

BACHILLERATO

edebé

Matemáticas **1**

edebé 
proyecto global interactivo

6

BLOQUE 2. GEOMETRÍA

Números complejos

- 1. Número complejo
 - ≡ 1.1. Conjugado y opuesto de un número complejo
- 2. Operaciones en forma binómica
 - ≡ 2.1. Suma y resta
 - ≡ 2.2. Multiplicación y división
- 3. Representación gráfica
- 4. Forma polar de un número complejo
 - ≡ 4.1. Operaciones en forma polar
- 5. Ecuaciones con soluciones complejas
 - ≡ 5.1. Ecuaciones de segundo grado
 - ≡ 5.2. Ecuaciones bicuadradas



Presentación



Problemas
interactivos



Libros

- Aprende tanto la historia como muchas de las curiosidades de los números imaginarios con *An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$* , de Paul J. Nahin. Se trata de una narración muy entretenida donde podrás ver algunas de las aplicaciones de los números complejos: desde las leyes de Kepler hasta los circuitos eléctricos.
- En la publicación *Una Introducción a los Números Complejos* (Universidad de los Andes, 2001) encontrarás un primer capítulo dedicado a la historia de los números complejos:

<http://links.edebe.com/g48p>



Web

Aprende sobre los números complejos con la página web de la Universidad de Valladolid en: <http://links.edebe.com/kdj>



Películas

Proof, de John Madden (el director de *Shakespeare in Love*), gira en torno a la figura de un genial matemático. En ella, uno de los personajes principales, Hal, tiene una banda de música. Escucha cómo suena su canción titulada *i* (de *imaginaria*), relacionada con los números imaginarios, y que dura... ¡tres minutos de silencio!

EN CONTEXTO

- a> Reflexiona durante unos momentos.
 - ¿Qué sabes sobre los números complejos?
 - ¿Qué preguntas o inquietudes te surgen sobre ellos?
 - ¿Qué te gustaría investigar sobre este tema?
- b> La figura que aparece en esta página corresponde al conjunto de Mandelbrot, el más conocido de los conjuntos fractales.
 - ¿Qué es un fractal?
 - ¿Qué relación tiene el conjunto de Mandelbrot con los números complejos?
 - Busca información en Internet sobre los conjuntos de Julia. ¿Qué relación tienen con el conjunto de Mandelbrot?
- c> Maravíllate con algunas de las fotografías que puedes ver en el siguiente enlace y piensa qué otros fractales puedes encontrar en la naturaleza: <http://links.edebe.com/jv7p>.

1. Número complejo

1.1. Conjugado y opuesto de un número complejo

 LENGUAJE MATEMÁTICO

Los números complejos suelen representarse con la letra z .

A la parte real de un número complejo a la llamaremos $\text{Re}(z)$, mientras que a la parte imaginaria b la llamaremos $\text{Im}(z)$.

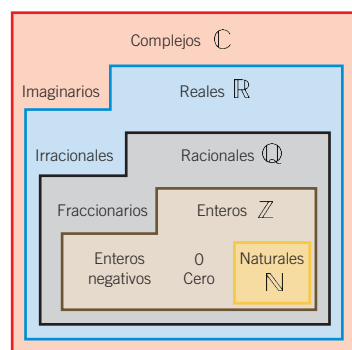
El conjunto de los números complejos se simboliza mediante la letra $\mathbb{C}$.

 FÍJATE

Los **enteros** ($\mathbb{Z}$) son una extensión de los **naturales** ($\mathbb{N}$) que admiten soluciones negativas de restas.

Los **racionales** ($\mathbb{Q}$) son una extensión de los enteros que incluyen cocientes no exactos.

Los **reales** ($\mathbb{R}$) son una extensión de los racionales e incluyen los irracionales, números que no pueden expresarse como un cociente de enteros, como π , $\sqrt{2}$ o el número e .



Relaciones entre los conjuntos numéricos

— ¿Cómo definirías los complejos?

1. Número complejo

Sabemos que la ecuación $x^2 = -4$ no tiene solución, pues no existe ningún número real cuyo cuadrado sea un número negativo. Sin embargo, podríamos expresar la solución como $x = \sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = \pm 2\sqrt{-1}$.

Si ahora definimos el número $i = \sqrt{-1}$, podemos expresar la solución de la ecuación como $x = \pm 2i$.

El número $i = \sqrt{-1}$ se denomina **unidad imaginaria**, y las expresiones numéricas en las que aparece explícitamente, como, por ejemplo, $2 + 3i$, $1 - \frac{1}{4}i$, $\sqrt{7} + 2i$, se denominan **números complejos**.

 Las expresiones de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales, se denominan **números complejos**, siendo a la parte real y b la parte imaginaria.

La expresión de un complejo como la suma de una parte real y una parte imaginaria se denomina **forma binómica** de un número complejo:

$$z = a + bi$$

Observa que un número real es un caso particular de número complejo $a + bi$, cuya parte imaginaria es 0 ($b = 0$).

Análogamente, los números complejos cuya parte real es 0 ($a = 0$), se llaman **números imaginarios**.

1.1. Conjugado y opuesto de un número complejo

Dado un número complejo, podemos obtener su conjugado y su opuesto del modo que se detalla a continuación.

El **conjugado** de un número complejo se obtiene cambiando el signo de la parte imaginaria. Así, el conjugado ($\bar{z}$) del número complejo $z = a + bi$ es:

$$\bar{z} = a - bi$$

El **opuesto** de un número complejo se obtiene cambiando el signo de la parte real y de la parte imaginaria. Así, el opuesto ($-z$) del número complejo $z = a + bi$ es:

$$-z = -a - bi$$

1 EJEMPLO

Identifica las partes imaginaria y real de los siguientes números complejos y halla su conjugado y su opuesto:

a) $z = 6 + 2i$

b) $z = 5$

Solución

RESOLUCIÓN:

a) La parte real es $a = \text{Re}(z) = 6$ y la parte imaginaria es $b = \text{Im}(z) = 2$.

El conjugado es $\bar{z} = 6 - 2i$ y el opuesto de z es $-z = -6 - 2i$.

b) La parte real es $a = \text{Re}(z) = 5$ y la parte imaginaria es $b = \text{Im}(z) = 0$.

El conjugado de z es $\bar{z} = 5$ y el opuesto de z es $-z = -5$.



Ejercicios y problemas
3 a 5

2. Operaciones en forma binómica

Los números complejos se utilizan en la ingeniería electrónica y otros campos de la física. Por eso, es importante ver cómo se efectúan operaciones con ellos. Las mismas operaciones definidas para los números reales pueden realizarse con los números complejos, teniendo en cuenta que $i^2 = -1$.

2.1. Suma y resta

Para **sumar** dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, se suman por separado las partes reales y las partes imaginarias:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

La suma de dos o más números complejos cumple las mismas propiedades que las sumas de los números reales.

Para **restar** dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, se le suma al minuendo el opuesto del sustraendo:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a + bi) + (-c - di) = (a - c) + (b - d)i$$

2 EJEMPLO

Dados los números complejos $z_1 = 56 + 4i$ y $z_2 = 4 + 8i$, calcula:

a) $z_1 + z_2$

b) $z_1 - z_2$

Solución

COMPRENSIÓN: Para realizar la suma y la diferencia de números complejos, hay que separar la parte real y la parte imaginaria.

RESOLUCIÓN:

a) $z_1 + z_2 = 56 + 4i + 4 + 8i = (56 + 4) + (4 + 8)i = 60 + 12i$

b) $z_1 - z_2 = (56 + 4i) - (4 + 8i) = (56 - 4) + (4 - 8)i = 52 - 4i$

3 EJEMPLO

Dados los números complejos $z_1 = 6 - 4i$, $z_2 = 8i$ y $z_3 = 3 + i$, demuestra que:

a) La suma de dos de ellos cumple la propiedad conmutativa.

b) La suma de los tres cumple la propiedad asociativa.

Solución

COMPRENSIÓN: Para demostrar las dos propiedades, basta con realizar las operaciones a ambos lados de la igualdad y comprobar que los resultados coinciden.

RESOLUCIÓN:

a) $z_1 + z_2 = (6 - 4i) + 8i = 6 + 4i$

$z_2 + z_1 = 8i + (6 - 4i) = 6 + 4i$

$z_2 + z_3 = 8i + (3 + i) = 3 + 9i$

$z_3 + z_2 = (3 + i) + 8i = 3 + 9i$

$z_1 + z_3 = (6 - 4i) + (3 + i) = 9 - 3i$

$z_3 + z_1 = (3 + i) + (6 - 4i) = 9 - 3i$

b) $z_1 + (z_2 + z_3) = (6 - 4i) + ((8i) + (3 + i)) = (6 - 4i) + (3 + 9i) = 9 + 5i$

$(z_1 + z_2) + z_3 = ((6 - 4i) + 8i) + (3 + i) = 6 + 4i + (3 + i) = 9 + 5i$

2. Operaciones en forma binómica

2.1. Suma y resta

2.2. Multiplicación y división

RECUERDA

Propiedades de la suma de los números complejos:

— Conmutativa:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

— Asociativa:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

— 0 es elemento neutro:

$$z + 0 = 0 + z = z$$

— Elemento opuesto de z es $-z$:

$$z + (-z) = 0$$

Comprueba estas propiedades escribiendo los números en su forma binómica.

INTERNET

En el siguiente enlace se explica cómo trabajar la representación gráfica de la suma y la resta de los números complejos:

<http://links.edebe.com/mfv>

2.2. Multiplicación y división



AMPLÍA

Utiliza el producto de números complejos en forma binomial para comprobar que se cumplen las siguientes propiedades:

- Asociativa:
 $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
- Conmutativa:
 $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
- Elemento neutro:
 $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$
- Distributiva de la multiplicación respecto de la suma:
 $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Para **multiplicar** dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, procederemos como si multiplicáramos dos binomios, teniendo en cuenta que $i^2 = -1$. El resultado de la multiplicación es un número complejo:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Para **dividir** dos números complejos, escribimos la operación en forma de fracción y multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador eliminando la parte imaginaria del denominador. El resultado de la división es otro número complejo:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)} = \frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 - cdi + dci + d^2} = \\ &= \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \end{aligned}$$

4 EJEMPLO

Dados los números $z_1 = 3 + 6i$ y $z_2 = 2 + 3i$, calcula:

- a) $z_1 \cdot z_2$ b) $\frac{z_1}{z_2}$ c) z_2^3

Solución

COMPRENSIÓN:

Calcularemos los resultados desarrollando las expresiones correspondientes. En el caso de la potencia, multiplicaremos el número complejo tantas veces como indique el numerador.

