

FUERZAS CENTRALES

Carácter central de la fuerza gravitatoria

1. Deduce la relación matemática entre $\vec{M}$ y $\vec{L}$.

Derivamos la expresión de $\vec{L}$:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \\ &= \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{\text{son paralelos}} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}\end{aligned}$$

2. Una partícula realiza un M.C.U. Si se duplica su cantidad de movimiento, ¿cómo varía el módulo de su momento angular?

Inicialmente:

$$p_0 = m \cdot v \quad L_0 = m \cdot r \cdot v \cdot \sin 90^\circ = m \cdot r \cdot v$$

Después:

$$p_f = 2 \cdot p_0 \quad L_f = 2 \cdot m \cdot r \cdot v = 2 \cdot L_0$$

Así, el momento angular también se duplica.

3. Si la distancia de Mercurio al Sol en el perihelio es de $46,0 \cdot 10^6 \text{ km}$, y en el afelio de $69,8 \cdot 10^6 \text{ km}$, compara los valores de p en el afelio y en el perihelio para Mercurio.

El momento angular, L , es constante, pero el momento lineal cambia continuamente (órbita elíptica). Como en el afelio y en el perihelio $\sin \theta = \sin 90^\circ = 1$:

$$\frac{p_a}{p_p} = \frac{\frac{L}{m \cdot r_a}}{\frac{L}{m \cdot r_p}} = \frac{r_p}{r_a} = \frac{46,0 \cdot 10^6}{69,8 \cdot 10^6} = 0,66 \rightarrow p_a = 0,66 \cdot p_p$$

4. Calcula el momento angular y la velocidad aerolar de Venus en su órbita casi circular de radio $108,2 \cdot 10^6 \text{ km}$, teniendo en cuenta que su período orbital es de 224,7 días, y su masa, $4,87 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

Como la órbita es circular, $\vec{r}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de 90° :

$$|\vec{L}| = m \cdot r \cdot v \cdot \sin 90^\circ = m \cdot r \cdot v = m \cdot r^2 \cdot \omega = m \cdot r^2 \cdot \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 224,7 \text{ días} \cdot \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ día}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 19414080 \text{ s}$$

$$r = 108,2 \cdot 10^6 \text{ km} = 108,2 \cdot 10^9 \text{ m}$$

$$\rightarrow |\vec{L}| = \frac{4'87 \cdot 10^{24} \cdot (108,2 \cdot 10^9)^2 \cdot 2 \cdot \pi}{19414080} = 1'85 \cdot 10^{37} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

Entonces, la velocidad angular es:

$$v_A = \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \frac{1'85 \cdot 10^{37}}{2 \cdot 4'87 \cdot 10^{24}} = 1'9 \cdot 10^5 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

5. Comparamos dos satélites artificiales en órbita circular de igual radio, uno en Marte y otro en la Tierra. ¿Se moverán a la misma velocidad? ¿Depende de la masa de los satélites?

La constante de la tercera ley de Kepler vale:

$$\frac{T^2}{r^3} = \text{constante} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M} \rightarrow T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M} \cdot r^3$$

Sabiendo que la masa planetaria de Marte es menor que la de la Tierra, $M_M < M_T$ y que los radios orbitales son iguales, $r_M = r_T$, podemos afirmar que el período en Marte será mayor que en la Tierra, $T_M > T_T$. Es decir, el satélite que está situado en la órbita marciana es más lento. La masa del satélite no interviene en absoluto.

6. Una masa puntual se mueve en línea recta con velocidad uniforme. Demuestra que su momento angular es constante respecto de un punto.

Tomemos un punto cualquiera, O , como origen. El momento angular respecto de O vale:

$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$$

La dirección y el sentido de $\vec{L}_0$ son constantes: $\vec{L}_0$ es perpendicular al plano que forman O y la trayectoria recta del móvil, y el sentido lo da la regla del tornillo. En cuanto al módulo, resulta:

$$L_0 = m \cdot r \cdot v \cdot \text{sen}\theta = m \cdot v \cdot d = \text{constante}$$

Donde d es la distancia de O a la trayectoria recta, puesto que: $r \cdot \text{sen}\theta = d$.

7. El cometa Hale-Bopp tiene una órbita muy excéntrica ($e = 0,997$). Razona en qué punto de esta:

- a) Se mueve más deprisa.

Se mueve más deprisa en el perihelio, porque es el punto más cercano al Sol.

- b) Su momento angular es mayor.

El momento angular es constante en toda la órbita.

- c) Tiene menor momento lineal.

El momento lineal tiene su valor menor en el afelio, punto más alejado del Sol, donde se mueve más despacio.

d) Presenta mayor velocidad areolar.

La velocidad areolar es constante en toda la órbita.

- 8.** Calcula la velocidad areolar de Venus dividiendo el área de su órbita circular por el tiempo que tarda en recorrerla. ¿Se obtiene el mismo resultado que el ejercicio 4? ¿Por qué? ¿Qué sucedería con un planeta que tuviera órbita elíptica?

Como suponemos que la órbita es circular, usando los datos del ejercicio 4, tenemos:

$$v_A = \frac{dA}{dt} = \frac{\pi \cdot R^2}{T} = \frac{\pi \cdot (1,082 \cdot 10^{11})^2}{19414080} = 1,9 \cdot 10^{15} \frac{m^2}{s}$$

Obtenemos el mismo resultado que en el ejercicio 4, puesto que el planeta Venus sigue un M.C.U. y la velocidad orbital es constante en todo momento. Si la órbita fuese elíptica, obtendríamos la velocidad areolar correcta dividiendo el área de la elipse por el período:

$$v_A = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{T}$$

Siendo a y b los semiejes mayor y menor de la elipse, respectivamente.

- 9.** Para un satélite artificial en órbita circular, ¿varía su momento angular con el radio de la órbita o se mantiene constante?

En cada punto de la órbita, el momento angular, $\vec{L}$, es constante.

Pero al cambiar de órbita, si $r_1 < r_2$, resulta que $v_1 > v_2$. ¿Se compensarán y $\vec{L}_1 = \vec{L}_2$? La respuesta es que no. La velocidad en órbita circular a la Tierra es:

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{GM_T}{r}} \\ L &= m \cdot r \cdot v \end{aligned} \right\} L = m \cdot r \cdot \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = m \sqrt{r^2 \frac{GM_T}{r}} = m \sqrt{r \cdot G \cdot M_T}$$

$$\Rightarrow \frac{L_2}{L_1} = \frac{m \sqrt{r_2 \cdot G \cdot M_T}}{m \sqrt{r_1 \cdot G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} \rightarrow L_2 = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} \cdot L_1$$

El momento angular aumenta al crecer el tamaño de la órbita.