LEYES DE KEPLER

1. Compara la velocidad orbital de dos planetas, A y B, en función de su distancia al Sol.

Suponiendo órbitas circulares, la velocidad orbital y la relación para los dos planetas resulta:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad \rightarrow \quad \frac{v_A}{v_B} = \frac{\frac{2\pi r_A}{T_A}}{\frac{2\pi r_B}{T_B}} = \frac{\frac{r_A}{T_A}}{\frac{r_B}{T_B}} = \frac{r_A \cdot T_B}{r_B \cdot T_A}$$

Si se tiene en cuenta la tercera ley de Kepler:

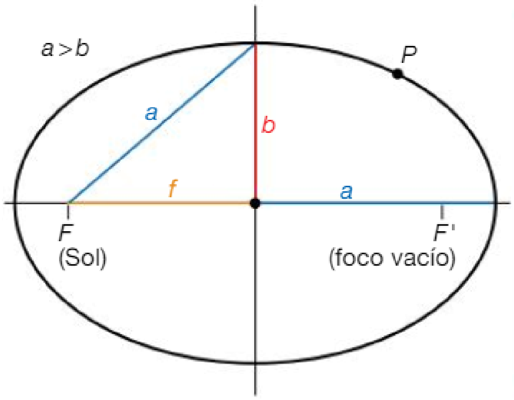
$$\frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^{3/2} \quad \rightarrow \quad \frac{v_A}{v_B} = \frac{r_A \cdot T_B}{r_B \cdot T_A} = \frac{r_A}{r_B}\left(\frac{r_B}{r_A}\right)^{3/2} = \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^{1/2}$$

En consecuencia, si el radio orbital de B es mayor que el de A, $r_B > r_A$, su velocidad es menor, $v_B < v_A$.

2. La excentricidad de la órbita de Marte es del 9%. Compara la distancia del planeta al Sol en el perihelio y afelio.

Como se observa en la figura, la distancia de un foco al centro de la elipse es:

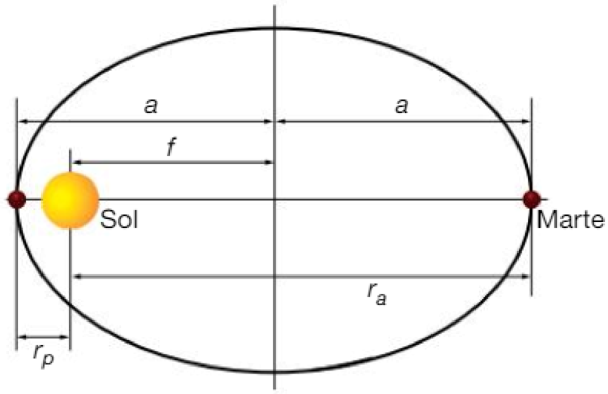
$$f = e \cdot a$$



Distancia de un punto a los focos $d(PF) + d(PF') = 2 \cdot a$
Distancia de un foco al centro $f = \sqrt{a^2 - b^2}$
Excentricidad $e = \frac{f}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

Por otra parte, es evidente que la distancia del planeta al Sol en el perihelio, r_p, y en el afelio, r_a, son:

$$r_p = a - f \qquad r_a = a + f$$



Por tanto:

$$\frac{r_p}{r_a} = \frac{a-f}{a+f} = \frac{a-e\cdot a}{a+e\cdot a} = \frac{a\cdot(1-e)}{a\cdot(1+e)} = \frac{1-e}{1+e} = \frac{0{,}91}{1{,}09} = 0{,}835$$

3. El radio medio de la órbita de Júpiter es 5,203 veces el terrestre. Calcula la duración del año en Júpiter.

Al aplicar la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T_T}{T_J} = \left(\frac{r_T}{r_J}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{T_T}{T_J} = \left(\frac{r_T}{5{,}203\cdot r_T}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{5{,}203}\right)^{\frac{3}{2}} = 0{,}084 \quad \rightarrow$$

$$T_J = \frac{T_T}{0{,}084} = \frac{1}{0{,}084}\cdot T_T = 11{,}87\cdot T_T \qquad (11{,}87\ \textit{años terrestres})$$

4. ¿Cuántas vueltas alrededor del Sol da Mercurio en un año? La distancia media Mercurio-Sol es 0,39 veces la distancia Tierra-Sol.

