

NÚMEROS COMPLEJOS

La unidad imaginaria i .

Hay ecuaciones que no se pueden resolver en $\mathbb{R}$.

Por ejemplo: $x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$

En el siglo XVI “se inventaron” un número para resolver esta ecuación. Lo llamaron la unidad imaginaria, i .

Desde entonces estos números se conocen como imaginarios.

Euler llamó $i = \sqrt{-1}$ a los números imaginarios.

Posteriormente Gauss los llamó **números complejos**, $\mathbb{C}$. Por tanto, podemos definir un nuevo conjunto $\mathbb{C}$ en el que sí tiene solución.

$$i = \sqrt{-1}$$

$$x = \pm\sqrt{-1} \rightarrow \boxed{x = \pm i}$$

Los números complejos.

Números complejos se denotan con la letra $\mathbb{C}$ y verifican:

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $i = \sqrt{-1} \Leftrightarrow i^2 = -1$
- Los números complejos se pueden expresar de la forma: $z = a + bi$, donde a y b son números reales (forma binómica).
- Posee las operaciones de suma y multiplicación, con las mismas reglas que en $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

NOTAS.

- Se llama **parte real** de $z = a + bi$ al número real a , que se denota **$\text{Re}(z)$** , y **parte imaginaria** de $z = a + bi$, al número real b , que se denota **$\text{Im}(z)$** .
- Dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ son iguales si y solo si $a = c$ y $b = d$
- El opuesto de $z_1 = a + bi$ es $z_2 = -a - bi$.
- Si $b = 0$: el número complejo es en realidad un número real.
- Si $a = 0$: el número se llama complejo o imaginario puro.

Representación gráfica de un número complejo.

Se llama afijo de $z = a + bi$ al punto $P(a, b)$ del plano.

A las coordenadas de P se les llama, respectivamente:

- Parte real: $\text{Re}(z) = a$.
- Parte imaginaria: $\text{Im}(z) = b$.

El eje OX se llama **eje real**.

El eje OY se llama **eje imaginario**.

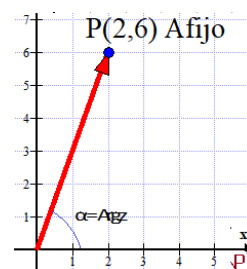
Módulo de z : es el módulo del vector $\vec{u} = (a, b)$ asociado a

$$z: |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Argumento de z : es el ángulo formado por el semieje positivo de las x y la semirrecta OP , medido en sentido antihorario. Se representa:

$$\text{Arg}(z) = \alpha = \arctg \frac{b}{a}$$

Se llama **argumento principal** al ángulo de la primera vuelta.



A esta representación geométrica se la conoce como el **Diagrama de Argand**.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{Arg}(z) = \alpha = \arctg \frac{b}{a}$$

Operaciones en forma binómica

Las operaciones de suma y producto definidas en los números reales se pueden extender a los números complejos.

Suma: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Producto: $(a + bi) \cdot (c + di) = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i$

El **conjugado** del número complejo $z = a + bi$, se define como:
 $\bar{z} = a - bi$.

División. Para dividir números complejos se multiplica, numerador y denominador por el conjugado del denominador.

EJEMPLO

Realiza:

- $i^0 = 1$;
- $i^1 = i$.
- $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1(-i)}{i(-i)} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = -i$
- $i^2 = -1$.
- $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$.
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$.
- Cuando el exponente es mayor de 4, basta dividirlo entre 4 y quedarnos con el resto.

$$i^{43} = i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ 03 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ \hline 10 \end{array}$$

- $(3 + 5i) + (7 - 2i) = 10 + 3i$
- $(3 + 5i) \cdot (7 - 2i) = 21 - 6i + 35i - 10i^2 = 31 + 29i$
- $\frac{3}{2+i} = \frac{3 \cdot (2-i)}{(2+i) \cdot (2-i)} = \frac{6-3i}{2^2-i^2} = \frac{6-3i}{4-(-1)} = \frac{6-3i}{5} = \frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$
- $(1+i)^4 = \binom{4}{0} \cdot 1^4 + \binom{4}{1} \cdot 1^3 \cdot i + \binom{4}{2} \cdot 1^2 \cdot i^2 + \binom{4}{3} \cdot 1 \cdot i^3 + \binom{4}{4} \cdot i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4$.

