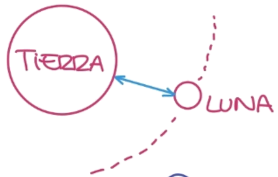
CINEMÁTICA

Movimiento Circular Uniforme (M.C.U.)

1. El período de traslación de la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra es de 27,3días. Si la distancia media entre ambos astros es de 285000km, calcula:

a) La velocidad angular y la velocidad lineal del satélite.
b) El ángulo barrido y el espacio recorrido en un día.
c) La aceleración del movimiento.



$$T = 27'3\,\text{días} \cdot \frac{24h}{1\,\text{día}} \cdot \frac{3600s}{1h} = 2'36 \cdot 10^6 s$$

$$R = 385000\,km = 3'85 \cdot 10^5\,km = 3'85 \cdot 10^8\,m$$

a) $$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2'36 \cdot 10^6 s} = 2'66 \cdot 10^{-6}\,(rad/s)$$

$$v = \omega R = 2'66 \cdot 10^{-6}\,\frac{rad}{s} \cdot 3'85 \cdot 10^8\,m = 1'03 \cdot 10^3\,(m/s)$$

b) $$t = 1\,\text{día} \cdot \frac{24h}{1\,\text{día}} \cdot \frac{3600s}{1h} = 86400s$$

MCU: $\omega = cte$, $\alpha = 0$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0)$$

Si no nos dicen nada: $\varphi_0 = 0$, $t_0 = 0$

$$\Longrightarrow \varphi = \omega t = 2'66 \cdot 10^{-6}\,\frac{rad}{s} \cdot 86400s = 0'23\,rad$$

Relación entre ángulo y espacio recorrido:

$$d = \varphi \cdot R = 0'23 \cdot 3'85 \cdot 10^8 = 8'85 \cdot 10^7\,(m)$$

c) $$a_t = \frac{d\omega}{dt} = 0$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = (2'66 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 3'85 \cdot 10^8 = 2'76 \cdot 10^{-3}\,(m/s^2)$$

2. La ecuación vectorial del M.C.U. es:

$$\vec{r}(t) = R \cdot [\cos(\omega t)\,\hat{\imath} + sen(\omega t)\hat{\jmath}]$$

con ω constante. Obtén los vectores velocidad y aceleración, y sus módulos.

$$\vec{r}(t) = R[\cos(\omega t)\hat{\imath} + sen(\omega t)\hat{\jmath}]$$

- $$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R[-sen(\omega t)\omega\hat{\imath} + \cos(\omega t)\omega\hat{\jmath}] = [-R\omega\, sen(\omega t)\hat{\imath} + R\omega\cos(\omega t)\hat{\jmath}]$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(R\omega\,\text{sen}(\omega t))^2 + (R\omega\cos(\omega t))^2} =$$

$$= \sqrt{(R\omega)^2}\,\sqrt{\underbrace{\text{sen}^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)}_{1}} = R\omega$$

- $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\left[-\cos(\omega t)\,\omega^2\hat{\imath} - \text{sen}(\omega t)\,\omega^2\hat{\jmath}\right] =$

$$= \left[-R\omega^2\cos(\omega t)\hat{\imath} - R\omega^2\,\text{sen}(\omega t)\hat{\jmath}\right]$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(R\omega^2\cos(\omega t))^2 + (R\omega^2\,\text{sen}(\omega t))^2} =$$

$$= \sqrt{(R\omega^2)^2}\,\sqrt{\underbrace{\cos^2(\omega t) + \text{sen}^2(\omega t)}_{1}} = R\omega^2$$

3. Un móvil describe un M.C.U. de 30cm de radio a 10m/s. Calcula:

a) La velocidad angular (en rad/s y rpm).

b) El período y la frecuencia.

c) El número de vueltas que da en 15minutos.

d) La aceleración.

$R = 30cm = 0'3m$

$v = 10m/s$

ⓐ $v = \omega R \longrightarrow \omega = \frac{v}{R} = \frac{10}{0'3} = 33'33\ rad/s$

$$33'33\,\frac{\cancel{rad}}{\cancel{s}}\cdot\frac{60\cancel{s}}{1min}\cdot\frac{1rev}{2\pi\,\cancel{rad}} = 318'3\ rpm$$

ⓑ $\omega = 2\pi f \longrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{33'33}{2\pi} = 5'30Hz$

$$\downarrow$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5'30} = 0'19s$$

ⓒ MCU: $\omega = cte$, $\alpha = 0$

$$\varphi = \varphi_o + \omega(t - t_o)$$

Si no nos dicen nada: $\varphi_o = 0$, $t_o = 0$

$\Longrightarrow \varphi = \omega t = 318'3\,\frac{rev}{min}\cdot 15min = 4774,5$ vueltas

ⓒ $a_t = \frac{d\omega}{dt} = 0$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = 33'33^2\cdot 0'3 = 333'27\,(m/s^2)$$

Movimiento Circular Uniformemente Acelerado (M.C.U.A.)