Al aplicar la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T_T}{T_M} = \left(\frac{r_T}{r_M}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{T_T}{T_M} = \left(\frac{r_T}{0{,}39\cdot r_T}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{0{,}39}\right)^{\frac{3}{2}} = 4{,}11 \quad \rightarrow$$

$$T_M = \frac{T_T}{4{,}11} = \frac{1}{4{,}11}\cdot T_T = 0{,}24\cdot T_T \qquad (0{,}24\ \textit{años terrestres})$$

En consecuencia, en un año, Mercurio da: ${}^{1}/_{0{,}24} = 4{,}17\,vueltas$

5. Calcula la excentricidad de una elipse en la que el eje mayor duplica al eje menor.

Aunque existen diferentes formas de expresar la excentricidad, es frecuente utilizar la siguiente:

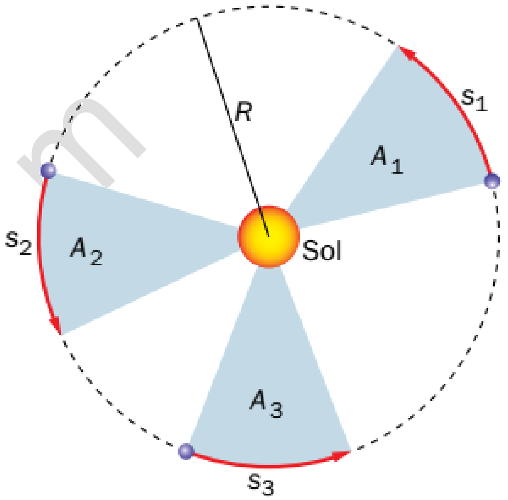
$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

donde *a* y *b* son los semiejes mayor y menor, respectivamente. Al sustituir, queda:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{(2 \cdot b)^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{4 \cdot b^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = 0{,}87$$

6. Demuestra, a partir de la ley de las áreas, que en una órbita circular la velocidad del planeta es uniforme.

Como la órbita es circular, el Sol ocupa el centro geométrico. En diferentes puntos de la órbita, las áreas barridas en un mismo tiempo, *t*, por el radio vector del planeta, A_1, A_2, A_3, etc., son iguales, tal y como predice la ley de las áreas:



$$A_1 = A_2 = A_3 = \cdots$$

Pero como se trata de sectores circulares de igual radio, *R*, los arcos recorridos por el planeta tienen que ser idénticos:

$$s_1 = s_2 = s_3 = \cdots$$

En consecuencia, la velocidad orbital del planeta se mantiene constante:

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow \quad v_1 = v_2 = v_3 = \cdots$$

7. Un asteroide sigue una órbita circular que completa en 820días. ¿Cuánto mide el radio de su órbita, comparado con el de la Tierra?

Al aplicar la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T_T}{T_a} = \left(\frac{r_T}{r_a}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{T_T}{T_a} = \frac{365}{820} = \left(\frac{r_T}{r_a}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{365}{820}\right)^{2/3} = \frac{r_T}{r_a} = 0{,}583$$

$$r_a = \frac{r_T}{0{,}583} = \frac{1}{0{,}583} \cdot r_T = 1{,}72 \cdot r_T$$

El radio de la órbita del asteroide es 1,72 veces mayor que el de la órbita terrestre.

8. Si la distancia de Mercurio al Sol en el perihelio es de $46{,}0 \cdot 10^6$km, y en el afelio de $69{,}8 \cdot 10^6$km:

a) Determina la longitud del semieje de la órbita de Mercurio.

