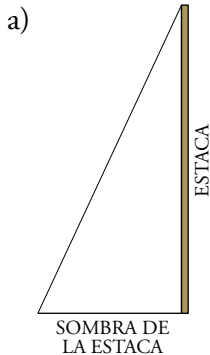


Resuelve

1. a) Razona que la estaca y su sombra forman un triángulo rectángulo. ¿Ocurre lo mismo con cada árbol y su sombra?
- b) ¿Por qué se han de dar prisa en señalar los extremos de las sombras? Razona que todos los triángulos formados por un árbol, o la estaca, y sus correspondientes sombras en cada instante son semejantes.
- c) Sabiendo que hay un chopo cuya sombra midió 3,92 m, halla su altura.



La estaca es vertical y el suelo es horizontal. La sombra se proyecta sobre el suelo. Por tanto, la estaca y su sombra son los catetos de un triángulo rectángulo.

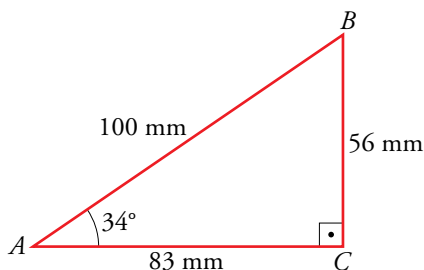
Lo mismo ocurre con cada árbol y su sombra. (Los árboles hay que idealizarlos para considerarlos como segmentos verticales).

- b) Hay que señalar las sombras muy deprisa para que no les afecte el movimiento del Sol. Los triángulos formados por una estaca y su sombra y por un árbol y su sombra siempre serán semejantes porque siempre serán rectángulos y compartirán un ángulo agudo (el que corresponde a la inclinación de los rayos del Sol).

$$c) \begin{cases} \text{Longitud estaca} = 163 \text{ cm} \\ \text{Sombra de la estaca} = 76 \text{ cm} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Altura del chopo} = x \\ \text{Sombra del chopo} = 3,92 \text{ m} = 392 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\frac{x}{392} = \frac{163}{76} \rightarrow x = 392 \cdot \frac{163}{76} \rightarrow x = 840,7 \text{ cm} = 8,407 \text{ m}$$

1. Dibuja sobre un ángulo como el anterior, 34° , un triángulo rectángulo de tal modo que $\overline{AB} = 100 \text{ mm}$.



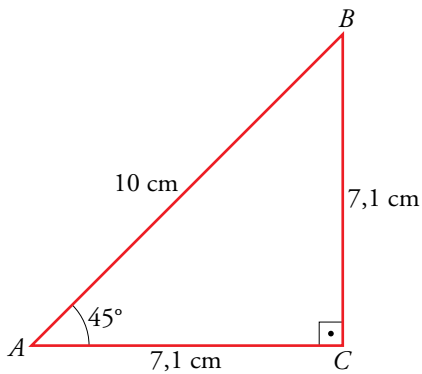
$$\text{sen } 34^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{56}{100} = 0,56$$

$$\text{cos } 34^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{83}{100} = 0,83$$

$$\text{tg } 34^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{56}{83} = 0,67$$

- 2. Dibuja, sobre un ángulo de 45° , un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mida 10 cm.**

Calcula, como en el ejemplo de arriba, las razones trigonométricas de 45° . ¿Cómo son entre sí el seno y el coseno? ¿Cuánto vale la tangente? Explica por qué.



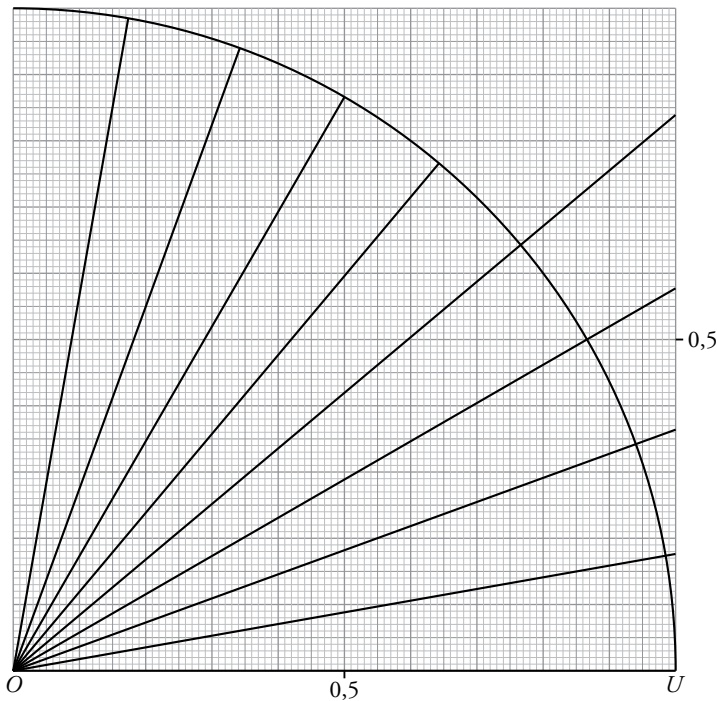
$$\text{sen } 45^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{7,1}{10} = 0,71$$

$$\text{cos } 45^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{7,1}{10} = 0,71$$

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{7,1}{7,1} = 1$$

El triángulo además de rectángulo es isósceles y, por tanto, los dos catetos tienen la misma longitud, de ahí que el seno y el coseno de 45° sean iguales y la tangente valga 1.