Propiedades de las operaciones con complejos conjugados

$$1) \overline{\overline{z}} = z$$

$$2) z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$3) z - \overline{z} = 2\operatorname{Im}(z)i$$

$$4) z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

$$5) \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

$$6) \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$7) \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix}; z_2 \neq 0$$

$$8) z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}; z \neq 0$$

Demostraciones.

$$1) \overline{\overline{z}} = \overline{a + bi} = \overline{a - bi} = a + bi = z$$

$$2) z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$3) z - \overline{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi = 2\operatorname{Im}(z)i$$

$$4) z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = (a^2 + b^2) + i(ba - ab) = (a^2 + b^2) = |z|^2$$

$$5a) \overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i = \\ = (a - bi) + (c - di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$5b) \overline{z_1 - z_2} = \overline{(a + bi) - (c + di)} = \overline{(a - c) + (b - d)i} = (a - c) - (b - d)i = \\ = (a - bi) - (c - di) = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$6) \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} = \overline{(a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i} = (a \cdot c - b \cdot d) - (a \cdot d + b \cdot c)i$$

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a + bi) \cdot (c + di) = (a - bi) \cdot (c - di) = (a \cdot c - b \cdot d) - (a \cdot d + b \cdot c)i$$

Desde ambos miembros de la igualdad llegamos al mismo resultado.

Se cumple.

$$7) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{\overline{z_1 \cdot z_2}}{\overline{z_2 \cdot z_2}}\right)} = \frac{\overline{z_1 \cdot z_2}}{\overline{z_2 \cdot z_2}} = \frac{\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}}{\overline{z_2} \cdot \overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}; z_2 \neq 0$$

Complejos en forma polar y trigonométrica.

Para obtener la forma polar de un número complejo hay que calcular su módulo y su argumento.

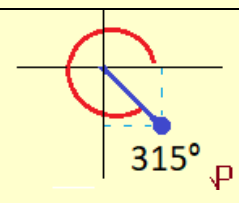
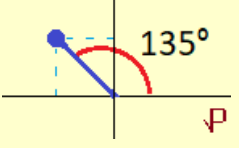
$$z = a + bi = r_\alpha, \text{ donde: } \begin{cases} r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha = \operatorname{Arg}(z) = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \end{cases}$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha = \operatorname{Arg}(z) = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

EJEMPLO

Expresa los números complejos $z = 1 - i$ y $z = -1 + i$ en forma polar

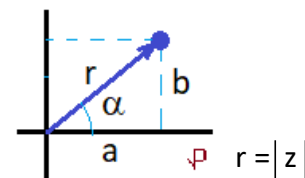
Binómica	Polar	
$z = 1 - i$	$r = z = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{-1}{1} = 315^\circ$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} r \\ \alpha \end{matrix}} \right\} \rightarrow z = \sqrt{2}_{315^\circ}$	
$z = -1 + i$	$r = z = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{-1} = 135^\circ$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} r \\ \alpha \end{matrix}} \right\} \rightarrow z = \sqrt{2}_{135^\circ}$	

¿Qué es la forma trigonométrica? Del esquema de la derecha

podemos concluir:
$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{r} \rightarrow a = r \cos \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{r} \rightarrow b = r \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$$

Así pues, para pasar de forma polar a forma binómica:

$$z = r_\alpha, \text{ donde: } \begin{cases} a = r \cos \alpha \\ b = r \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$$



$$a = r \cos \alpha$$

$$b = r \operatorname{sen} \alpha$$

La forma trigonométrica de un número complejo z se calcula de la siguiente forma: $z = a + bi = r \cos \alpha + (r \operatorname{sen} \alpha)i = r (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$

EJEMPLO

Expresa el número complejo $z = 1 + i$ en forma polar y trigonométrica:

Binómica	Polar	Trigonométrica
$z = 1 + i$	$r = z = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{1} = 45^\circ$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} r \\ \alpha \end{matrix}} \right\} \rightarrow z = \sqrt{2}_{45^\circ}$	$z = \sqrt{2} \cdot (\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$

Operaciones en forma polar

Usaremos la forma polar para multiplicar, dividir y hacer raíces.