4. A partir de las ecuaciones del M.C.U.A., obtén la expresión matemática que relaciona la velocidad angular con el ángulo barrido. ¿Cuál sería su equivalente para el M.R.U.A.?

Ecuaciones del M.C.U.A.: $\left[\begin{array}{l}\omega = \omega_0 + \alpha(t-t_0) \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t-t_0)^2\end{array}\right.$

Despejo '$t-t_0$' de la primera y sustituyo en la segunda:

$$(t-t_0) = \frac{\omega-\omega_0}{\alpha}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0\frac{\omega-\omega_0}{\alpha} + \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\omega-\omega_0}{\alpha}\right)^2 \qquad \omega^2+\omega_0^2-2\omega\omega_0$$

$$\varphi = \varphi_0 + \cancel{\frac{\omega_0\omega}{\alpha}} - \frac{\omega_0^2}{\alpha} + \frac{\omega^2}{2\alpha} + \frac{\omega_0^2}{2\alpha} - \cancel{\frac{\omega\omega_0}{\alpha}}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\omega^2}{2\alpha} - \frac{\omega_0^2}{2\alpha} \longrightarrow \varphi-\varphi_0 = \frac{1}{2\alpha}(\omega^2-\omega_0^2)$$

$$\longrightarrow \omega^2-\omega_0^2 = 2\alpha(\varphi-\varphi_0) \longrightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\varphi-\varphi_0)$$

La expresión equivalente en el MRUA es $v^2 = v_0^2 + 2a(x-x_0)$

5. Un tiovivo de 10m de radio gira a 6rpm. Cuando se apaga el motor, tarda 12s en pararse. Calcula:

a) La velocidad angular inicial en rad/s.
b) La aceleración angular de parada, supuesta constante.
c) El número de vueltas que da hasta detenerse, desde que se apaga el motor.
d) El espacio recorrido por un asiento (caballo) que se encuentra a $r = 5m$ del eje de giro durante la parada.
e) Su velocidad lineal a los 10s de pararse el motor.
f) La aceleración tangencial, normal y total de este asiento en ese instante.

$R = 10m$
$\omega_0 = 6rpm$
$\omega = 0$ en $12s$

ⓐ $\omega_0 = 6\frac{\cancel{rev}}{\cancel{min}}\cdot\frac{1\cancel{min}}{60s}\cdot\frac{2\pi rad}{1\cancel{rev}} = 0'63\frac{rad}{s}$

ⓑ MCUA: $\alpha = cte$

$$\omega = \omega_0 + \alpha(t-t_0)$$

$$0 = 0'63 + \alpha\cdot 12 \longrightarrow \alpha = \frac{-0'63}{12} = -0'053\frac{rad}{s^2}$$

ⓒ $\varphi = \varphi_0 + \omega_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t-t_0)^2$

$$\varphi = 0 + 0'63\cdot 12 + \frac{1}{2}(-0'053)\cdot 12^2 =$$

$$= 3'744\ rad\cdot\frac{1rev}{2\pi rad} = 0'6\ vueltas$$

ⓓ $d = \varphi\cdot r = 3'744\cdot 5 = 18'72\ m$

ⓔ Necesito 'ω' a los 10s:

$$\omega = 0'63 - 0'053\cdot 10 = 0'1\ rad/s$$

$\longrightarrow v = \omega \cdot R = 0'1 \cdot 5 = 0'5 \; (m/s)$

(f) $a_t = \alpha \cdot R = (-0'053) \cdot 5 = -0'265 \; (m/s^2)$

$a_n = \omega^2 \cdot R = 0'1^2 \cdot 5 = 0'05 \; (m/s^2)$

$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{0'265^2 + 0'05^2} = 0'27 \; (m/s^2)$