- 3. Utilizando una plantilla de papel milimetrado como la de arriba y un transportador de ángulos, calcula el seno y el coseno de 10° , 20° , 30° , 40° , 50° , 60° , 70° y 80° , y la tangente de aquellos que puedas.**



$$\text{sen } 10^\circ = 0,18, \text{ cos } 10^\circ = 0,98, \text{ tg } 10^\circ = 0,18$$

$$\text{sen } 20^\circ = 0,34, \text{ cos } 20^\circ = 0,94, \text{ tg } 20^\circ = 0,37$$

$$\text{sen } 30^\circ = 0,5, \text{ cos } 30^\circ = 0,86, \text{ tg } 30^\circ = 0,58$$

$$\text{sen } 40^\circ = 0,64, \text{ cos } 40^\circ = 0,76, \text{ tg } 40^\circ = 0,84$$

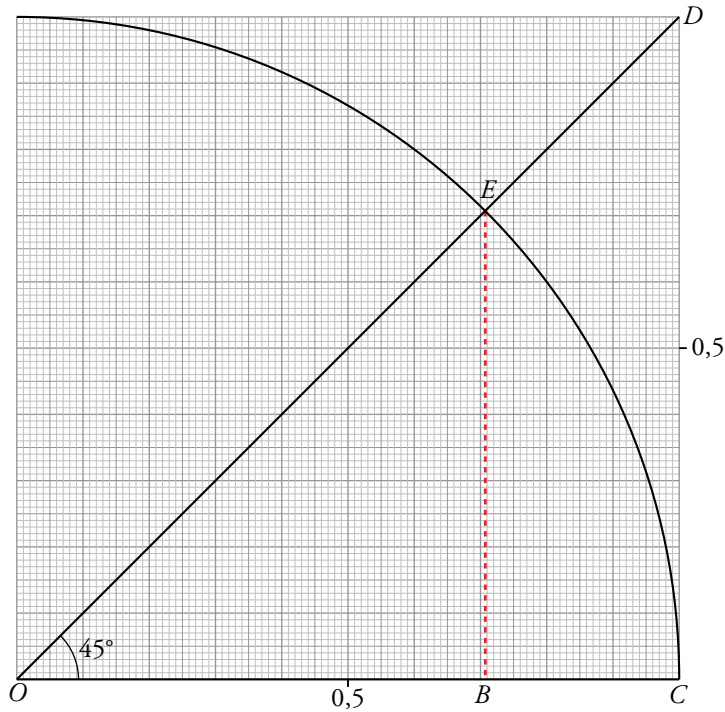
$$\text{sen } 50^\circ = 0,76, \text{ cos } 50^\circ = 0,64$$

$$\text{sen } 60^\circ = 0,86, \text{ cos } 60^\circ = 0,5$$

$$\text{sen } 70^\circ = 0,94, \text{ cos } 70^\circ = 0,34$$

$$\text{sen } 80^\circ = 0,98, \text{ cos } 80^\circ = 0,18$$

4. Calcula las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente, de 45° y comprueba que coinciden (excepto decimales) con lo que calculaste en el ejercicio 2 de la página anterior.



$$\text{sen } 45^\circ = \frac{\overline{EB}}{1} \rightarrow \text{sen } 45^\circ = \overline{EB} \rightarrow \text{sen } 45^\circ = 0,71$$

$$\text{cos } 45^\circ = \frac{\overline{OB}}{1} \rightarrow \text{cos } 45^\circ = \overline{OB} \rightarrow \text{cos } 45^\circ = 0,71$$

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CD}}{1} = \overline{CD} \rightarrow \text{tg } 45^\circ = 1$$

1. $\text{sen } \alpha = 0,6$. Calcula $\text{cos } \alpha$ y $\text{tg } \alpha$.

$$\begin{aligned} \bullet \text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha &= 1 \rightarrow 0,6^2 + \text{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \text{cos}^2 \alpha = 1 - 0,6^2 \rightarrow \\ &\rightarrow \text{cos}^2 \alpha = 0,64 \xrightarrow[\text{raíz positiva}]{\text{tomamos la}} \text{cos } \alpha = 0,8 \end{aligned}$$

$$\bullet \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} \rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{0,6}{0,8} \rightarrow \text{tg } \alpha = 0,75$$

Por tanto, $\text{cos } \alpha = 0,8$ y $\text{tg } \alpha = 0,75$.