RESOLUCIÓN:

$$\text{a) } z_1 \cdot z_2 = (3 + 6i) \cdot (2 + 3i) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3i + 6i \cdot 2 + 6 \cdot 3i^2 = 6 + 9i + 12i + 18i^2 = 6 + 21i - 18 = -12 + 21i$$

$$\text{b) } \frac{z_1}{z_2} = \frac{(3 + 6i)}{(2 + 3i)} \cdot \frac{(2 - 3i)}{(2 - 3i)} = \frac{6 - 9i + 12i + 18}{4^2 + 9^2} = \frac{24 + 3i}{97} = 0,25 + 0,03i$$

$$\text{c) } z_2^2 = z_2 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (2 + 3i) = 4 + 6i + 6i - 9 = -5 + 16i$$

$$z_1^3 = z_1 \cdot z_1^2 = (2 + 3i) \cdot (-5 + 16i) = -10 + 36i - 15i - 54 = -64 + 21i$$

COMPROBACIÓN:

Puedes comprobar el resultado utilizando la calculadora en línea que encontrarás en el siguiente enlace: <http://www.wolframalpha.com>.

Inverso de un número complejo

Del mismo modo que los números reales, todo número complejo $z \neq 0$ tiene un número inverso z^{-1} que cumple:

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

Para calcular el inverso de un número complejo, basta con escribir z^{-1} en forma de fracción y efectuar la división correspondiente:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$



FÍJATE

Potencias de i

Las potencias sucesivas del número imaginario i siguen el ciclo

$$1 \rightarrow i \rightarrow -1 \rightarrow -i \rightarrow 1:$$

$$i^0 = 1 \quad i^1 = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i$$

$$i^4 = 1 \quad i^5 = i \quad i^6 = -1 \quad i^7 = -i$$

...

- En grupo, hallad una fórmula para determinar el valor de cualquier potencia de i .



Ejercicios y problemas
8 a 11

3. Representación gráfica

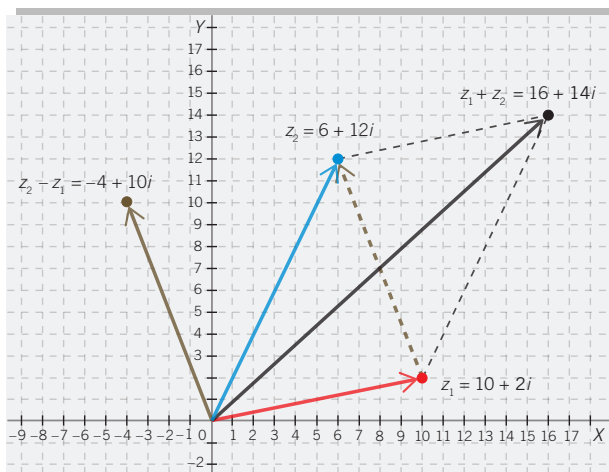
Los números reales se representan por un punto situado en la recta real. Los números complejos, en cambio, al tener una parte real y una parte imaginaria, los representaremos en un plano denominado **plano complejo**. Para ello, utilizamos un sistema de coordenadas cartesianas en que:

- En el eje de abscisas, se representa la parte real de los números complejos. Este eje se denomina **eje real**.
- En el eje de ordenadas, se representan los números imaginarios y recibe el nombre de **eje imaginario**.

Observa que cada punto (a, b) de este plano se corresponde con un número complejo. Cada uno de estos puntos recibe el nombre de **afijo** de un número complejo.

 El punto (a, b) del plano complejo que representa el número $z = a + bi$ se denomina **afijo** de z .

Cada afijo del plano complejo determina un vector con el origen de coordenadas, de modo que la suma y la resta de números complejos puede interpretarse como suma y resta de vectores.

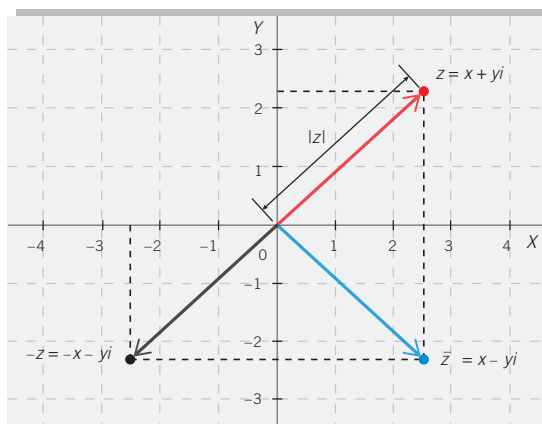


Suma y resta de $z_1 = 10 + 2i$ y $z_2 = 6 + 12i$.

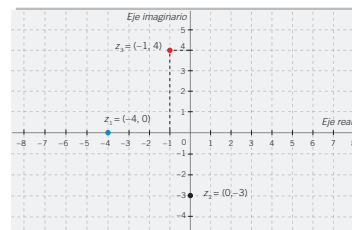
Al representar gráficamente un número complejo, su conjugado y su opuesto, podemos ver las relaciones geométricas que se establecen entre ellos.

Los afijos de los números complejos z y $-z$ son simétricos respecto del origen de coordenadas.

Los afijos de un número complejo y su conjugado z y $\bar{z}$ son simétricos respecto al eje real.



Representación gráfica (general) del afijo de un número complejo, de su conjugado y su opuesto.



Plano complejo.

La representación de $z_1 = -4$ se corresponde con el punto $(-4, 0)$.

La representación de $z_2 = -3i$ se corresponde con el punto $(0, -3)$.

La representación de $z_3 = -1 + 4i$ se corresponde con el punto $(-1, 4)$.

CURIOSIDADES

El plano complejo también se conoce con el nombre de *plano de Argand*, en honor al matemático francés autodidacta Jean Robert Argand (Ginebra, 1768 - París, 1822), que lo ideó mientras trabajaba en una librería en París.

INTERNET

Puedes investigar la representación gráfica de los números complejos en los siguientes enlaces:

http://www.vitutor.com/di/c/a_4.html

<http://links.edebe.com/njj>

FÍJATE

El eje de abscisas del plano complejo contiene los afijos de los números reales, $z = a + 0i$, mientras que el de ordenadas contiene los afijos de los números imaginarios, $z = 0 + bi$.


FÍJATE

El módulo de un número complejo z coincide con el módulo de su conjugado:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

— Comprueba que el módulo de un número complejo coincide con el de su opuesto.


AMPLÍA

El módulo de los números complejos tiene las siguientes propiedades:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

— Compruébalo para dos números complejos cualesquiera.


RECUERDA

— Si $\alpha < 90^\circ$ es un ángulo de un triángulo rectángulo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

— La **arcotangente** de un ángulo α es la función inversa de la tangente de este ángulo, de modo que si $x = \operatorname{tg} \alpha$, entonces

$$\alpha = \arctg(x).$$

— Los ángulos pueden escribirse en radianes o en grados:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$


FÍJATE

Encontrarás libros y páginas web en los que el módulo de z se define como:

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} \rightarrow |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

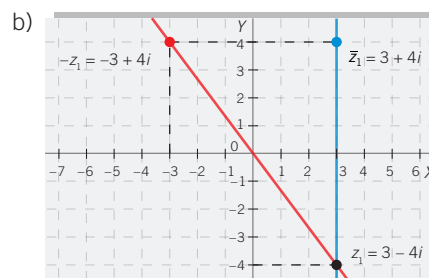
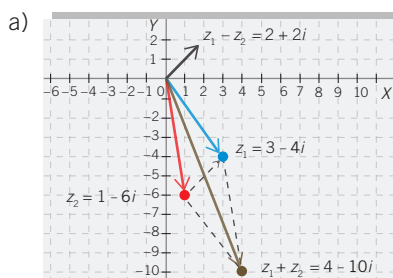
Una justificación de esta igualdad es la siguiente:

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + bi) \cdot (a - bi) = \\ &= a^2 - (a - bi) + (bi - a) - bi \cdot bi = \\ &= a^2 - (b^2 \cdot i^2) = a^2 - b^2 \cdot (-1) = \\ &= a^2 + b^2 = |z|^2 \end{aligned}$$

5 EJEMPLO

Dados los números complejos $z_1 = 3 - 4i$ y $z_2 = 1 - 6i$, representa en un plano complejo:

- La suma y la resta de ambos números.
- El conjugado y el opuesto de z_1 .

Solución


Módulo y argumento

El afijo de todo número complejo determina un vector con el origen de coordenadas; por lo tanto, cualquier número complejo podrá expresarse geoméricamente como un vector de **módulo** y **argumento** definidos.



El **módulo** de un número complejo es la longitud del vector que determina su afijo con el origen de coordenadas y el **argumento** es el ángulo que forma dicho vector con el eje real positivo.

Expresaremos el módulo de un complejo z como $|z|$, mientras que $\alpha = \arg(z)$ será su argumento.

Observa en la imagen que del teorema de Pitágoras se sigue que:

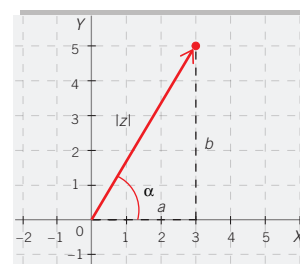
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Mientras que, por otra parte:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{b}{a}$$

Y que, por lo tanto:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$$


6 EJEMPLO

Dado el número complejo $z = 3 + 3i$, halla su módulo de dos formas distintas y también su argumento.

Solución

COMPRENSIÓN: Aplicaremos las definiciones teniendo en cuenta que $a = 3$ y $b = 3$.

RESOLUCIÓN: Método 1: $|z| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Método 2: Aplicando la relación entre el módulo y el complejo conjugado:

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = (3 + 3i)(3 - 3i) = 9 + 9 = 18 \rightarrow |z| = 3\sqrt{2}$$

Argumento: $\arg(z) = \arctg(3/3) = \arctg 1 = 45^\circ$

COMPROBACIÓN: Hemos obtenido el mismo resultado del módulo con ambos métodos. Para comprobar que el argumento es correcto, podemos representar el afijo del número complejo y comprobar que coincide con la bisectriz del primer cuadrante.

7 EJEMPLO

Dado el número complejo $z = 7 + 5i$, responde y resuelve las siguientes cuestiones:

- Identifica la parte real y la parte imaginaria de z .
- Busca el conjugado de z .

COMPRENSIÓN: Aplicaremos las definiciones de número complejo, su conjugado, módulo y argumento, y recordaremos cómo se representa el afijo de un complejo expresado en forma binómica.

RESOLUCIÓN: a) La parte real del número complejo $z = 7 + 5i$ es 7 y la escribimos como $a = \operatorname{Re}(z) = 7$. La parte imaginaria es 5i y la representamos como $b = \operatorname{Im}(z) = 5i$.

b) El conjugado de un número z (que se representa como $\bar{z}$) es este mismo número, pero cambiando el signo de la parte imaginaria. Así pues, el conjugado de z será $\bar{z} = 7 - 5i$.

c) El módulo de $z = a + bi$ es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; por lo tanto, $|z| = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74} = 8,6$.