El eje mayor de la elipse, $d = 2 \cdot a$, es la suma de las distancias del Sol al afelio y al perihelio. Por tanto:

$$d = 2 \cdot a = r_p + r_a$$

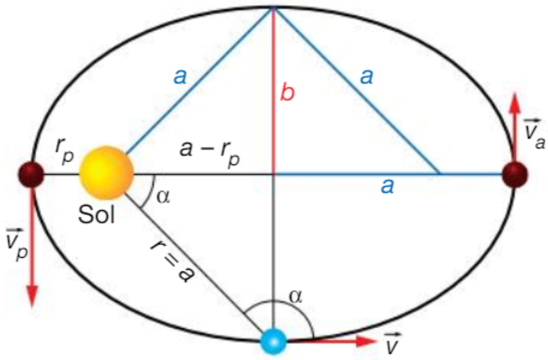
$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{46{,}0 \cdot 10^6 + 69{,}8 \cdot 10^6}{2} = 57{,}9 \cdot 10^6 km$$

b) Calcula la velocidad en el afelio, si en el perihelio es de 59km/s, y la velocidad en los extremos del eje menor de la órbita.

En el afelio y en el perihelio, $\theta_a = \theta_p = 90°$, y tendremos:

$$r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a$$

$$v_a = \frac{r_p \cdot v_p}{r_a} = \frac{46{,}0 \cdot 10^6 \cdot 59}{69{,}8 \cdot 10^6} = 39 \frac{km}{s}$$



De acuerdo con la figura, en el perihelio y en el extremo del eje menor de la órbita se cumple que:

$$r_p \cdot v_p = r \cdot v \cdot sen(\alpha) \quad \rightarrow \quad v = \frac{r_p \cdot v_p}{r \cdot sen(\alpha)}$$

Como la distancia desde un foco a los extremos del eje menor coincide con a, el semieje mayor, tenemos:

$$\cos(\alpha) = \frac{a - r_p}{a} = \frac{57{,}9 \cdot 10^6 - 46{,}0 \cdot 10^6}{57{,}9 \cdot 10^6} = 0{,}206 \quad \rightarrow \quad \alpha = \arccos(0{,}206) = 78{,}1°$$

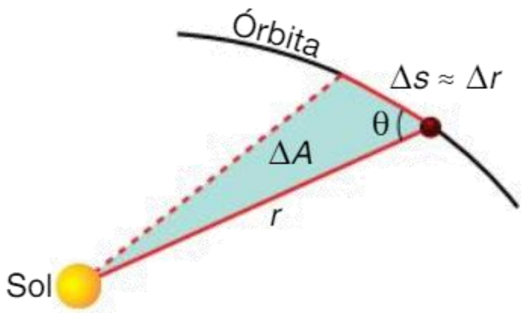
$$\rightarrow \quad v = \frac{r_p \cdot v_p}{r \cdot sen(\alpha)} = \frac{46{,}0 \cdot 10^6 \cdot 59}{57{,}9 \cdot 10^6 \cdot sen(78{,}1°)} = 47{,}9 \frac{km}{s}$$

9. Razona cómo la ley de las áreas conduce a la expresión que relaciona v, r y θ.

El área de un triángulo cualquiera se calcula con la fórmula:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sen(\theta)$$

Donde θ es el ángulo que forman a y b. Para un pequeño desplazamiento del planeta, Δs se aproxima con Δr (mirar figura) y la velocidad aerolar queda:



$$v_{área} = constante = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{r \cdot sen(\theta) \cdot \Delta r}{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot v \cdot sen(\theta)$$

10. A partir del resultado del ejercicio 2, compara la velocidad de Marte en perihelio y afelio.

El cociente de distancias r_p/r_a vale 0,835 para el planeta Marte. Por ello, la relación de velocidades resulta:

$$r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a \quad \rightarrow \quad \frac{v_p}{v_a} = \frac{r_p}{r_a} = \frac{1}{0{,}835} = 1{,}2 \quad \rightarrow \quad v_p = 1{,}2 \cdot v_a$$

Es decir, el planeta es 1,2 veces más veloz en el perihelio que en el afelio.