- Producto: $r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$
- Potencias: $(r_\alpha)^n = (r)_{n\alpha}^n = r^n (\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha)$
- División: $r_\alpha : s_\beta = (r : s)_{\alpha-\beta}$
- Raíces. Las raíces n -ésimas de un complejo $z = a + bi = r_\alpha$

tienen la forma: s_β , donde:
$$\begin{cases} s = \sqrt[n]{r} \\ \beta = \frac{\alpha + 360^\circ \cdot k}{n}; k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

Fórmula de Moivre

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = (\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha)$$

Un ángulo puede expresarse en grados o en radianes.

Demostraciones

Producto

$$\begin{aligned} r_\alpha \cdot s_\beta &= r (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \cdot s (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) = \\ &= r \cdot s [(\cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta) + i(\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta)] = \\ &= r \cdot s [\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta)] = (r \cdot s)_{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

Potencias

$$(r_\alpha)^n = (r (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha))^n \underset{\text{Moivre}}{=} r^n (\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) = (r)_{n\alpha}^n$$

División

$$\begin{aligned} r_\alpha : s_\beta &= r (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) : s (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) = \\ &= (r : s) \frac{\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha}{\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta} \cdot \frac{\cos \beta - i \operatorname{sen} \beta}{\cos \beta - i \operatorname{sen} \beta} = \\ &= \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - i \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta + i \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - i^2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}{\cos^2 \beta - i^2 \operatorname{sen}^2 \beta} = \\ &= \frac{\cos(\alpha - \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \beta} \cdot \frac{\cos(\alpha - \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{1} = \\ &= (r : s)_{\alpha-\beta} \end{aligned}$$

Raíces. No la demostraremos.

EJEMPLO

Realiza las raíces sextas de la unidad:

El número 1 es un número real, luego su parte imaginaria vale cero.

En forma compleja será: $z = 1 + 0i$, y al pasarlo a forma polar resulta:

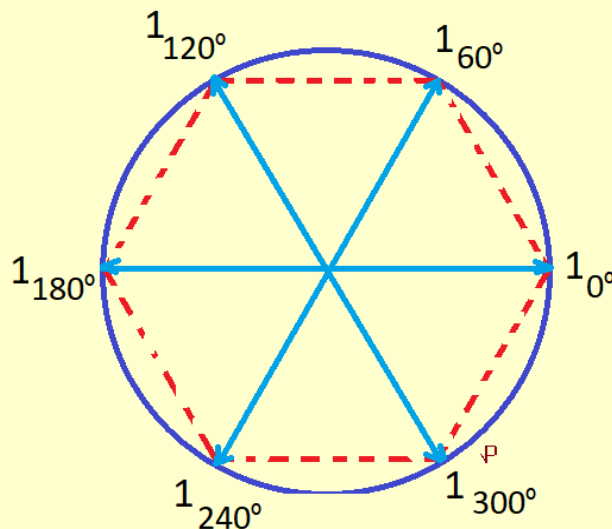
$$\left. \begin{aligned} r = |z| &= \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \\ \alpha &= \arctg \frac{0}{1} = 0^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow z = 1_{0^\circ}$$

Sus raíces sextas tienen la forma: s_β , donde:
$$\begin{cases} s = \sqrt[6]{1} = 1 \\ \beta = \frac{0^\circ + 360^\circ \cdot k}{6}; k = 0, 1, \dots, 5 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\beta = \frac{0^\circ + 360^\circ \cdot k}{6}; k = 0, 1, \dots, 5 \rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \frac{360^\circ \cdot 0}{6} = 0^\circ \rightarrow z_1 = 1_{0^\circ} \\ \beta_2 = \frac{360^\circ \cdot 1}{6} = 60^\circ \rightarrow z_2 = 1_{60^\circ} \\ \beta_3 = \frac{360^\circ \cdot 2}{6} = 120^\circ \rightarrow z_3 = 1_{120^\circ} \\ \beta_4 = \frac{360^\circ \cdot 3}{6} = 180^\circ \rightarrow z_4 = 1_{180^\circ} \\ \beta_5 = \frac{360^\circ \cdot 4}{6} = 240^\circ \rightarrow z_5 = 1_{240^\circ} \\ \beta_6 = \frac{360^\circ \cdot 5}{6} = 300^\circ \rightarrow z_6 = 1_{300^\circ} \end{cases}$$

De donde obtenemos el gráfico siguiente (siempre es un polígono regular):



Teorema fundamental del álgebra. Ecuaciones.