El argumento es $\arctg(b/a) = \arctg(5/7) = 35,54^\circ$.

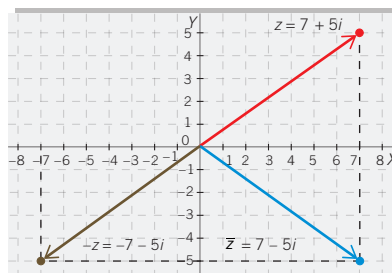
d) El módulo de un número complejo coincide con el de su conjugado; por lo tanto, $|z| = 8,6$.

- Calcula el módulo de z y su argumento.
- Calcula el módulo y el argumento de su conjugado $\bar{z}$.
- Representa, en una misma gráfica, los vectores que determinan los afijos de z , su opuesto y su conjugado.

Solución

En este caso, el argumento es $\arctg(b/a) = \arctg(5/7) = 35,54^\circ$.

e) Recuerda que la parte real se representa en el eje X y la parte imaginaria, en el eje Y . Ten en cuenta también que $|\bar{z}|$ es el simétrico de z respecto del eje X , mientras que $-z$ lo es respecto del origen de coordenadas.



Representación gráfica de $z = 7 + 5i$ y $\bar{z} = 7 - 5i$ y $-z = -7 - 5i$.

8 EJEMPLO

Representa en los mismos ejes de coordenadas los vectores que se corresponden con:

- $z = 3 + 2i$.
- Su conjugado.
- Su opuesto.
- Su inverso.

Solución

COMPRENSIÓN: Deberemos calcular el módulo y el argumento de cada uno de los vectores, antes de representarlos.

RESOLUCIÓN: a) El módulo de z es $|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \approx 3,61$, mientras que su argumento es $\arctg(2/3) = 33,69^\circ$.

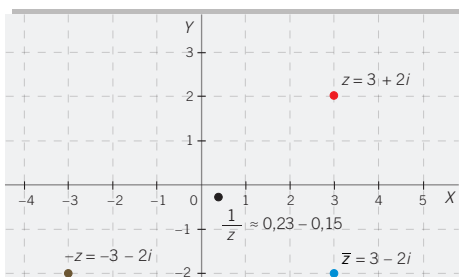
b) El conjugado de z es $\bar{z} = 3 - 2i$. Su afijo es el simétrico del afijo de z respecto del eje real (eje X).

c) El opuesto de z es $-z = -3 - 2i$. Su afijo es el simétrico del afijo de z respecto del origen O .

d) El inverso de z es:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{3 - 2i}{3^2 + 2^2} \approx 0,23 - 0,15i$$

Representamos los resultados obtenidos:



FÍJATE

Al calcular una arcotangente, la mayoría de las calculadoras y programas dan como resultado ángulos comprendidos entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

Cuando el afijo de un número complejo está en el primer cuadrante, obtendrás un valor positivo del ángulo y será el argumento que buscas; en caso contrario, debes tener en cuenta en qué cuadrante está el afijo.

Reflexiona sobre la posición de los afijos y el resultado que obtienes en la calculadora y verás que:

Afijo en el segundo cuadrante $\rightarrow$

$$\alpha < 0 \rightarrow \arg(z) = 180 - \alpha$$

Afijo en el tercer cuadrante $\rightarrow$

$$\alpha > 0 \rightarrow \arg(z) = 180 + \alpha$$

Afijo en el cuarto cuadrante $\rightarrow$

$$\alpha < 0 \rightarrow \arg(z) = 360 - \alpha$$

Problemas resueltos
A

Ejercicios y problemas
12 a 17

4. Forma polar de un número complejo

4.1. Operaciones en forma polar



INTERNET

Utiliza este enlace para comprobar la transformación de la forma binómica de un número complejo a su forma polar:

<http://links.edebe.com/5ys3n>



AMPLÍA

Un complejo en forma polar también puede escribirse en forma exponencial: $z = re^{i\alpha}$.

La relación entre esta expresión y la forma trigonométrica es la denominada **fórmula de Euler**. Busca en Internet información de esta fórmula para saber más sobre esta expresión.



FÍJATE

Hemos calculado la forma trigonométrica de un número complejo, cuyo afijo está representado en el primer cuadrante. Comprueba que la igualdad se cumple si z está en cualquier otro cuadrante. Para ello, ten presente la relación entre las razones trigonométricas de α , $180^\circ - \alpha$, $180^\circ + \alpha$ y $360^\circ - \alpha$, que podrás encontrar en esta web:

<http://links.edebe.com/b4m>

4. Forma polar de un número complejo

Hasta ahora hemos expresado los números complejos en su forma binómica, determinando así sus coordenadas en el plano complejo.

No obstante, un número complejo puede expresarse a partir del módulo y argumento que representa su afijo. Es la **forma polar** de un número complejo.



La **forma polar** de un número complejo de argumento α y módulo r es $z = r_\alpha$.

Así, 1_{90° o $\sqrt{2}_{150^\circ}$ son números complejos expresados en forma polar.

De forma binómica a forma polar y viceversa

Para pasar de forma binómica a forma polar el número $z = a + bi$:

— Calculamos el módulo del número complejo: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

— Calculamos el argumento: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$

Para pasar de forma polar a binómica el número $z = r_\alpha$, podemos hacerlo a partir de su representación gráfica y de las relaciones trigonométricas:

— Calculamos la parte real: $\operatorname{Re}(z) = a = r \cdot \cos \alpha$

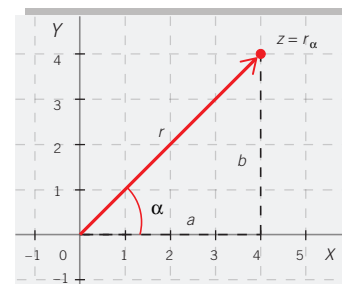
— Calculamos la parte imaginaria:

$$\operatorname{Im}(z) = b = r \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

Estas igualdades permiten expresar el número complejo $z = a + bi$ como:

$$z = r \cdot \cos \alpha + i r \cdot \operatorname{sen} \alpha = r (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$$

Esta expresión es conocida como **forma trigonométrica** de un número complejo.



9 EJEMPLO

Transforma los siguientes números complejos:

a) El número $z = 5 - 8i$ a forma polar.

b) El número $z = 7_{\pi/2}$ a forma binómica.

Solución

COMPRENSIÓN: Utilizaremos las relaciones entre la forma binómica y polar de los números complejos que acabamos de ver.

RESOLUCIÓN:

$$a) z = r_\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}_{\operatorname{arctg}(b/a)} = \sqrt{5^2 + 8^2}_{\operatorname{arctg}(-8/5)} \approx 9,4_{-58^\circ}$$

Observa que el afijo del número está en el cuarto cuadrante. Por lo tanto, el resultado obtenido es $z = 9,4_{360^\circ - 58^\circ} = 9,4_{302^\circ}$.

$$b) z = 7_{\pi/2} = 7 \cos(\pi/2) + i 7 \operatorname{sen}(\pi/2) = 7i$$

COMPROBACIÓN: Recorre el camino inverso y comprueba que obtienes, en cada caso, el número complejo de cada apartado.



Ejercicios y problemas
23, 24, 25, 26, 29

4.1. Operaciones en forma polar

Una vez conocidas las dos formas de expresar los números complejos, para operar con ellos podemos utilizar una u otra forma, según nos convenga.

Así, la forma binómica es una buena opción para sumar y restar números complejos; sin embargo, la forma polar facilita el cálculo de multiplicaciones, divisiones, potencias y, como veremos, radicales.

Multiplicación

El producto de dos números complejos en forma polar es otro número complejo que tiene por módulo el producto de los módulos de los factores, y por argumento, la suma de sus argumentos:

$$Z = Z_1 \cdot Z_2 = (r_1)_\alpha \cdot (r_2)_\beta = (r_1 \cdot r_2)_{(\alpha+\beta)}$$

División

El cociente de dos números complejos en forma polar es otro número complejo que tiene por módulo el cociente entre el módulo del dividendo y el divisor, y por argumento, la diferencia de sus argumentos:

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(r_1)_\alpha}{(r_2)_\beta} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)_{\alpha-\beta}$$

10 EJEMPLO

Dados $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 1 - i$, calcula y expresa en forma binómica:

- a) $z_1 \cdot z_2$ b) $\frac{z_1}{z_2}$

Solución

COMPRENSIÓN: Expresaremos en forma polar los números expresados en forma binómica para efectuar el cálculo y, a continuación, escribiremos el resultado en forma binómica.

RESOLUCIÓN:

$$z_1 = 1 + i = r_{\alpha}; \quad r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};$$

$$\alpha = \arctg(b/a) = \arctg(1) = \pi/4 \rightarrow z_1 = \sqrt{2}_{\pi/4}$$

$$z_2 = 1 - i = r_{\alpha}; \quad r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2};$$

$$\alpha = \arctg(b/a) = \arctg(-1) = -\pi/4 \rightarrow z_2 = \sqrt{2}_{-\pi/4}$$

El afijo de z_2 está en el cuarto cuadrante. Por lo tanto, su argumento es $2\pi - \pi/4 = 7\pi/4$, es decir, el número es $z_2 = \sqrt{2}_{7\pi/4}$.

Ahora ya podemos hallar el producto y el cociente de ambos números y expresarlos en forma binómica.

a) Expresamos el resultado en forma binómica: $z_1 \cdot z_2 = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2})_{\pi/4+7\pi/4} = 2_{2\pi}$.

$$a = 2 \cos 2\pi = 2; \quad b = 2 \sin 2\pi = 0 \rightarrow z_1 \cdot z_2 = 2$$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}_{\pi/4}}{\sqrt{2}_{7\pi/4}} = 1_{-3\pi/2} = 1_{2\pi-3\pi/2} = 1_{\pi/2}$. Expresamos el resultado en forma binómica:

$$a = 1 \cos(\pi/2) = 0; \quad b = 1 \sin(\pi/2) = 1 \rightarrow \frac{z_1}{z_2} = i$$

COMPROBACIÓN:

Para comprobar el resultado, podemos realizar la multiplicación y la división en la forma binómica o realizar los cálculos en el siguiente *applet*: <http://links.edebe.com/rshd4m>.

FÍJATE



Si quieres multiplicar o dividir dos números que están en forma binómica, puede resultar práctico pasarlos primero a forma polar y, una vez realizada la operación, convertirlos de nuevo a forma binómica.

Del mismo modo, para sumar o restar dos números en forma polar, puedes convertirlos primero a forma binómica y, después, expresar el resultado de nuevo en forma polar.