6. Justifica la equivalencia entre rpm y rad/s.

Una revolución, o una vuelta, corresponde a 2 · π rad, y 1 min a 60 s. Por tanto, la equivalencia será:

$$1rpm = \frac{1revolución}{1min} \cdot \frac{1min}{60s} \cdot \frac{2\pi rad}{1rev} = \frac{\pi}{30} rad/s$$

7. La velocidad angular de un disco disminuye uniformemente de 700rpm a 500rpm en 7s. Calcula:

a) Su aceleración angular.

b) El número de vueltas que da en ese tiempo.

c) El tiempo necesario para que, desde este momento, el disco se detenga.

$$7s \begin{cases} \omega_0 = 700 rpm \cdot \frac{2\pi rad}{rev} \cdot \frac{1 min}{60 s} = 73'3 \frac{rad}{s} \\ \omega = 500 rpm \cdot \frac{2\pi rad}{rev} \cdot \frac{1 min}{60 s} = 52'36 \frac{rad}{s} \end{cases}$$

(a) MCUA: $\alpha = cte$

$\omega = \omega_0 + \alpha (t - t_0)$

$52'36 = 73'3 + \alpha \cdot 7 \longrightarrow \alpha = \frac{52'36 - 73'3}{7} = -2'99 \frac{rad}{s^2}$

(b) $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \alpha (t - t_0)^2$

$\varphi = 0 + 73'3 \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot (-2'99) \cdot 7^2 =$

$= 439'8 \, rad \cdot \frac{1 rev}{2\pi rad} = 70$ vueltas

(c) En ese momento, 7s:

$\omega = 73'3 - 2'99 \cdot 7 = 52,37 \; rad/s$

Si $\omega_0 = 52,37$ y $\omega = 0$:

$t - t_0 = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - 52'37}{-2'99} = 17'51 s$

8. La velocidad de una rueda de 40cm de diámetro pasa de 240rpm a 600rpm en 10s. Si ha estado sometida a una aceleración constante, calcula el valor de sus aceleraciones angular y tangencial.

$R = 40cm = 0'4m$

$10s \begin{cases} \omega_0 = 240 \dfrac{rev}{min} \cdot \dfrac{1min}{60s} \cdot \dfrac{2\pi rad}{1rev} = 25'13\ rad/s \\ \omega = 600 \dfrac{rev}{min} \cdot \dfrac{1min}{60s} \cdot \dfrac{2\pi rad}{1rev} = 62'83\ rad/s \end{cases}$

MCUA: $\alpha = cte$

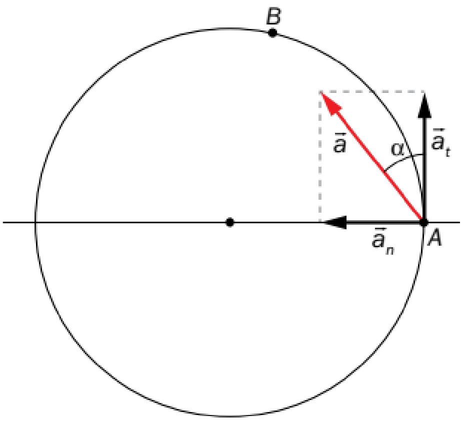
$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$

$62'83 = 25'13 + \alpha \cdot 10 \longrightarrow \alpha = \dfrac{62'83 - 25'13}{10} = 3'87 \dfrac{rad}{s^2}$

$a_t = \alpha \cdot R = 3'87 \cdot 0'4 = 1'548\ (m/s^2)$

9. Una partícula describe una circunferencia de 25cm de radio, aumentando su celeridad de forma constante. En un punto A de la trayectoria, la velocidad es de 1m/s, y en otro B, de 2m/s. Si el tiempo que tarde en llegar de A a B es de 0,5s, determina el módulo, la dirección y el sentido del vector aceleración en el punto A.

El movimiento que sigue la partícula es circular uniformemente acelerado, y se puede representar como:



$V = \omega \cdot R \begin{cases} \omega_A = \dfrac{V_A}{R} = \dfrac{1}{0'25} = 4 \dfrac{rad}{s} \\ \omega_B = \dfrac{V_B}{R} = \dfrac{2}{0'25} = 8 \dfrac{rad}{s} \end{cases} 0'5s$

$R = 25cm = 0'25m$

MCUA: $\alpha = cte$

$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$

$8 = 4 + \alpha \cdot 0'5 \longrightarrow \alpha = \dfrac{8-4}{0'5} = 8 \dfrac{rad}{s^2}$