11. Para cierto asteroide, la velocidad en el afelio es la mitad que en el perihelio. Calcula el semieje mayor de la órbita en función de r_p.

Según la expresión de la ley de las áreas, podemos escribir para el perihelio y el afelio que:

$$r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a$$

Sabiendo que $v_p = 2 \cdot v_a$ sustituimos en la ecuación anterior:

$$r_p \cdot 2 \cdot v_a = r_a \cdot v_a \quad \rightarrow \quad r_p \cdot 2 = r_a$$

Por tanto, si el semieje mayor se calcula como la mitad de la suma de la distancia del Sol al perihelio y del Sol al afelio, su valor será:

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{r_p \cdot 2 + r_p}{2} = \frac{3}{2} r_p$$

12. Compara los períodos de dos satélites artificiales en órbita circular, el primero a 20000km del centro de la Tierra, y el segundo, a 40000km.

Para una órbita circular, los radios coinciden con la distancia al centro de la Tierra. Aplicando la tercera ley de Kepler, la relación entre los períodos será:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{40000}{20000}\right)^{\frac{3}{2}} = (2)^{\frac{3}{2}} = 2{,}83 \quad \rightarrow \quad T_2 = 2{,}83 \cdot T_1$$

Es decir, el período del satélite 2 es 2,83 veces mayor que el período del satélite 1.

13. Obtén el período de revolución de Saturno a partir de las distancias medias al Sol de ese planeta y de la Tierra. Compara tu resultado con el valor de la tabla.

El período de la Tierra es de 1 año. La distancia del Sol a Saturno es de 9,54 ua y a la Tierra, de 1 ua. Deducimos el período de revolución de Saturno aplicando la tercera ley de Kepler

$$\frac{T_S}{T_T} = \left(\frac{r_S}{r_T}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{T_S}{T_T} = \left(\frac{9{,}54\ ua}{1ua}\right)^{\frac{3}{2}} = (9{,}54)^{\frac{3}{2}} = 868 \quad \rightarrow \quad T_2 = 868 \cdot T_1$$

Muy próximo al valor de la tabla.

14. Un asteroide tarda cuatro años en completar una órbita circular. Con los datos de la tablaanterior, razona si su velocidad orbital será mayor o menor que 20km/s.

Deducimos el semieje mayor de la órbita, que al ser un M.R.U. coincide con el radio. Aplicamos la tercera ley de Kepler y tomamos como referencia la tabla del ejercicio anterior, el período de la Tierra es de 1 año y la distancia media al Sol desde la Tierra es de $1ua$. A partir de estos datos, deducimos el radio del asteroide:

$$\frac{T_A}{T_T} = \left(\frac{r_A}{r_T}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{4}{1} = \left(\frac{r_A}{1}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad 4^{2/3} = r_A = 2{,}52\ ua$$

Sabiendo que 1 ua equivale a $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m, la distancia del asteroide al Sol es:

$$r_A = 2{,}52\ ua \cdot \frac{1{,}5 \cdot 10^{11} m}{1ua} = 3{,}78 \cdot 10^{11} m$$

Al tratarse de un movimiento circular uniforme, podemos calcular su velocidad angular y lineal:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4años} \cdot \frac{1año}{365días} \cdot \frac{1día}{24h} \cdot \frac{1h}{3600s} = 4{,}98 \cdot 10^{-8} \frac{rad}{s}$$

$$v = \omega \cdot R = 4{,}98 \cdot 10^{-8} \cdot 3{,}78 \cdot 10^{11} = 18828{,}03 \frac{m}{s} = 18{,}83 \frac{km}{s}$$

Por tanto, la velocidad es inferior a 20 km/s.

15. Razona si es válida la siguiente proposición: <<Dos astros cuyas órbitas tienen igual semieje mayor se aproximan lo mismo al Sol>>.

Falsa. Depende de la excentricidad, o sea, de la relación b/a. Dos astros pueden tener igual el semieje mayor pero distinta distancia al afelio y al perihelio, por lo que no tienen por qué aproximarse lo mismo al Sol.