INTERNET



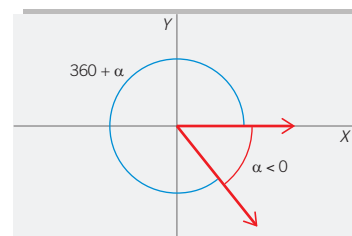
En el siguiente enlace tienes un *applet* para realizar operaciones de números complejos en forma polar:

<http://links.edebe.com/63qwn2>

FÍJATE



Al hacer una división $\frac{z_1}{z_2}$ si el argumento de z_2 es mayor que el de z_1 , el argumento del resultado será negativo.



Si quieres expresarlo con un valor comprendido entre 0 y 360°, solo tienes que sumarle 360.



AMPLÍA

Para calcular potencias de números complejos, te puede interesar utilizar la siguiente fórmula:

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)$$

Se conoce como **fórmula de De Moivre**.

Así si $z = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ entonces $z^n = r^n(\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha)$.



INTERNET

La raíz enésima de un número complejo en forma polar tiene n soluciones distintas. Así, por ejemplo, la raíz quinta de un número complejo tendrá cinco soluciones (o cinco raíces quintas). En el siguiente enlace puedes ver la representación, en forma polar, de las raíces quintas de $z = \cos(\pi/3) + i \operatorname{sen}(\pi/3)$:

<http://links.edebe.com/bgei>



FÍJATE

Si expresas los ángulos en radianes, la expresión de los argumentos de las raíces es:

$$\alpha' = \frac{\alpha + 2\pi k}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1$$

Potenciación

Según lo que hemos visto, si calculamos el producto de un complejo $z = r_\alpha$ por sí mismo, obtenemos el resultado $z^2 = z \cdot z = r_{2\alpha}^2$. A continuación, si multiplicamos el resultado anterior por z , obtenemos $z^3 = z^2 \cdot z = r_{2\alpha}^2 \cdot r_\alpha = (r^2 \cdot r)_{2\alpha + \alpha} = r_{3\alpha}^3$. No es difícil comprobar que, análogamente, $z^4 = r_{4\alpha}^4$, y así sucesivamente.

Por lo tanto, concluimos que al elevar un número en forma polar a la potencia enésima, su módulo queda elevado a n , y su argumento, multiplicado por n :

$$z^n = (r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha}$$

11 EJEMPLO

Dado el número complejo $z = 2_{\pi/2}$, calcula z^5 .

Solución

RESOLUCIÓN: $z^5 = (2_{\pi/2})^5 = (2^5)_{5\pi/2} = 32_{5\pi/2} = 32_{5\pi/2 - 2\pi} = 32_{\pi/2}$

Observa que el argumento del resultado era mayor que 2π ($5\pi/2$) y lo hemos expresado como un número comprendido entre 0 y 2π .

Radicación

La raíz enésima del número complejo R_α es otro número complejo r_β cuya potencia enésima es R_α .

$$\sqrt[n]{R_\alpha} = r_\beta \Leftrightarrow (r_\beta)^n = R_\alpha$$

Sin embargo, $(r_\beta)^n = r_{n\beta}^n$. Por lo tanto:

$$r_{n\beta}^n = R_\alpha \Rightarrow \begin{cases} r^n = R \Rightarrow \sqrt[n]{R} \\ n\beta = \alpha + 360^\circ \cdot k; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \beta = \frac{\alpha + 360k}{n} \end{cases}$$

Si damos valores enteros a k desde 0 hasta $n-1$, obtenemos n argumentos distintos:

$$\text{Si } k=1 \beta_1 = \frac{\alpha}{n}; \text{ si } k=2 \beta_2 = \frac{\alpha + 360^\circ}{n}; \dots; \text{ si } k=n-1 \beta_n = \frac{\alpha + 360^\circ \cdot (n-1)}{n}$$

Así, un número complejo $z = R_\alpha$ tiene n raíces enésimas distintas:

$$\sqrt[n]{R_\alpha} = (\sqrt[n]{R})_{\frac{\alpha + 360k}{n}}; k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

12 EJEMPLO

Calcula las raíces cuadradas de $z = 2_\pi$ y las raíces cúbicas de $z = 27_{30^\circ}$.

Solución

COMPRENSIÓN: Para calcular raíces, hallaremos la raíz del módulo y calcularemos los argumentos dando valores a k desde 0 hasta $n-1$.

RESOLUCIÓN: Las raíces cuadradas de $z = 2_\pi$ tendrán módulo $\sqrt{2}$ y argumentos:

$$\alpha_1 = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_2 = \frac{\pi + 2\pi \cdot 1}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

Por lo tanto, las raíces son $(\sqrt{2})_{\frac{\pi}{2}}$ y $(\sqrt{2})_{\frac{3\pi}{2}}$.

Las raíces cúbicas de $z = 27_{30^\circ}$ tendrán módulo $\sqrt[3]{27} = 3$ y argumentos:

$$\alpha_1 = \frac{30^\circ + 0^\circ}{3} = 10^\circ; \quad \alpha_2 = \frac{30^\circ + 360^\circ \cdot 1}{3} = 130^\circ; \quad \alpha_3 = \frac{30^\circ + 360^\circ \cdot 2}{3} = 250^\circ$$

Las raíces son, por lo tanto, 3_{10° , 3_{130° y 3_{250° .



Ejercicios y problemas
31, 32, 33, 35, 39

5. Ecuaciones con soluciones complejas

Introducimos el conjunto de los números complejos como el resultado de añadir a los números reales las soluciones de las ecuaciones polinómicas que se obtienen a partir de la definición de la unidad imaginaria i .

Veamos cómo calcular todas las soluciones de las ecuaciones de segundo grado y de las ecuaciones bicuadradas.

5.1. Ecuaciones de segundo grado

Recuerda que las **ecuaciones de segundo grado** o **cuadráticas** con una incógnita son de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Y que sus dos raíces se hallan a partir de la siguiente **fórmula cuadrática**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Considera la ecuación $x^2 - 2x + 5 = 0$.

Al hallar sus soluciones, aparece la raíz cuadrada de un número negativo:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

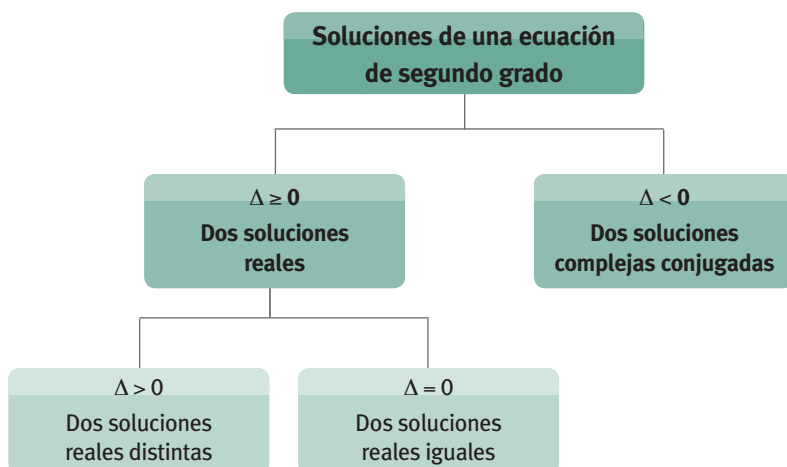
Esta ecuación no tiene soluciones en los números reales, pero si consideramos la posibilidad de que las soluciones sean números complejos obtenemos:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

En este caso, las dos soluciones son complejas: $x_1 = 1 + 2i$; $x_2 = 1 - 2i$.

Veamos, pues, que toda ecuación de segundo grado tiene solución si admitimos que esta puede ser un número complejo.

Las soluciones de la ecuación serán dos números reales si el discriminante es positivo o nulo, y dos números complejos conjugados si el discriminante es negativo:



5. Ecuaciones con soluciones complejas

5.1. Ecuaciones de segundo grado

5.2. Ecuaciones bicuadradas

AMPLÍA



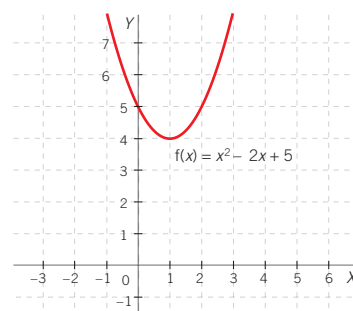
Si z es una raíz de un polinomio P , su conjugado también lo es. ¿Qué puedes afirmar de las soluciones de un polinomio de grado par? ¿Y cuando es impar?

FÍJATE



Al calcular las raíces de polinomios, hallamos también los puntos de corte de sus gráficas con el eje X .

Fíjate en la representación de la función asociada a la ecuación del ejemplo.



$$f(x) = x^2 - 2x + 5 = 0$$

Cuando las raíces obtenidas son complejas, la gráfica no corta el eje X ; por lo tanto, no debes confundir el afijo de los complejos con ningún punto de la gráfica.

Problemas resueltos
B



Ejercicios y problemas
42, 43, 44



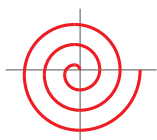


CURIOSIDADES

Un número z en forma polar se expresa en función de dos parámetros, el módulo r y el argumento α , que se consideran también como coordenadas: las **coordenadas polares**.

Así pues, por ejemplo, una circunferencia de radio 1 con centro en $(0, 0)$ que en coordenadas cartesianas se expresaría como $x_2 + y_2 = 1$, en coordenadas polares se escribiría $r = 1$.

Por otra parte, una expresión como $y = x$ representa una recta en coordenadas cartesianas, mientras que $r = \alpha$ representa una espiral de Arquímedes en coordenadas polares.



Espiral de Arquímedes.

5.2. Ecuaciones bicuadradas

Las **ecuaciones bicuadradas** son las ecuaciones cuyo término general es de la forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Estas ecuaciones pueden reducirse a una ecuación de segundo grado, efectuando el siguiente cambio de variable:

$$x^4 = t^2 \qquad x^2 = t$$

$$at^2 + bt + c = 0$$

Si consideramos la posibilidad de la existencia de soluciones complejas, podemos encontrar las soluciones t_1 y t_2 de esta ecuación de segundo grado y, deshaciendo el cambio de variables, hallaremos las raíces del polinomio original.

Observa que las raíces t_1 y t_2 de $at^2 + bt + c = 0$ pueden ser de tres tipos:

- Un número real positivo t (solución doble). Al calcular x , obtendremos dos números reales $x = \pm\sqrt{t}$.
- Un número real negativo t (solución doble). Al calcular x , obtendremos dos números imaginarios $x = \pm i\sqrt{t}$.
- Un número complejo z . Al calcular x , deberemos aplicar el método de radicación de complejos visto anteriormente y obtendremos dos complejos conjugados.

Ejercicios y problemas
46, 47, 48

13 EJEMPLO

Resuelve la siguiente ecuación bicuadrada: $x^4 + 2x^2 + 2 = 0$.