El **teorema fundamental del álgebra** establece que un polinomio $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ con coeficientes complejos de grado $n > 0$, tiene exactamente n soluciones complejas, contando multiplicidades. Entonces: $P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$.

EJEMPLO

Factoriza $P(z) = z^3 - z^2 + 4z - 4$

Tiene tres raíces. Probamos con las posibles raíces reales: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

	1	-1	4	-4
1		1	0	4
	1	0	4	0

$$z^3 - z^2 + 4z - 4 = (z - 1)(z^2 + 4)$$

$$z^2 + 4 = 0 \rightarrow z = \pm \sqrt{-4} = \pm 2i$$

$$\text{Por tanto: } P(z) = (z - 1) \cdot (z - 2i) \cdot (z + 2i)$$

Notas

- Todo polinomio de **grado impar** con **coeficientes reales**, tiene al menos una raíz real.
- En los **polinomios con coeficientes reales**, las raíces complejas aparecen por parejas. Quiere decir que si una raíz es compleja, su conjugada, también es raíz del polinomio.

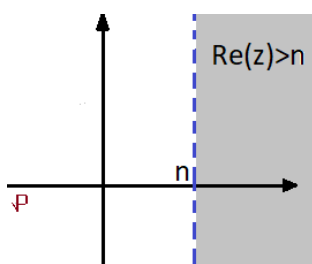
Regiones del plano.

Notas:

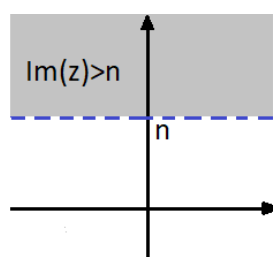
- Recuerda que el trazo debe ser discontinuo si la desigualdad es estricta ($<$, $>$) y continuo en caso contrario ($\leq$, $\geq$).
-

Semiplanos.

$\operatorname{Re}(z) > n$



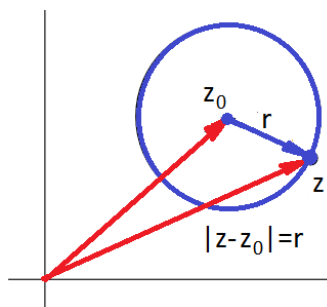
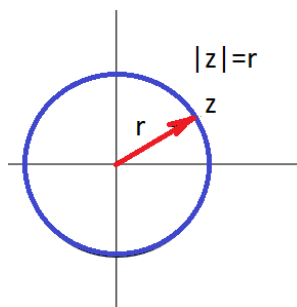
$\operatorname{Im}(z) > n$



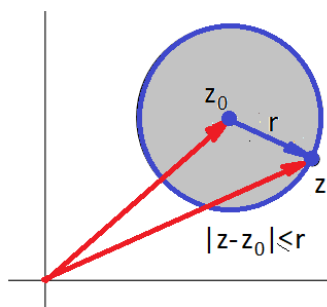
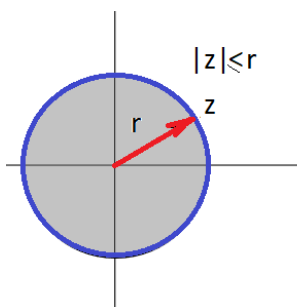
$\operatorname{Re}(z)$ es el eje OX.

$\operatorname{Im}(z)$ es el eje OY.

La circunferencia:



El círculo:

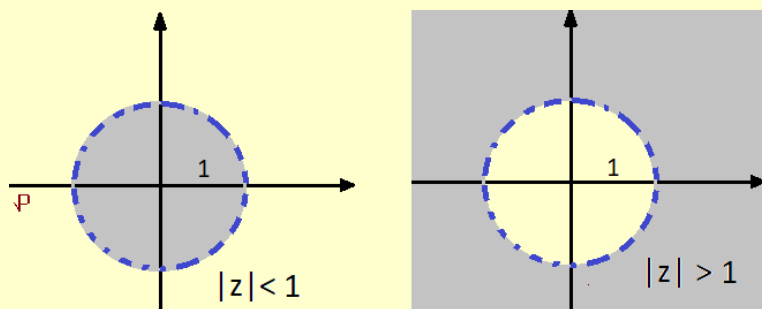


Si la desigualdad es estricta, el borde no formaría parte del lugar geométrico y se dibujaría con trazo discontinuo.

