Ejercicio 1

La elongación en un movimiento armónico simple es $x = 2 \cdot \cos(30\pi t)$, siendo t el tiempo en segundos y x la elongación en centímetros. ¿Cuáles son la amplitud, la frecuencia y el periodo de este movimiento?

Si comparamos la ecuación dada con la ecuación general de la elongación:

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \leftrightarrow x = 2 \cdot \cos(30\pi t)$$

$$\boxed{A = 2 \text{ cm}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 30\pi \longrightarrow \boxed{T = \frac{1}{15} \text{ s}}$$

$$f = \frac{1}{T} \longrightarrow \boxed{f = 15 \text{ Hz}}$$

Ejercicio 2

En un movimiento armónico simple, el módulo de la aceleración coincide con el de la elongación, expresadas en el mismo sistema de unidades. ¿Cuánto vale el periodo?

Las ecuaciones del movimiento armónico simple son:

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 \cdot x$$

Si el módulo de la aceleración coincide con el de la elongación:

$$x = \omega^2 \cdot x \longrightarrow \omega^2 = 1 \longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 1 \longrightarrow \boxed{T = 2\pi \text{ s}}$$

Ejercicio 3

Una partícula inicia un movimiento armónico simple en el extremo de su trayectoria y tarda $0'10$ segundos en ir al centro de la misma. Si la distancia entre ambas posiciones es $0'20$ metros, calcula:

a. El periodo del movimiento, la frecuencia y la pulsación.

El periodo es el tiempo que tarda la partícula en el movimiento de ida y vuelta a un mismo punto. Si tarda $0'10$ s en ir desde un extremo al centro, tardará otros $0'10$ s en llegar al extremo opuesto, a lo que habría que añadir $0'20$ s más para el recorrido de vuelta. Por tanto:

$$\boxed{T = 0'40\ \mathrm{s}} \quad \text{y} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0'40} \longrightarrow \boxed{f = 2'5\ \mathrm{Hz}}$$

La frecuencia angular o pulsación es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0'40} \longrightarrow \boxed{\omega = 5\pi\ \mathrm{rad/s}}$$

b. La posición de la partícula un segundo después de iniciar el movimiento.

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{Siendo}\ \ A = 0'20\ \mathrm{m} \longrightarrow x = 0'20 \cdot \cos(5\pi t + \varphi_0)$$

A los $0'10$ segundos se encuentra en el centro ($x = 0$):

$$0 = 0'20 \cdot \cos(5\pi \cdot 0'10 + \varphi_0) \longrightarrow \cos(5\pi \cdot 0'10 + \varphi_0) = 0$$

El coseno de un ángulo es cero cuando el ángulo es 90º o $\pi/2$ rad:

$$5\pi \cdot 0'10 + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \varphi_0 = 0$$

Como la fase inicial es cero, la ecuación queda:

$$x = 0'20 \cdot \cos(5\pi t)$$

$$\text{Si}\ t = 1 \longrightarrow x_1 = 0'20 \cdot \cos(5\pi) = 0'20 \cdot (-1) \longrightarrow \boxed{x_1 = -0'20\ \mathrm{m}}$$

Ejercicio 4

Un bote se balancea arriba y abajo. El desplazamiento vertical del bote viene dado por:

$$y = 1'2\ \mathrm{m} \cdot \cos\left(\frac{t}{2\ s} + \frac{\pi}{6}\right)$$

a. Determinar la amplitud, frecuencia angular, constante de fase, frecuencia y periodo del movimiento

$$y = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \longrightarrow \boxed{A = 1'2\ \mathrm{m}}, \quad \boxed{\omega = \frac{1}{2}\ \mathrm{rad/s}}, \quad \boxed{\varphi_0 = \frac{\pi}{6}},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1/2} \longrightarrow \boxed{T = 4\pi\ \mathrm{s}} \quad \mathrm{y} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4\pi} \longrightarrow \boxed{f = 0'08\ \mathrm{Hz}}$$

b. ¿Dónde se encuentra el bote cuando $t = 1$ s?

$$t = 1 \longrightarrow y = 1'2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \longrightarrow \boxed{y = 0'624\ \mathrm{m}}$$

c. Determinar la velocidad y la aceleración en cualquier tiempo t

$$v = \frac{dy}{dt} = -1'2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \longrightarrow \boxed{v = -0'6 \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \ \ (\mathrm{en\ m/s})}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -0'6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \longrightarrow \boxed{a = -0'3 \cdot \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \ \ (\mathrm{en\ m/s^2})}$$

d. Calcular la posición inicial, la velocidad y la aceleración del bote

$$t = 0 \longrightarrow y_0 = 1'2 \cdot \cos\left(0 + \frac{\pi}{6}\right) \longrightarrow \boxed{y_0 = 1'04\ \mathrm{m}}$$

$$t = 0 \longrightarrow v_0 = -0'6 \cdot \mathrm{sen}\left(0 + \frac{\pi}{6}\right) \longrightarrow \boxed{v_0 = -0'3\ \mathrm{m/s}}$$

$$t = 0 \longrightarrow a_0 = -0'3 \cdot \cos\left(0 + \frac{\pi}{6}\right) \longrightarrow \boxed{a_0 = -0'26\ \ \mathrm{m/s^2}}$$

Ejercicio 5

Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple. Escribe su ecuación si la aceleración máxima es $5\pi^2$ cm · s^{-2}, el periodo de las oscilaciones es 2 s y la elongación inicial es $2'5$ cm.