Solución

COMPRENSIÓN: Efectuaremos los cambios de variable $x^4 = t^2 \rightarrow x^2 = t$, resolveremos la ecuación resultante y, finalmente, desharemos el cambio.

RESOLUCIÓN: Los cambios de variable nos permiten escribir la ecuación de la siguiente forma: $t^2 + 2t + 2 = 0$.

A continuación, la resolvemos: $t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$.

Las soluciones son dos complejos conjugados y, para deshacer el cambio, deberemos aplicar el método de radicación de complejos. Para ello, expresaremos las soluciones en forma polar:

$t_1 = -1 + i$; $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\operatorname{tg} \alpha = -1 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 135^\circ \\ \alpha = 315^\circ \end{cases}$. Puesto que el afijo del número complejo pertenece al segundo cuadrante, su argumento es $\alpha = 135^\circ$.

$t_2 = -1 - i$; $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\operatorname{tg} \alpha = -1 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 45^\circ \\ \alpha = 225^\circ \end{cases}$. Puesto que el afijo del número complejo pertenece al cuarto cuadrante, su argumento es $\alpha = 225^\circ$.

Por lo tanto, $t_1 = \sqrt{2}_{135^\circ}$ y $t_2 = \sqrt{2}_{225^\circ}$.

Ahora debemos deshacer el cambio de variable para calcular las x .

Las raíces de t_1 tienen módulo $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$ y argumentos $\frac{135^\circ}{2} = 67,5^\circ$ y $\frac{135^\circ + 360^\circ}{2} = 247,5^\circ \rightarrow x_1 = \sqrt[4]{2}_{67,5^\circ}$, $x_2 = \sqrt[4]{2}_{247,5^\circ}$.

Las raíces de t_2 tienen módulo $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$ y argumentos $\frac{225^\circ}{2} = 112,5^\circ$ y $\frac{225^\circ + 360^\circ}{2} = 292,5^\circ \rightarrow x_3 = \sqrt[4]{2}_{112,5^\circ}$, $x_4 = \sqrt[4]{2}_{292,5^\circ}$.

COMPROBACIÓN: Expresa las soluciones en forma binómica y sustitúyelas por x en la ecuación bicuadrada para comprobar que verifican la igualdad.



A

OPERACIONES Y FORMA POLAR DE NÚMEROS COMPLEJOS

Los números complejos se utilizan en los circuitos eléctricos que llevan una impedancia asociada. La impedancia es una magnitud compleja que sirve para expresar la oposición que presentan algunos dispositivos eléctricos al paso de la corriente alterna.

Habitualmente, se representa con la letra Z y consta de tres elementos distintos: la resistencia (R), la inductancia (X_L) y la capacitancia (X_C). La primera es una magnitud real, mientras que la inductancia y la capacitancia son magnitudes complejas, la primera positiva y la segunda negativa, y se relacionan mediante la siguiente expresión:

$$Z = R + i(X_L - X_C)$$

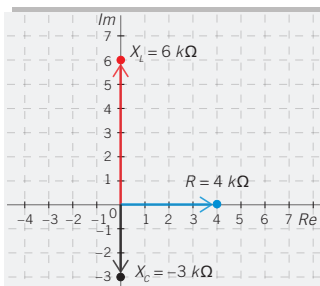
Disponemos de un circuito eléctrico que tiene una resistencia de $4 \text{ k}\Omega$, una inductancia de $6 \text{ k}\Omega$ y una capacitancia de $3 \text{ k}\Omega$.

- Representa gráficamente la resistencia, la inductancia y la impedancia.
- ¿Cuál es el módulo de la impedancia?
- Representa el afijo de Z en el gráfico obtenido en a).
- Expresa la impedancia en forma polar y represéntala gráficamente.
- Si la intensidad total que circula por el circuito está alineada con R , y la tensión está alineada con el módulo de Z , ¿qué ángulo forma la intensidad respecto de la tensión?
- ¿Cuál sería el módulo de la impedancia si la inductancia fuera nula?

Solución

COMPRENSIÓN: La impedancia en corriente alterna es una magnitud compleja y está formada por la suma de una magnitud real (resistencia) y dos magnitudes complejas.

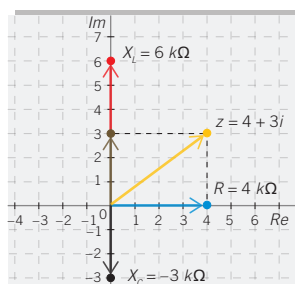
RESOLUCIÓN: a) La resistencia R es la parte real de la impedancia; por lo tanto, la representaremos en el eje X . Por otro lado, la inductancia X_L y la capacitancia X_C las representaremos en el eje imaginario Y . Los números que deberemos representar son: $R = 4$, $X_L = 6i$ y $X_C = -3i$.



- b) El módulo de la impedancia vendrá dado por:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \rightarrow \\ \rightarrow |Z| = \sqrt{4^2 + (6 - 3)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5 \text{ k}\Omega$$

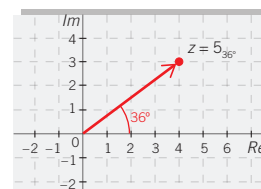
- c) La componente imaginaria del vector resultante será $6 \text{ k}\Omega - 3 \text{ k}\Omega = 3 \text{ k}\Omega$, que junto con los $4 \text{ k}\Omega$ del eje real nos servirán para representar gráficamente el afijo de Z .



- d) La impedancia del circuito en forma binómica es, pues, $Z = 4 + 3i$. Para convertirla a forma polar con módulo r y argumento α , utilizamos:

$$Z = a + bi = |Z|_{\arctg(b/a)} \rightarrow Z = 5_{\arctg(3/4)} = 5_{\pi/5} = 5_{36^\circ}$$

Si representamos el afijo de la impedancia a partir de su forma polar, observamos que coincide con el representado en el apartado anterior:



- e) Si la intensidad total que circula por el circuito está alineada con R , significa que esta se encuentra en el eje real y, por lo tanto, el ángulo que forma con la tensión es de nuevo: $\pi/5 = 36^\circ$.
- f) Si solamente la resistencia y la capacitancia contribuyen a la impedancia, tendríamos que $Z = 4 - 3i \text{ k}\Omega$, y que, por lo tanto:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (-X_C)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5 \text{ k}\Omega$$

En este caso, observamos que el módulo de la impedancia total no variaría.

1. ★★★ La impedancia de un circuito de corriente alterna en forma polar viene dada por $z = 32_{\pi}$.

- Calcula sus raíces quintas.
- Represéntalas gráficamente.

Sol.: a) $z_1 = 2_{\pi/5}$; $z_2 = 2_{3\pi/5}$; $z_3 = 2_{\pi}$; $z_4 = 2_{7\pi/5}$; $z_5 = 2_{9\pi/5}$

**B ECUACIONES CON SOLUCIONES COMPLEJAS**

Un grupo de amigos se reunió para jugar al *Monopoly*. Al abrir la caja vieron que únicamente había 25 billetes «reales» del propio juego, así que decidieron crear algunos otros «imaginarios» para poder jugar.

Al empezar el juego se repartieron los billetes «reales» e «imaginarios» de modo que si a ocho veces el total de billetes que tenía cada jugador, le restabas este mismo total al cuadrado, el resultado era el número de billetes iniciales que había en la caja. ¿Cuántos billetes «reales» e «imaginarios» tenía cada jugador al empezar la partida?

Solución

COMPRENSIÓN: Al empezar la partida cada jugador tenía una cantidad de billetes resultado de sumar los billetes «reales», que representan los billetes propios del juego, con los «imaginarios», que son los billetes que crearon. Dadas estas condiciones, deberemos expresar el total de billetes como un número complejo y expresar con una ecuación la relación que cumple la cantidad total de billetes que tenían inicialmente.

DATOS: Cantidad de billetes «reales»: a

Número de billetes «imaginarios»: b

Total de billetes «reales»: 25

RESOLUCIÓN: Intenta resolver el problema individualmente. Para ello, tapa la columna de las respuestas y sigue estos pasos.

Pasos

1. Expresamos la suma total de billetes como un número complejo.
2. Expresamos la relación del enunciado en forma de ecuación.
3. Resolvemos la ecuación, asumiendo que las soluciones pueden ser complejas.

Respuestas

1. La suma total de billetes es: $a + bi = z$
2. La ecuación que expresa la relación expresada en el enunciado es:
$$8z - z^2 = 25 \rightarrow z^2 - 8z + 25 = 0$$
3. Al ser una ecuación de segundo grado con una incógnita (z), utilizaremos la fórmula cuadrática para resolverla.

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 25}}{2}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 100}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{8 \pm 6i}{2} = 4 \pm 3i$$

4. Interpretamos las posibles soluciones que se obtienen.

4. Hay dos posibles soluciones que cumplen las condiciones del enunciado: $a = 4$ y $b = 3$, y $a = 4$ y $b = -3$. La segunda solución no es coherente pues no se pueden tener -3 billetes. Así, la respuesta a la pregunta es que al iniciar la partida, cada jugador tiene un total de $4 + 3i$ billetes; es decir, 4 billetes «reales» (del juego original) y 3 billetes «imaginarios» (fabricados).

COMPROBACIÓN:

Para comprobar que las soluciones obtenidas son correctas, sustituimos ambos números complejos en la ecuación que expresa la relación del enunciado y verificamos que el resultado es el número de billetes que había inicialmente en la caja.

$$z = 4 + 3i \rightarrow 8 \cdot (4 + 3i) - (4 + 3i)^2 = 24 + 24i - (9 - 16 + 24i) = 25$$

Del mismo modo, puedes comprobar que la solución $a = 4$ y $b = -3$ también es correcta.

2. ★★☆☆ Halla el número complejo que al multiplicarlo por $(1 + 3i)$ y restarle $(13 + 59i)$ da como resultado el número imaginario $6i$.

Sol.: $19 + 2i$



1 NÚMERO COMPLEJO

3. ★★★ Calcula las siguientes raíces: $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt{-9}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt{-121}$, $\sqrt{-1}$.