EJEMPLO

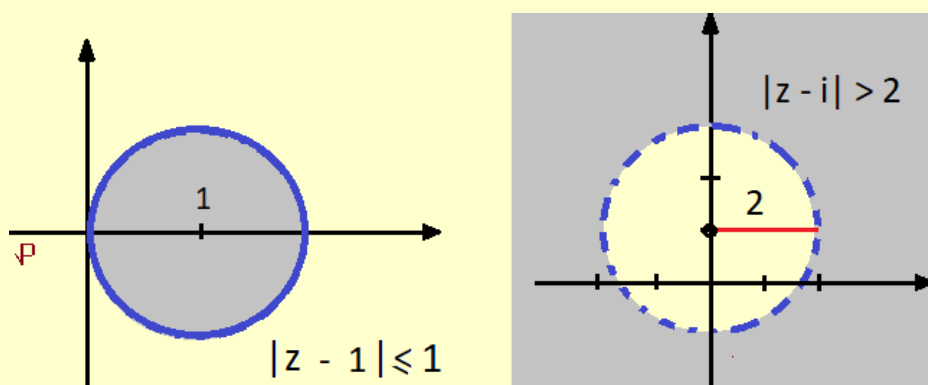
Representa las regiones del plano: $|z| < 1$ y $|z| > 1$

Están centradas en $(0,0)$ y de radio 1. Así:



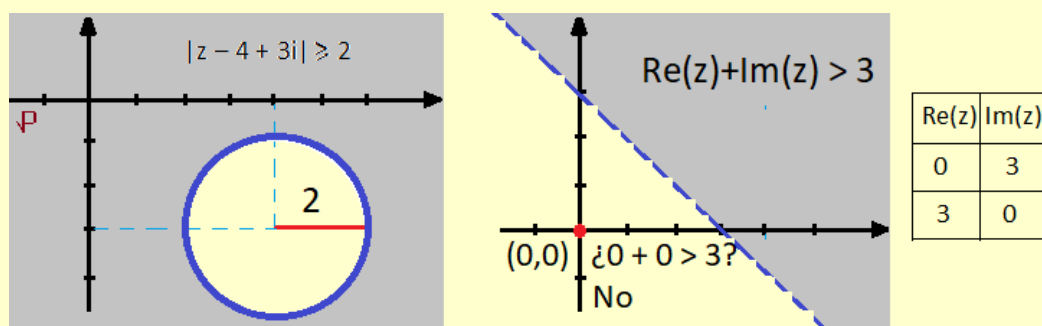
Representa las regiones del plano: $|z - 1| \leq 1$ y $|z - i| > 2$

La primera está centrada en $(1,0)$, con radio 1. La segunda en $(0,1)$, con radio 2. Así:



Representa las regiones del plano: $|z - 4 + 3i| \geq 2$ y $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) > 3$.

Está centrada en el punto $(4,-3)$, con radio 2. Así:



EJERCICIOS DEL TEMA**Soluciones**

1. Realiza:

a. $(2 - i) \cdot (1 + 2i)$

a) $4 + 3i$

b. $(2 + i) - i(1 - 2i)$

b) 0

c. $(3 - 2i) \cdot (3 + 2i)$

c) 13

d. $\frac{i}{1+i}$

d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

e. $(1 - i)^4$

e) -4

f. $\frac{2+3i}{1-5i}$

f) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

g. $\frac{5+10i}{3-4i} + \frac{2-i}{i}$

g) -2

2. Representar en el plano (afijo y vector) los números complejos:

$a = 2 - i$, $b = -3i$, $c = 1 - 2i$ y $d = -3$.