- $a_t = \alpha \cdot R = 8 \cdot 0'25 = 2\ (m/s^2)$
- $a_n = \omega_A^2 \cdot R = 4^2 \cdot 0'25 = 4\ (m/s^2)$
- $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4'47\ (m/s^2)$

↳ Dirección: $\underbrace{\alpha = \arctan\left(\dfrac{a_n}{a_t}\right)}_{\text{Medido de } \vec{a} \text{ a } \hat{n}} = \arctan\left(\dfrac{4}{2}\right) = 63'43°$

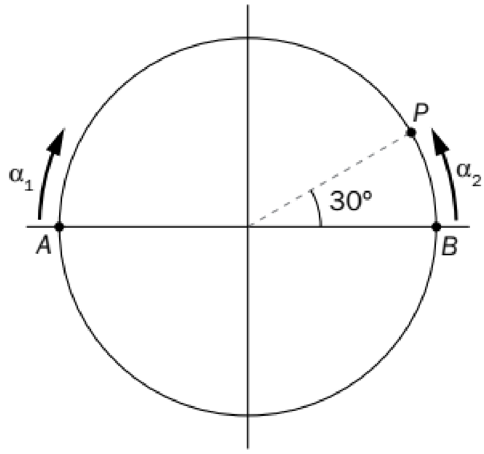
↳ Sentido: Hacia dentro de la trayectoria

10. Dos móviles, A y B, inicialmente en reposo, se encuentran, respectivamente, en las posiciones $(-R, 0)$ y $(R, 0)$. Simultáneamente comienzan a recorrer una circunferencia de radio R, haciéndolo A en sentido horario y aceleración angular α_1, y B en sentido antihorario con aceleración angular α_2:

a) ¿Qué relación debe haber entre α_1 y α_2 para que se encuentren en un punto P, cuyo vector posición forma un ángulo de 30° con el semieje positivo X?

b) ¿Qué velocidad lineal tendrá cada móvil en ese instante, si $\alpha_1 = 0{,}5 rad/s^2$?

Los dos móviles llevan un M.C.U.A. El esquema de ambos movimientos es el que se muestra a continuación, a la derecha, y el ángulo de barrido de cada uno de los móviles es:



ⓐ MCUA: $\alpha = cte$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

Si no nos dicen nada: $\varphi_0 = 0$, $t_0 = 0$.

Parten del reposo: $\omega_0 = 0$

$$\Longrightarrow \varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 t^2 = 150° \\ \varphi_2 = \frac{1}{2}\alpha_2 t^2 = 30° \end{cases}$$

Divido ambas expresiones:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{150°}{30°} = \frac{\cancel{1/2}\,\alpha_1 t^2}{\cancel{1/2}\,\alpha_2 t^2} \quad ; \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 5$$

ⓑ $\alpha_1 = 0'5\ rad/s \longrightarrow \alpha_2 = \frac{\alpha_1}{5} = 0'1\ \frac{rad}{s}$

Tiempo que tarda en llegar a 30°:

$$\varphi_2 = 30° \cdot \frac{2\pi\, rad}{360} = 0'524\ rad$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\alpha_2 t^2 \longrightarrow t = \sqrt{\frac{2\varphi_2}{\alpha_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0'524}{0'1}} = 3'23s$$

Aceleraciones angulares + lineales:

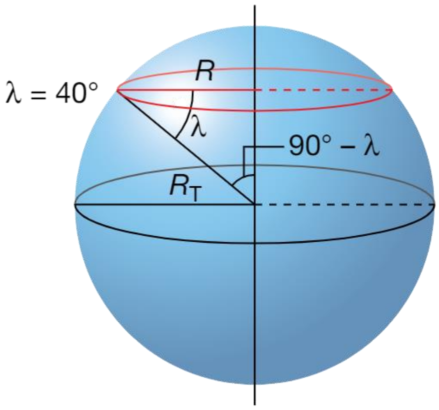
$$\omega_1 = \cancel{\omega_{01}} + \alpha_1(t - \cancel{t_0}) = 0'5 \cdot 3'23 = 1'62\ (rad/s)$$

$$v_1 = \omega_1 \cdot R = 1'62 \cdot R\ (m/s)$$

$$\omega_2 = \cancel{\omega_{02}} + \alpha_2(t - \cancel{t_0}) = 0'1 \cdot 3'23 = 0'32\ (rad/s)$$

$$v_2 = \omega_2 \cdot R = 0'32 \cdot R\ (m/s)$$

11. Calcula, en unidades SI, la velocidad lineal y la aceleración normal de un punto sobre la Tierra situado en un lugar de 40° de latitud ($R_T = 6{,}4 \cdot 10^6 m$).