Sol.: $2; \pm 3i; -2; \pm 11i; -1$

4. ★★★ Indica cuál es la parte real y la parte imaginaria de los siguientes números complejos:

- a) $z = 3 - 2i$ d) $z = 6i$
b) $z = 4 + 5i$ e) $z = 3i^2$
c) $z = 10$ f) $z = 1/i$

Sol.: a) $\text{Re}(z) = 3$, $\text{Im}(z) = -2$; b) $\text{Re}(z) = 4$, $\text{Im}(z) = 5$;
c) $\text{Re}(z) = 10$, $\text{Im}(z) = 0$; d) $\text{Re}(z) = 0$, $\text{Im}(z) = 6$;
e) $\text{Re}(z) = 0$, $\text{Im}(z) = -1$

5. ★★★ Calcula los conjugados y opuestos de los siguientes números complejos, y comprueba tus resultados utilizando el *applet* que encontrarás en la página: @

<http://links.edebe.com/njj>

- a) $z = 4$ c) $z = 75i$
b) $z = 5 + 15i$ d) $z = 45 + 3i$

Sol.: a) $\bar{z} = 4$, $-z = -4$; b) $\bar{z} = 5 - 15i$, $-z = -5 - 15i$;
c) $\bar{z} = -75i$, $-z = -75i$; d) $\bar{z} = 45 - 3i$, $-z = -45 - 3i$

6. ★★★ Un número complejo z en forma binómica se representa como $z = a + bi$. ¿Cuál debe ser el valor de a y b para que z sea igual a su complejo conjugado y a su opuesto?

Sol.: $a = 0$; $b = 0$

7. ★★★ Halla el valor del parámetro real k para que el número $\frac{1-2ki}{k-i}$ sea:

- a) Un número real. b) Un número imaginario.
Sol.: a) $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $k = 0$

2 OPERACIONES EN FORMA BINÓMICA

8. ★★★ Efectúa las siguientes operaciones en forma binómica:

- a) $(3 - 2i) + (4 + 5i)$ c) $(5 + 9i) - (5 - 9i)$
b) $8 + (13 + 5i)$ d) $(16 - 2i) - (15 - 2i)$

Sol.: a) $7 + 3i$; b) $21 + 5i$; c) $18i$; d) 1

9. ★★★ ¿Qué número hay que sumar a $5 - 6i$ para obtener $8i$?
Sol.: $-5 + 14i$

10. ★★★ Calcula:

- a) $(3 - 2i) \cdot (4 + 5i)$ d) $3 / (4 + i)$
b) $(6 + 2i) \cdot (3 + 3i)$ e) $(2 - i) / (1 + 3i)$
c) $(2 + i) / i$ f) $(2 + 3i)^2$

Sol.: a) $22 + 7i$; b) $12 + 24i$; c) $1 - 2i$;
d) $12 / 17 - 3i / 17$; e) $-1 / 10 - 7i / 10$; f) $-5 + 12i$

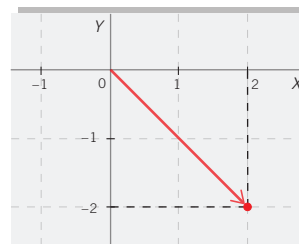
11. ★★★ Si dividimos un número complejo $z = a + bi$ entre su complejo conjugado, obtenemos su opuesto más $1 + 2i$. ¿De qué número z se trata?

Sol.: $z = 1 + i$

3 REPRESENTACIÓN GRÁFICA

12. ★★★ Observa la siguiente representación gráfica:

- a) ¿Qué número complejo está representado?
b) Representa gráficamente su complejo conjugado.
c) Calcula el cuadrado del número que has hallado en el apartado a) y represéntalo gráficamente.



13. ★★★ Dado el número complejo $z = 15 + 22i$, representa su afijo en el plano complejo, junto con:

- a) El vector que define el afijo con el origen de coordenadas.
b) Su conjugado $\bar{z}$.
c) Su opuesto $-z$.
— Debate con tus compañeros qué relación mantienen los afijos de z , $\bar{z}$ y $-z$ y los vectores que determinan con el origen de coordenadas.

14. ★★★ Realiza las siguientes operaciones de forma gráfica:

- a) $(5 + 5i) + (2 + 2i)$ d) $(-4 - 5i) - (-2 - i)$
b) $(4 - 2i) + (6 - 2i)$ e) $5 \cdot (3 + 2i)$
c) $(3 - 2i) - (4 + 7i)$ f) $(3 + 4i) + (1 + 2i)$

15. ★★★ Calcula el módulo de los siguientes números complejos:

- a) $z = 3 + 4i$ c) $z = 4 - 3i$
b) $z = 5$ d) $z = 10i$

Sol.: a) $|z| = 5$; b) $|z| = 5$; c) $|z| = 5$; d) $|z| = 10$

16. ★★★ Sea el número complejo $z = 7 - 6i$, ¿cuál es su conjugado? Calcula su módulo utilizando dos métodos distintos.

Sol.: $\bar{z} = 7 + 6i$, $|z| = 9,2$

17. ★★★ Representa en el plano los siguientes números complejos y calcula sus módulos:

- a) $z = 6$ c) $z = 4i$
b) $z = 15 + 5i$ d) $z = 3 - 4i$

Sol.: a) $|z| = 6$; b) $|z| = 15,8$; c) $|z| = 4$; d) $|z| = 5$



18. ★☆☆ Representa en un mismo eje de coordenadas los siguientes números complejos y sus conjugados, y compáralos. ¿Qué relación se observa entre $\bar{z}$ y z en cada caso?

- a) $z = 6 + 6i$ c) $z = 12$
b) $z = -3i$ d) $z = 12 - 3i$

19. ★☆☆ Realiza las siguientes operaciones y representa gráficamente su resultado:

- a) $(4 + 8i) + (4 - 8i)$ d) $(2 + 7i) / i$
b) $(124 - 78i) - (124 + 78i)$ e) $(2 + i)^3$
c) $(5 + 8i) \cdot (10 - 2i)$ f) $(1 - i) / (1 + i)$

Sol.: a) 8; b) $-156i$; c) $66 + 70i$;
d) $7 - 2i$; e) $2 + 11i$; f) $-i$

20. ★☆☆ Halla el inverso de los siguientes números complejos y aproxima el resultado a las centésimas:

- a) i c) $7 - i$
b) $5 + 6i$ d) $-4 - 3i$

Sol.: a) $-i$; b) $0,08 - 0,1i$; c) $0,14 + 0,2i$; d) $-0,1 + 0,12i$

21. ★☆☆ Halla el inverso del complejo conjugado de los siguientes números:

- a) i c) $4 + 2i$
b) $6 - i$ d) $0,1 + 0,1i$

Sol.: a) i ; b) $6/37 - i/37i$; c) $0,2 + 0,1i$; d) $5 + 4i$

22. ★☆☆ Debate con tus compañeros cuál es la mejor forma de calcular las siguientes potencias y efectúalas:

- a) i^{1231} b) i^{10320} c) i^{7037} d) i^{883002}

4 FORMA POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

23. ★☆☆ Identifica el módulo (r) y el argumento (α) de los siguientes números complejos:

- a) $z = 3_{\pi/2}$ c) $z = 1_{2\pi}$ e) $z = 4_{2\pi}$
b) $z = 10_{\pi}$ d) $z = 3_{\pi}$ f) $z = 1_0$

24. ★☆☆ Representa los siguientes números complejos en el plano:

- a) $z = 10_{\pi/4}$ c) $z = 26_{3\pi/2}$ e) $z = 4_{\pi/3}$
b) $z = 5_{-\pi}$ d) $z = 1_{180^\circ}$ f) $z = 8_{45^\circ}$

25. ★☆☆ ¿Cuál es el argumento de los siguientes números reales?

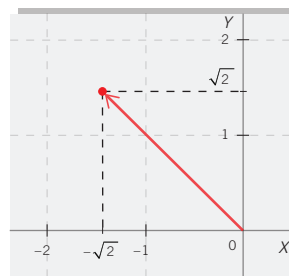
- a) 8 b) -13

26. ★☆☆ Un número complejo que expresa la media del número de cartas comerciales (parte real) y el número de correos electrónicos (parte imaginaria) que recibe una persona cada día viene dado por $z = 6 + 9i$.

- a) Expresa esta cantidad en forma polar.
b) Representa en el plano complejo.

Sol.: a) $z = 10,8_{56,31^\circ}$

27. ★☆☆ Observa la siguiente figura e indica a qué número complejo en forma polar equivale esta representación:



Sol.: $z = 2_{3\pi/4}$

28. ★☆☆ Expresa en forma polar los siguientes números complejos:

- a) $z = 7i$ d) $z = 4 - 4i$
b) $z = -5 + 5i$ e) $z = 2i^2$
c) $z = -6$

Sol.: a) $z = 7_{\pi/2}$; b) $7,07_{135^\circ}$; c) $z = 6_{\pi}$;
d) $z = 5,66_{315^\circ}$; e) $z = 2_{\pi}$

29. ★☆☆ Expresa en forma polar el conjugado del opuesto de $z = -5 + 10i$:

Sol.: $z = 11,18_{63,43^\circ}$

30. ★☆☆ Expresa en forma binómica los siguientes números complejos:

- a) $z = 7_{5\pi/2}$ c) $z = 9_{3\pi/2}$
b) $z = 1_{-\pi/2}$ d) $z = 3_{\pi/4}$

Sol.: a) $7i$; b) $-i$; c) $-9i$; d) $2,12 + 2,12i$

31. ★☆☆ Calcula los productos de los siguientes números complejos en forma polar z_1 y z_2 :

- a) $z_1 = 8_{3\pi/2}$; $z_2 = 0,5_{\pi/2}$ d) $z_1 = 6_{5^\circ}$; $z_2 = 5_{6^\circ}$
b) $z_1 = 25_{\pi/2}$; $z_2 = 2_{\pi/2}$ e) $z_1 = 2_{2\pi}$; $z_2 = 7_{2\pi}$
c) $z_1 = e_{\pi/3}$; $z_2 = 7_{\pi/5}$

Sol.: a) $4_{2\pi}$; b) 50_{π} ; c) $7e_{8\pi/15}$;
d) 30_{11° ; e) $14_{4\pi} = 14_{2\pi}$

32. ★☆☆ Dados los números complejos en forma polar z_1 y z_2 , calcula z_1 / z_2 :

- a) $z_1 = 8_{5\pi/2}$; $z_2 = 0,5_{\pi/2}$ d) $z_1 = 1_{5^\circ}$; $z_2 = 10_{6^\circ}$
b) $z_1 = 10_{\pi/2}$; $z_2 = 2_{\pi/2}$ e) $z_1 = 2_{2\pi}$; $z_2 = 4_{-2\pi}$
c) $z_1 = 5_{\pi/3}$; $z_2 = 1_{\pi/5}$

Sol.: a) $16_{2\pi}$; b) 5_0 ; c) $5_{2\pi/15}$;
d) $0,1_{359^\circ}$; e) $0,5_{4\pi} = 0,5_{2\pi}$

33. ★☆☆ Calcula la potencia n de cada uno de los números complejos que tienes a continuación:

- a) $z = 10_{\pi/2}$; $n = 3$ d) $z = 2_{1^\circ}$; $n = 4$
b) $z = 2_{3\pi/2}$; $n = 6$ e) $z = 5_{90^\circ}$; $n = 2$
c) $z = 1_{\pi}$; $n = 9$ f) $z = 3_{30^\circ}$; $n = 3$