3. Demostrar que: si $z \neq 0$, entonces $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

4. Calcula el modulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

a. $\sqrt{3} - i$

b. $-2 - 2i$

c. $-3i$

5. Escribe el complejo z en forma polar y trigonométrica

a. $1 + \sqrt{3}i$

b. 4

c. $3i$

6. Escribe en forma polar los complejos:

a. $4 + 3i$

a) $5_{71,56^\circ}$

b. $-1 + i$

b) $\sqrt{2}_{135^\circ}$

c. $5 - 12i$

c) $13_{292,6^\circ}$

7. Determinar el valor de k, real, para que $z = (-3-i)(2+ki)$:

- a. sea un número real.
- b. sea un número imaginario puro.
- c. tenga módulo igual a $\sqrt{44}$.

a) $k = -3/2$

b) $k = 6$

c) $k = \pm \frac{\sqrt{10}}{5}$

8. Realiza: $\left(\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}\right)^{120}$

1

9. Resuelve y simplifica:

a. $\frac{(1+2i)^2 \cdot i^{35}}{(3-2i) - (2+i)}$

a) $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

b. $\frac{(2+i)^{-1} \cdot (2+i)^2}{i^{43} \cdot (3-2i)}$

b) $-\frac{7}{13} + \frac{4}{13}i$

10. Calcular z sabiendo que $iz^{-1} = 2-i$

$-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

11. Realiza: $(1+i)^{20} - (1-i)^{20}$

0

12. Demuestra la fórmula de Moivre para $n = 2$.

13. Calcula el módulo y el argumento de $z = \frac{-1+i}{-3\sqrt{3}+3i}$

$|z| = \frac{\sqrt{2}}{6}; \arg(z) = 345^\circ$

Más fácil pasando a forma polar

14. Calcula los valores de a y b para que:

a. $(a+i) \cdot (b-3i) = 7-11i$

b. $\frac{3-ai}{1+2i} = b+2i$

15. Hallar los números complejos tales que su cuadrado es igual a su conjugado (en forma polar).

$z_1 = 1; z_2 = 1_{120^\circ}, z_3 = 1_{240^\circ}$

16. Realiza

a. $\frac{3_{45^\circ} \cdot 2_{15^\circ}}{6_{30^\circ}}$

a) 1_{30°

b. $\frac{2_{30^\circ} \cdot 3_{60^\circ}}{3_{120^\circ} \cdot 1_{300^\circ}}$

b) 2_{30°

c. $\frac{2_{45^\circ} \cdot 2_{15^\circ}}{4_{90^\circ}}$

c) 1_{330°

17. El complejo de argumento 80° y módulo 12 es el producto de dos complejos; uno de ellos tiene de módulo 3 y argumento 50° .

Escribe el otro complejo en forma binómica.

18. Calcula las potencias:

a. $[3(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)]^4$

b. $(\sqrt{2} \cdot 30^\circ)^6$

c. $[\sqrt[3]{3}(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)]^6$.

a) 81_{180°

b) $8_{180^\circ} = -8$

c) 9_{60°

19. Calcula las raíces quintas de la unidad. Representálas.

$1_0^\circ; 1_{72^\circ}; 1_{144^\circ}; 1_{216^\circ}; 1_{288^\circ}$

20. Calcula y representa:

a. $\sqrt[3]{-3+3i}$

b. $\sqrt[4]{i}$

c. $\sqrt[5]{-1+i}$

a) $\sqrt[6]{18}_{45^\circ}, \sqrt[6]{18}_{165^\circ}, \sqrt[6]{18}_{285^\circ}$

b) $1_{22,5^\circ}, 1_{112,5^\circ}, 1_{202,5^\circ}, 1_{292,5^\circ}$

c) $\sqrt[10]{2}_{27^\circ}, \sqrt[10]{2}_{99^\circ}, \sqrt[10]{2}_{171^\circ}, \sqrt[10]{2}_{243^\circ}, \sqrt[10]{2}_{315^\circ}$

21. Halla las coordenadas polares de los vértices de un hexágono regular de radio 3 u, sabiendo que un vértice está situado en el eje OX.

