente 10 alumnos tengan los ojos azules.

      $P(X=10)=\dbinom{45}{10}\cdot 0,35^{10}\cdot 0,65^{35}=0,025$.

   c) **[1 punto]** Calcula razonadamente la probabilidad de que menos de 23 alumnos tengan los ojos azules.

      Puesto que $np=45\cdot 0,35=15,75\geq 5$ y $nq=45\cdot 0,65=29,25\geq 5$, aproximaremos esta distribución por una normal $N(15,75\ ,\ 3,2)$. Entonces:

      $P(X<23)=P(X\leq 22,5)=P\left(Z\leq\dfrac{22,5-15,75}{3,2}\right)=P(Z\leq 2,11)=0,9826$.

4. Una empresa fabrica tornillos cuyo diámetro sigue una distribución normal de media 5 mm. Se sabe que el 16,35% de los tornillos tienen un diámetro inferior a 4,5 mm.

   a) **[1 punto]** ¿Cuál es la desviación típica?

      Sabemos que el 16,35% de los tornillos tienen un diámetro inferior a 4,5 mm, es decir:

$$P(X \le 4,5) = 0,1635 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{4,5-5}{\sigma}\right) = 0,1635 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{-0,5}{\sigma}\right) = 0,1635 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \le \frac{0,5}{\sigma}\right) = 0,1635 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{0,5}{\sigma}\right) = 0,8365 \Rightarrow \frac{0,5}{\sigma} = 0,98 \Rightarrow \sigma = \frac{0,5}{0,98} \Rightarrow \sigma = 0,51 .$$

   b) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que un tornillo tenga un diámetro entre 4 y 6 mm?

$$P(4 \le X \le 6) = P(X \le 6) - P(X \le 4) = P\left(Z \le \frac{6-5}{0,51}\right) - P\left(Z \le \frac{4-5}{0,51}\right) =$$

$$= P(Z \le 1,96) - P(Z \le -1,96) = P(Z \le 1,96) - \left(1 - P(Z \le 1,96)\right) = 2P(Z \le 1,96) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0,975 - 1 = 0,95 .$$

   c) **[1 punto]** El 1% de los tornillos se rechazan por tener un diámetro demasiado grande. ¿A partir de qué valor del diámetro se rechazará un tornillo?

$$P(X \ge x) = 0,01 \Rightarrow 1 - P(X \le x) = 0,01 \Rightarrow P(X \le x) = 0,99 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{x-5}{0,51}\right) = 0,99 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-5}{0,51} = 2,33 \Rightarrow x = 2,33 \cdot 0,51 + 5 \Rightarrow x = 6,19 .$$

      Por tanto, un tornillo se rechazará si su diámetro mide más de 6,19 mm.