Sol.: a) $1000_{3\pi/2}$; b) $64_{9\pi} = 64_{\pi}$; c) $1_{9\pi} = 1_{\pi}$;
d) 16_{4° ; e) 25_{180° ; f) 27_{90°



34. ★★★ Dados los números complejos en forma polar $z_1 = 2_{\pi/2}$ y $z_2 = 10_{-\pi/2}$, efectúa estas operaciones:

a) $z_1 \cdot z_2$ c) $(z_1 / z_2)^6$
b) $z_1^3 \cdot z_2$ d) $z_1 \cdot \sqrt{z_2}$

Sol.: a) 20; b) 80_{π} ; c) $5^{-6}_{6\pi}$; d) $6,3_{\pi/4}$, $6,3_{5\pi/4}$

35. ★★★ Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[4]{16_{120^\circ}}$ d) $\sqrt[2]{4_{30^\circ}}$
b) $\sqrt[5]{1_{10^\circ}}$ e) $\sqrt[4]{1+i}$
c) $\sqrt[3]{27_{\pi}}$ f) $\sqrt[5]{2_{27}}$

36. ★★★ Utiliza el *applet* que encontrarás en el siguiente enlace para representar y comprobar los resultados de los apartados b) y d) del ejercicio anterior: @

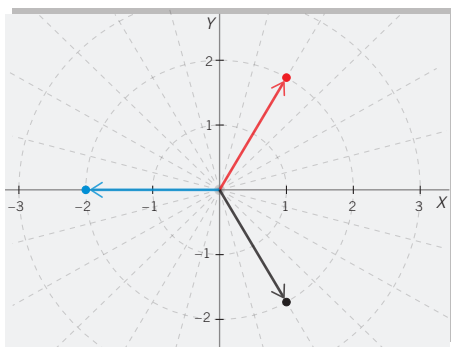
<http://links.edebe.com/2ddj>

37. ★★★ Tenemos que representar un número complejo en forma polar. Tan solo sabemos que, en forma binómica, la parte imaginaria es el doble de la parte real y que su módulo más la parte real es igual a 80,9. (Aproxima los resultados con un decimal).

- a) ¿De qué número se trata?
b) Represéntalo en el plano complejo.

Sol.: a) $z = 55,9_{63,4^\circ}$

38. ★★★ La siguiente figura muestra las raíces cúbicas de un número complejo. Averigua de qué número se trata.



Sol.: $z = 8_{\pi}$

39. ★★★ Dos números complejos que representan los puntos extremos de una recta son $z_1 = 8 - 5i$ y $z_2 = 4 - 12i$, respectivamente.

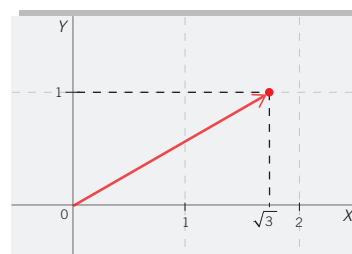
- a) Súmalos y calcula el inverso del resultado.
b) Conviértelos en forma polar y, de nuevo, efectúa la suma y calcula su inverso.
c) Comprueba que las operaciones que has hecho en los apartados a) y b) dan el mismo resultado.

Sol.: a) $12 / 433 + 17 / 433i$; b) $\left(\frac{\sqrt{433}}{433} \right)_{54,78^\circ}$

40. ★★★ Realiza las siguientes operaciones y representa gráficamente las raíces obtenidas en cada caso:

a) $\sqrt[6]{3_{\pi} \cdot 3_{\pi}}$ d) $\sqrt[5]{(25_{\pi/2}) \cdot (125_{\pi/2})}$
b) $\sqrt[3]{(1_{2\pi}) \cdot (1_{3\pi})}$ e) $\sqrt[5]{(1_{\pi/3}) \cdot (1_{\pi/2})}$
c) $\sqrt[4]{(16_{2\pi}) \cdot (1_{3\pi})}$ f) $\sqrt[6]{(-3) \cdot 243}$

41. ★★★ Observa esta figura y responde a las cuestiones, redondeando los resultados a las centésimas cuando sea necesario: 🎓



- a) Expresa el número complejo que está representado gráficamente en forma binómica y en forma polar.
b) Multiplícalo por su conjugado y expresa el resultado en forma binómica y en forma polar.
c) Halla las raíces cúbicas del complejo del apartado a).

Sol.: a) $z = \sqrt{3} + i$, $z = 2_{\pi/6}$; b) 4, 4_{0° ; c) $1,26_{\pi/18}$, $1,26_{13\pi/18}$, $1,26_{25\pi/18}$

5 ECUACIONES CON SOLUCIONES COMPLEJAS

42. ★★★ Resuelve las siguientes ecuaciones e indica si las soluciones son números reales o complejos:

a) $x^2 + x = 0$ d) $-10x^2 = 1000$
b) $x^2 + 16 = 0$ e) $x^2 + 25 = 0$
c) $6x^2 = -6$ f) $1000x^2 = -10$

Sol.: a) -1, 0; b) $\pm 4i$; c) $\pm i$; d) $\pm 10i$; e) $\pm 5i$; f) $\pm 0,1i$

43. ★★★ Resuelve las siguientes ecuaciones expresando el resultado con un decimal y representa las soluciones en el plano complejo:

a) $x^2 + 6x + 10 = 0$ d) $6x^2 - 36x + 72 = 0$
b) $x^2 - 6x + 10 = 0$ e) $9x^2 - 2x = -121$
c) $x^2 + 2x + 3 = 0$ f) $x^2 - x = 2$

Sol.: a) $-3 \pm i$; b) $3 \pm i$; c) $-1 \pm 1,4i$; d) $3 \pm 1,7i$; e) $0,1 \pm 3,6i$; f) -1, 2

44. ★★★ Resuelve la siguiente ecuación de segundo grado: $x^2 + 7x + 10 = 0$. Represéntala gráficamente y averigua si tiene puntos de corte con el eje X. Razona tu respuesta.

Sol.: -5, -2

45. ★★★ Efectúa lo mismo que en el problema anterior, pero ahora con la ecuación: $10x^2 + x + 7 = 0$, expresando los resultados con dos decimales.

Represéntala gráficamente y descubre si tiene puntos de corte con el eje X. Razona tu respuesta.

Sol.: $-0,05 \pm 0,83i$



46. ★☆☆ Resuelve las siguientes ecuaciones y representa sus soluciones:

a) $x^4 - 16 = 0$ d) $1 = x^8$
 b) $x^4 + 16 = 0$ e) $3x^4 = 243$
 c) $-x^4 = 1$ f) $x^4 + 2x^2 + 1$

47. ★☆☆ Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas, expresando los resultados dentro de radicales:

a) $x^4 + 6x^2 + 10 = 0$ c) $x^4 + 2x^2 + 3 = 0$
 b) $x^4 - 6x^2 + 10 = 0$ d) $9x^4 - 2x^2 = -121$

48. ★★★ Representa gráficamente los siguientes polinomios e indica, a partir de ellos, si las raíces de los polinomios correspondientes son reales, complejas o de ambos tipos. Razona en cada caso tus respuestas.

a) $P(x) = 1 + x^4$ d) $P(x) = x^4 + 6x^2 + 10$
 b) $P(x) = x^4 - 16$ e) $P(x) = x^4 + 16$
 c) $P(x) = 9x^4 - 2x^2 - 121$ f) $P(x) = -1 + x^8$

49. ★★★ Tenemos dos números complejos en forma polar $z_1 = 3e^{i\pi/3}$ y $z_2 = 15e^{-i\pi/3}$.

- a) Calcula el producto.
 b) Halla el valor de todas las x que satisfacen la igualdad $z_1 \cdot z_2 = 45$.
 c) Halla el valor de todas las x que satisfacen $nz_1 \cdot z_2 = 22,5 - 38,97i$.

NOTA: Puedes continuar el procedimiento en forma binómica si en algún momento lo crees conveniente.

Sol.: a) $z = 45e^{(3x-1) \cdot i\pi/3}$; b) $x = 1/3 + 6k/3$, k entero;
 c) $x = 0 + 2k$, k entero

SÍNTESIS

50. ★☆☆ Realiza las siguientes operaciones en forma binómica. Representa gráficamente los resultados obtenidos y halla, en cada caso, el complejo conjugado y el opuesto a partir de dicha representación.

a) $(8 + 5i) + (5 - 4i)$ c) $(2i) \cdot (3 + 4i)$
 b) $(6 + 7i) - (-5 + 2i)$ d) $(2 + 2i) / 4i$

Sol.: a) $z = 13 + i$; $\bar{z} = 13 - i$; $-z = -13 - i$;
 b) $z = 11 + 5i$; $\bar{z} = 11 - 5i$; $-z = -11 - 5i$;
 c) $z = -8 + 6i$; $\bar{z} = -8 - 6i$; $-z = 8 - 6i$;
 d) $z = 0,5 - 0,5i$; $\bar{z} = 0,5 + 0,5i$; $-z = -0,5 + 0,5i$

51. ★☆☆ Escribe los siguientes números complejos en su forma binómica y calcula su inverso a partir de ella:

a) 5_{27° e) 2_{30°
 b) $8_{5\pi/2}$ f) $5_{\pi/3}$
 c) 3_{65° g) 1_{270°
 d) $11_{-\pi/4}$ h) $4_{2\pi}$

52. ★☆☆ Representa gráficamente las siguientes ecuaciones y razona, a partir del gráfico, si las raíces son reales o complejas, o de ambos tipos:

a) $x^2 + 6x + 10$
 b) $6x^2 - 36x + 72$
 c) $10 + 1000x^2$
 d) $9x^2 - 2x - 121$
 e) $x^2 - 6x + 10 = 0$
 f) $x^2 + 16$

53. ★★★ Resuelve las siguientes ecuaciones cuadradas y bicuadradas y convierte las soluciones del primer apartado a forma polar:

a) $100 = 100000x^2$ c) $2x^2 + 3x - 1 = 0$
 b) $x^4 + 625 = 0$ d) $11x^2 - 2x = -12$

54. ★☆☆ Dos números complejos son, respectivamente, $z_1 = 6 - 8i$ y $z_2 = 4 + 12i$. Calcula, aproximando los resultados con dos decimales: @

- a) Transfórmalos a forma polar y calcula el producto $z_1 \cdot z_2$.
 b) Realiza la misma operación en forma binómica y comprueba que el resultado final es el mismo en ambos casos.
 c) Utiliza la forma polar para calcular z_1 / z_2 .