$3_0^\circ, 3_{60^\circ}, 3_{120^\circ}, 3_{180^\circ}, 3_{240^\circ}, 3_{300^\circ}$

22. Describe el conjunto de los números complejos que cumplen que $|z+2i| = \sqrt{10}$

Circunferencia de centro $(0,-2)$ y radio $\sqrt{10}$ u

23. Describir el lugar geométrico de los puntos del plano $z = x + iy$ que verifican:

a. $\operatorname{Re}(z) > 3$

b. $\operatorname{Im}(z) \leq -1$

c. $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) \leq 2$

d. $|z| < 3$

e. $|z+3| = 2$

f. $|z+i| > 1$

g. $|z-1+i| \leq 2$

24. Resuelve: $z^3 - 8 = 0$. Expresa las soluciones en forma polar y binómica.

$2_0^\circ = 2, \quad 2_{120^\circ} = -1 + \sqrt{3}i,$

$2_{240^\circ} = -1 - \sqrt{3}i$

25. Resuelve, dando las soluciones en forma polar:

a. $z^6 + 64 = 0$

b. $z^3 - 27 = 0$

26. Resolver:

a. $z^2 - 4z + 13 = 0$

b. $z^3 + 4z^2 + 9z + 36 = 0$

c. $z^2 - 2z + 5 = 0$

d. $z^2 - 6z + 13 = 0$

e. $z^2 - 4z + 5 = 0$

27. Resolver el siguiente sistema, donde x e y son números complejos:

a.
$$\begin{cases} (2+i)x + 2y = 1+7i \\ (1-i)x + iy = 0 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} xi + (2+i)y = -3+7i \\ (2-i)x + (2+i)y = 5+3i \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} (1+2i)x + (1+i)y = 5+5i \\ (2+i)x + iy = 2+2i \end{cases}$$

a) $2_{30^\circ}, 2_{90^\circ}, 2_{150^\circ}, 2_{210^\circ}, 2_{270^\circ}, 2_{330^\circ}$

b) $3; 3_{120}; 3_{240}$

a) $z_1 = 2 + 3i; z_2 = 2 - 3i$

b) $z_1 = -4; z_2 = 3i; z_3 = -3i$

c) $1+2i, 1-2i$

d) $3+2i, 3-2i$

e) $2+i, 2-i$

a) $x = 1 + i; y = 2i$

b) $x = 3 + i; y = 2i$

c) $x = 1 - i; y = 3 + i$

TEMA 7 – NÚMEROS COMPLEJOS				
Unidad imaginaria	Complejos	Forma binómica	Forma polar	Forma trigonométrica
$i = \sqrt{-1}$	$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	$z = a + b\ i$	$z = r_{\alpha}$	$z = a + bi = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$
Afijo	Parte real/imaginaria	De binómica a polar	De polar a binómica	Fórmula de Moivre
El afijo de $z = a + bi$ es el punto $P(a, b)$.	Parte real: $\operatorname{Re}(z) = a$. Parte imaginaria: $\operatorname{Im}(z) = b$	$\begin{cases} r = z = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha = \operatorname{Arg} z = \arctg \frac{b}{a} \end{cases}$	$\begin{cases} a = r \cos \alpha \\ b = r \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$	$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = (\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha)$
Operaciones - Forma binómica		Propiedades de los conjugados		Operaciones - Forma polar
• Suma: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d) i$ • El opuesto de $z_1 = a + bi$ es $z_2 = -a - bi$. • Producto: $(a + bi) \cdot (c + di) = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c) i$ • El conjugado del número complejo $z = a + bi$, se define como: $\bar{z} = a - bi$. • División. Para dividir números complejos se multiplica, numerador y denominador por el conjugado del denominador.		1) $\bar{\bar{z}} = z$ 2) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ 3) $z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im}(z) i$ 4) $z \cdot \bar{z} = z ^2$ 5) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ 6) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ 7) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}; z_2 \neq 0$ 8) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{ z ^2}; z \neq 0$		• Producto: $r_{\alpha} \cdot s_{\beta} = (r \cdot s)_{\alpha + \beta}$ • Potencias: $(r_{\alpha})^n = (r)_{n\alpha} = r^n (\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha)$ • División: $r_{\alpha} : s_{\beta} = (r : s)_{\alpha - \beta}$ • Las raíces n-ésimas de un complejo $z = a + bi = r_{\alpha}$ tienen la forma: s_{β}, donde:$\begin{cases} s = \sqrt[n]{r} \\ \beta = \frac{\alpha + 360^{\circ} \cdot k}{n}; k = 0, 1, \dots, n - 1 \end{cases}$