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Conociendo el periodo, el cálculo de ω es inmediato:

$$T = 2\ \mathrm{s} \longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ \ \mathrm{rad/s}$$

Con este dato y el de la aceleración máxima determinamos la amplitud:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \longrightarrow |a_{máx}| = A \cdot \omega^2$$

$$5\pi^2\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} = A \cdot \left(\pi\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)^2 \longrightarrow A = 5\ \mathrm{cm}$$

Sustituimos en la expresión general del movimiento armónico simple:

$$x = 5 \cdot \cos(\pi t + \varphi_0)$$

Como en el instante inicial $(t = 0)$ la elongación es $2'5$ cm:

$$2'5 = 5 \cdot \cos\varphi_0 \longrightarrow \cos\varphi_0 = \frac{1}{2} \longrightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{3}$$

Finalmente, la ecuación resultante es:

$$\boxed{x = 5 \cdot \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\ \ (\mathrm{en\ cm})}$$

Ejercicio 6

El movimiento armónico simple que realiza una partícula está caracterizado por una amplitud $A = 20$ cm, siendo la aceleración máxima alcanzada por ella de 40 m · s^{-2}. Calcular la velocidad máxima.

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A \cdot \omega \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0) \quad \mathrm{y} \quad a = \frac{dv}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$|a_{máx}| = A \cdot \omega^2 \longrightarrow 40\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0'2\ \mathrm{m} \cdot \omega^2 \longrightarrow \omega = 10 \cdot \sqrt{2} = 14'14\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

$$|v_{máx}| = A \cdot \omega = 0'2 \cdot 10 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = \boxed{2'83\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

Ejercicio 7

Un objeto oscila con frecuencia angular ω = 8 rad/s. En t = 0, el objeto se encuentra en x_0 = 4 cm con una velocidad inicial v_0 = –25 cm/s. Determinar la amplitud y la constante de fase para este movimiento. Escribir x en función del tiempo.

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \longrightarrow v = \frac{dx}{dt} = -A \cdot \omega \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

Sustituyendo los datos, obtenemos las siguientes expresiones:

$$4 = A \cdot \cos(\varphi_0) \quad \text{y} \quad -25 = -A \cdot 8 \cdot \mathrm{sen}(\varphi_0)$$

Resolviendo el sistema obtenemos los valores de A y φ_0. Una estrategia útil en estos casos consiste en dividir la segunda entre la primera:

$$-\frac{25}{4} = -\frac{A \cdot 8 \cdot \mathrm{sen}(\varphi_0)}{A \cdot \cos(\varphi_0)} \longrightarrow \frac{25}{32} = \tan(\varphi_0) \longrightarrow \boxed{\varphi_0 = 0'663 \text{ rad}}$$

$$A = \frac{4}{\cos \varphi_0} = \frac{4}{\cos(0'663)} \longrightarrow \boxed{A = 5'08 \text{ cm}}$$

Con todos los parámetros calculados estamos en condiciones de completar la ecuación de la posición en función del tiempo:

$$\boxed{x = (5'08) \cdot \cos(8\pi + 0'663) \quad (\text{en cm})}$$

Ejercicio 8

Un cuerpo de masa 3 kg se encuentra conectado a un muelle y oscila con una amplitud de 4 cm y un periodo de 2 s, ¿en qué posición la velocidad del objeto será igual a la mitad de su valor máximo?

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \longrightarrow v = \frac{dx}{dt} = -A \cdot \omega \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

En esta ocasión $A = 4$ cm y ω puede calcularse conociendo el periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \ \mathrm{rad/s}$$

Sustituyendo en la ecuación de la velocidad:

$$v = -4\pi \cdot \mathrm{sen}(\pi t + \varphi_0) \longrightarrow |v_{máx}| = 4\pi \ \mathrm{cm/s}$$

Cuando la velocidad es la mitad de la velocidad máxima:

$$v = \frac{v_{máx}}{2} = 2\pi \ \mathrm{cm/s} \longrightarrow 2\pi = -4\pi \cdot \mathrm{sen}(\pi t + \varphi_0) \longrightarrow \mathrm{sen}(\pi t + \varphi_0) = -\frac{1}{2}$$

$$(\pi t + \varphi_0) = -30^{\circ} = -\frac{\pi}{6} \ \mathrm{rad}$$

La posición en ese instante, es decir, cuando la fase es $-\pi/6$ rad:

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = 4 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \longrightarrow \boxed{x = 3'46 \ \mathrm{cm}}$$