Debido a la rotación de la Tierra, un punto que se encuentre en una latitud λ describe un MCU de radio: $R = R_T \cdot \cos\lambda$

$$R = 6'4 \cdot 10^6 \cdot \cos 40° = 4'9 \cdot 10^6 \ (m)$$

Velocidad angular:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\underbrace{86400\,s}_{1\,día}} = 7'27 \cdot 10^{-5}\ rad/s$$

Velocidad lineal:

$$v = \omega \cdot R = 7'27 \cdot 10^{-5} \cdot 4'9 \cdot 10^6 = 356{,}23\ (m/s)$$

Aceleración normal:

$$a_n = \omega^2 R = (7'27 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 4'9 \cdot 10^6 = 2'59 \cdot 10^{-2}\ (m/s^2)$$

Cuando un cuerpo rota, todos sus puntos describen un movimiento circular alrededor del eje de rotación con la misma velocidad angular. Los que se encuentran más alejados del eje de rotación tienen mayor velocidad lineal, pues recorren, en el mismo tiempo, más espacio que los que se encuentran más cerca.

Un cuerpo situado en el ecuador terrestre describe una circunferencia de radio igual al radio del planeta, mientras que si se sitúa en alguno de los polos no se desplaza, solo rota.

12. Un móvil describe un M.C.U. de 2m de radio con velocidad angular $\omega_1 = 2 rad/s$. Cuando pasa por el punto de corte de la trayectoria con el semieje X positivo, otro móvil, inicialmente en reposo, comienza un M.C.U.A. en el mismo sentido con aceleración angular $\alpha = 1 rad/s^2$. Calcula:

a) El tiempo que tardarán, desde ese instante, en volver a coincidir.
b) El ángulo barrido por ambos hasta el nuevo encuentro.
c) La velocidad lineal de ambos en el momento del encuentro.
d) La aceleración, y sus componentes intrínsecas, cuando coinciden.

MÓVIL 1. M.C.U. $\omega_1 = cte = 2 rad/s$ $\alpha_1 = 0$

$$\varphi_1 = \cancel{\varphi_{01}} + \omega_1 (t - \cancel{t_{01}}) = \omega_1 t$$

MÓVIL 2. M.C.U.A $\alpha_2 = cte = 1 rad/s^2$

$$\omega_2 = \cancel{\omega_{02}} + \alpha_2 (t - \cancel{t_{02}}) = \alpha_2 t$$

$$\varphi_2 = \cancel{\varphi_{02}} + \cancel{\omega_{02}(t - t_{02})} + \frac{1}{2}\alpha_2 (t - \cancel{t_{02}})^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\alpha_2 t^2$$

ⓐ Cuando coinciden $\varphi_1 = \varphi_2$

$$\omega_1 \cancel{t} = \frac{1}{2}\alpha_2 t^{\cancel{2}} \longrightarrow t = \frac{2\omega_1}{\alpha_2} = \frac{2 \cdot 2}{1} = 4s$$

ⓑ Usamos φ_1 o φ_2: $\varphi_1 = \varphi_2 = \omega_1 t = 2 \frac{rad}{s} \cdot 4s = 8 rad$

ⓒ En ese instante:

$$\omega_1 = 2 rad/s \longrightarrow v_1 = \omega_1 \cdot R = 2 \frac{rad}{s} \cdot 2m = 4 m/s$$

$$\omega_2 = \alpha_2 t = 1 \cdot 4 = 4 \; rad/s \longrightarrow v_2 = \omega_2 R = 4 \cdot 2 = 8 \; m/s$$

ⓓ MÓVIL 1. Al ser MCU $a_t = 0$ y $a_n = cte$

$$a = a_n = \omega_1^2 \cdot R = 2^2 \cdot 2 = 8 \, (m/s^2)$$

MÓVIL 2. Al ser MCUA $a_t = cte$ y $a_n \neq cte$

$$a_t = \alpha_2 \cdot R = 1 \cdot 2 = 2 \, (m/s^2)$$

$$a_n = \omega_2^2 \cdot R = 4^2 \cdot 2 = 32 \, (m/s^2)$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{2^2 + 32^2} = 32'06 \, (m/s^2)$$