Comprueba todos los resultados utilizando la calculadora que encontrarás en:

<http://www.wolframalpha.com/>

Sol.: a) $z = 126,5_{18,44^\circ}$; b) $z = 120 + 40i$; c) $z = 0,79_{235,31^\circ}$

55. ★★★ Existen cuatro números complejos que cumplen las mismas condiciones:

- Los elevamos a la cuarta potencia y los multiplicamos por 3.
- Al resultado le sumamos su cuadrado multiplicado por 6.
- El resultado es -6 .

¿Cuáles son estos cuatro números?

Sol.: $\pm\sqrt{-1+i}$, $\pm\sqrt{-1-i}$

56. ★★★ Los cuaterniones son una extensión de los números complejos en la que se añaden tres unidades imaginarias i , j y k , de manera que se cumple:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

La forma binómica de los complejos se extiende a los cuaterniones de forma natural, es decir, un cuaternión se puede expresar como $q = a + bi + cj + dk$.

- a) ¿Cuánto valdrán los productos ijk , ij , ik , jk ?
 b) La suma y el producto de cuaterniones también se extienden de forma natural, es decir, las operaciones se hacen componente a componente. ¿Cuál será el resultado de la suma de dos cuaterniones q_1 y q_2 ?



Síntesis

1. Número complejo
2. Operaciones en forma binómica
3. Representación gráfica
4. Forma polar de un número complejo
5. Ecuaciones con soluciones complejas

NÚMERO COMPLEJO

Expresión numérica en la que aparece explícitamente la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$.

Forma binómica

$$z = a + bi$$

Expresión de un número complejo como suma de una parte real (a) y una parte imaginaria (b).

Conjugado

$$\bar{z} = a - bi$$

Opuesto

$$-z = -a - bi$$

Operaciones en forma binómica

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a + c) - (b + d)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}i$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

De binómica a polar

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \alpha = \arctg \frac{b}{a}$$

De polar a binómica

$$a = r \cdot \cos \alpha \quad b = r \cdot \sin \alpha$$

Forma polar

$$z = r_{\alpha}$$

Expresión de un número complejo a partir del módulo r y el argumento α que representa su afijo.

Operaciones en forma polar

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1)_{\alpha} \cdot (r_2)_{\beta} = (r_1 \cdot r_2)_{(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(r_1)_{\alpha}}{(r_2)_{\beta}} = (r_1 \cdot r_2)_{\alpha - \beta}$$

$$z^n = (r_{\alpha})^n = (r^n)_{n\alpha}$$

$$\sqrt[n]{z} = (\sqrt[n]{z})_{\frac{\alpha + 360 \cdot k}{n}}; k = 0, 1, \dots, n-1$$

Representación gráfica

$$(a, b)$$

Un número complejo $z = a + bi$ puede representarse en el plano complejo mediante el punto (a, b) denominado afijo.

Ecuaciones con soluciones complejas

Admitiendo que la solución de una ecuación puede ser un número complejo, podremos hallar las soluciones de las ecuaciones en las que aparezcan raíces de números negativos.



EVALUACIÓN

6

NÚMEROS COMPLEJOS

1 Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- a) La parte imaginaria del número complejo $z = 6 - 8i$ es $\text{Im}(z) = 8$.
- b) El opuesto del conjugado de $z = 4 + 5i$ es $\bar{z} = 4 - 5i$.
- c) Cualquier número complejo en forma binómica puede representarse también en forma polar.
- d) Un número complejo con parte imaginaria nula no puede ser representado en forma polar.
- e) El inverso de $2i$ es $-0,5i$.
- f) El conjugado del inverso de $3 + 2i$ es $0,23 + 0,15i$.
- g) Si el módulo de z es r , el de $-z$ es $-r$.
- h) $i^{150} = i$

2 Dados los números complejos $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = -7i$, calcula los resultados de las siguientes operaciones:

- a) $z_1 + z_2$
- b) $|z_1| - \bar{z}_2$
- c) $\frac{z_1}{z_2}$
- d) $\frac{1}{z_1} - |z_2|$
- e) $-z_1 - z_2$
- f) $z_1 \cdot z_2$
- g) $z_1^2 + z_2^3$
- h) $\frac{1}{z_1 + z_2}$

Sol.: a) $3 - 5i$; b) $\sqrt{13} - 7i$; c) $-2/7 + 3i/7$;
 d) $-88/13 - 2i/13$; e) $-3 + 5i$; f) $14 - 21i$;
 g) $5 + 355i$; h) $3/34 + 5i/34$

3 Expresa en forma polar los números complejos y las operaciones escritas en forma binómica, viceversa.

- a) $z = 2 - 4i$
- b) $z = 6_{2\pi}$
- c) $z = (1 + 2i)^2$
- d) $z = (5 + 5i)^3$
- e) $z = 2 + 3i$
- f) $z = 5_{\pi} + 5_{\pi/2}$
- g) $z = i$
- h) $z = 0,5_{2\pi/3}$

Sol.: a) $4,47_{296,56^\circ}$; b) 6 ; c) $5_{126,86^\circ}$;
 d) $353,55_{135^\circ}$; e) $3,6_{56,3^\circ}$; f) $-5 + 5i$;
 g) $1_{\pi/2}$; h) $-0,25 + 0,43i$

4 Un complejo z más su conjugado al cuadrado es igual a $5 - 3i$. Halla el valor de z , sabiendo, además, que la parte real es el doble de la parte imaginaria.

Sol.: $2 + i$

5 Dados los números complejos $z_1 = 3_{\pi/2}$ y $z_2 = 3_{\pi}$, escribe los resultados de las siguientes operaciones en forma polar:

- a) $z_1 \cdot z_2$
- b) $z_1^3 \cdot z_2$
- c) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4$
- d) $\sqrt{z_1^3}$
- e) $\frac{z_1}{z_2}$
- f) $\frac{z_1}{z_2^2}$
- g) $\sqrt{z_2}$
- h) $z_1^2 + z_2^3$

Sol.: a) $9_{3\pi/2}$; b) $81_{5\pi/2}$; c) $1_{2\pi}$; d) $\sqrt{27}_{3\pi/4}$, $\sqrt{27}_{7\pi/4}$;
 e) $1_{3\pi/2}$; f) $(1/3)_{\pi/2}$; g) $\sqrt{3}_{\pi/2}$, $\sqrt{3}_{3\pi/2}$; h) 36_{π}

6 Sin efectuar ningún cálculo, indica cuáles son las dos raíces del polinomio de segundo grado $x^2 + 6x + 10 = 0$. Justifica el por qué de tu elección.

- a) $x = 3 + 3i$
- b) $x = 3 - i$
- c) $x = -3 + i$
- d) $x = -3 + 3i$
- e) $x = -3 - i$
- f) $x = 1 - 3i$

Finalmente, comprueba tu respuesta efectuando los cálculos correspondientes.

Sol.: d) y e)

7 Halla k para que $\frac{(k + 3i)^2 (1 - i)^2}{(2 - 2i)}$ sea:

- a) Un número real.
- b) Un imaginario puro.

Sol.: a) $3 \pm 3\sqrt{2}/2$; b) $-3 \pm 3\sqrt{2}$

8 Halla las raíces cúbicas de $z = \sqrt{32} + \sqrt{32}i$:

Sol.: $2_{\pi/4} = 1,41 + 1,41i$; $2_{11\pi/12} = -1,93 + 0,51i$;
 $2_{19\pi/12} = 0,51 - 1,93i$

9 Resuelve $x^2 + x + 2 = 0$ y representa gráficamente la función. Halla los puntos de corte con el eje X , si los hay. En caso contrario, explica por qué.

Sol.: $x_1 = -0,5 + 1,32i$; $x_2 = -0,5 - 1,32i$

10 Un vértice de un cuadrado centrado en el origen es el punto $P = (1, 2)$. Halla las coordenadas de los restantes vértices.

— Si P es el afijo de un número complejo, indica qué operaciones es necesario efectuar para conseguir los afijos correspondientes a los restantes vértices del cuadrado.

Sol.: $(-2, 1)$; $(-1, -2)$; $(2, -1)$



SOCIETY

El secreto de Gerolamo Cardano

Los números complejos fueron utilizados por primera vez en los trabajos de **Gerolamo Cardano** (1501-1576). Los usó en la resolución de ecuaciones de tercer y cuarto grado. No obstante, la resolución de las ecuaciones del tipo $x^3 + ax = b$ se le resistieron durante años.

Tuvo que ser un colega suyo, **Niccolo Fontana**, más conocido como **Tartaglia**, quien le proporcionó la solución general para este tipo de ecuaciones, si bien le hizo jurar que nunca la desvelaría.

Al cabo de un tiempo, llegaron a las manos de Cardano, unos documentos escritos por **Scipione del Ferro**, y anteriores a Tartaglia, que permitían llegar a la misma solución que este había explicado a Cardano. Con estos escritos, Cardano se consideró desligado de su juramento y publicó la solución general para las ecuaciones del tipo $x^3 + ax = b$.



N. Cardano



Tartaglia

SOCIETY

La filatelia y los números complejos

La representación de los números complejos en el plano tal y como la conocemos hoy en día se debe al famoso matemático alemán **Carl F. Gauss** (1777-1855). Con motivo del segundo centenario de su nacimiento, se editó este sello conmemorativo.



OPINION

Los números complejos y los negativos

« Los números complejos no son más absurdos que los negativos, y si estos se pueden representar en una recta entonces es posible representar los complejos en un plano».
(John Wallis, 1616-1703).

Este matemático inglés estableció de forma rigurosa la noción de límite en su obra *Aritmética Infinitorum* (1656), en la que por primera vez aparece el símbolo para designar la idea de infinito. También fue el primero en representar gráficamente números complejos aunque utilizando una metodología distinta a la actual.

– Accede al enlace <http://links.edebe.com/g48p> y explica con tus propias palabras en qué consistía esta metodología.

CRITICAL SENSE

¿SON ÚTILES LOS NÚMEROS COMPLEJOS?

En la actualidad no se cuestiona la aplicación de los números complejos en diversos ámbitos, tanto científicos como industriales o cotidianos. No obstante, este tipo de números también ha tenido sus detractores. Umaba que «Dios hizo los números naturales; el resto es obra del hombre». Con esta frase defendía que la aritmética y el análisis matemático se deben basar en los números enteros, prescindiendo así de los irracionales y los complejos.

– Accede al enlace <http://links.edebe.com/yhcdqs> y observa qué relación existe entre los números complejos y el diseño de las alas de los aviones.

– Busca en la Red información sobre aplicaciones concretas en las que los números complejos tengan un papel fundamental.

ENTREPRENEURS

LA ISLA DEL TESORO

Accede al enlace <http://links.edebe.com/4a6> en el que encontrarás un reto que debe resolverse relacionado con la famosa novela de **Robert L. Stevenson**.

– Formad grupos de 3-4 miembros y averiguad la solución a partir de la utilización de los números complejos.

– Preparad una presentación en PowerPoint o Prezzi con los pasos que habéis seguido para resolver el reto.