2. $\text{tg } \beta = 0,53$. Calcula $\text{sen } \beta$ y $\text{cos } \beta$.

$$\bullet \left. \begin{aligned} \frac{\text{sen } \beta}{\text{cos } \beta} &= 0,53 \\ \text{sen}^2 \beta + \text{cos}^2 \beta &= 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{sen } \beta = 0,53 \text{cos } \beta$$

$$(0,53 \text{cos } \beta)^2 + \text{cos}^2 \beta = 1 \rightarrow 0,2809 \text{cos}^2 \beta + \text{cos}^2 \beta = 1 \rightarrow 1,2809 \text{cos}^2 \beta = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{cos}^2 \beta = \frac{1}{1,2809} \xrightarrow[\text{raíz positiva}]{\text{tomamos la}} \text{cos } \beta = 0,88$$

$$\bullet \text{sen } \beta = 0,53 \text{cos } \beta \rightarrow \text{sen } \beta = 0,47$$

Por tanto, $\text{sen } \beta = 0,47$ y $\text{cos } \beta = 0,88$.

- 3. Teniendo en cuenta que $tg\ 45^\circ = 1$, deduce el valor de $sen\ 45^\circ$ y de $cos\ 45^\circ$ mediante las relaciones fundamentales.**

$$\frac{sen\ 45^\circ}{cos\ 45^\circ} = 1; \quad sen\ 45^\circ = cos\ 45^\circ$$

$$(sen\ 45^\circ)^2 + (cos\ 45^\circ)^2 = 1$$

$$(cos\ 45^\circ)^2 + (cos\ 45^\circ)^2 = 1 \rightarrow cos\ 45^\circ = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Solo tomamos el resultado positivo: } cos\ 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow sen\ 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- 4. Teniendo en cuenta que $sen\ 30^\circ = 1/2$, halla el valor de $cos\ 30^\circ$ y de $tg\ 30^\circ$ mediante las relaciones fundamentales.**

$$sen\ 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$(sen\ 30^\circ)^2 + (cos\ 30^\circ)^2 = 1 \rightarrow \frac{1}{4} + (cos\ 30^\circ)^2 = 1 \rightarrow cos\ 30^\circ = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Tomamos el resultado positivo: } cos\ 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 30^\circ = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- 5. Calcula el seno y la tangente de un ángulo cuyo coseno vale 0,8.**

$$cos\ \alpha = 0,8$$

$$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow (0,8)^2 + (sen\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow sen\ \alpha = \pm 0,6$$

$$\text{Tomamos solo el valor positivo: } sen\ \alpha = 0,6$$

$$tg\ \alpha = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$$

- 6. Halla el seno y el coseno de un ángulo cuya tangente vale 0,7.**

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 0,7; \quad sen\ \alpha = 0,7 \cdot cos\ \alpha$$

$$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$$

$$(0,7 cos\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow 1,49(cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow cos\ \alpha = \pm 0,82$$

$$\text{Solo tomamos el valor positivo: } cos\ \alpha = 0,82$$

$$sen\ \alpha = 0,7 \cdot 0,82 \rightarrow sen\ \alpha = 0,57$$

7. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla de razones trigonométricas:

sen α	0,94		4/5			
cos α		0,82			$\sqrt{3}/2$	
tg α				3,5		1

En las operaciones donde aparezcan fracciones o radicales, trabaja con ellos; no utilices su expresión decimal.

En todos los casos, solo tomaremos los resultados positivos.

• $\text{sen } \alpha = 0,94$

$$(\text{cos } \alpha)^2 + (0,94)^2 = 1 \rightarrow \text{cos } \alpha = 0,34$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{0,94}{0,34} = 2,76$$

• $\text{cos } \alpha = 0,82$

$$(\text{sen } \alpha)^2 + (0,82)^2 = 1 \rightarrow \text{sen } \alpha = 0,57$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{0,57}{0,82} = 0,69$$

• $\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + (\text{cos } \alpha)^2 = 1 \rightarrow \text{cos } \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3}$$

• $\text{tg } \alpha = 3,5 = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} \rightarrow \text{sen } \alpha = 3,5 \cdot \text{cos } \alpha$

$$(\text{sen } \alpha)^2 + (\text{cos } \alpha)^2 = 1$$

$$(3,5 \text{cos } \alpha)^2 + (\text{cos } \alpha)^2 = 1 \rightarrow \text{cos } \alpha = 0,27$$

$$\text{sen } \alpha = 3,5 \cdot 0,27 \rightarrow \text{sen } \alpha = 0,96$$

• $\text{cos } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$(\text{sen } \alpha)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

• $\text{tg } \alpha = 1$

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = 1; \text{sen } \alpha = \text{cos } \alpha$$

$$(\text{sen } \alpha)^2 + (\text{cos } \alpha)^2 = 1$$

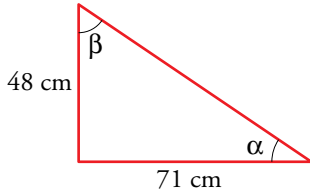
$$(\text{cos } \alpha)^2 + (\text{cos } \alpha)^2 = 1 \rightarrow \text{cos } \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

sen α	0,94	0,57	4/5	0,96	1/2	$\sqrt{2}/2$
cos α	0,34	0,82	3/5	0,27	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$
tg α	2,76	0,69	4/3	3,5	$\sqrt{3}/3$	1

Resolución de triángulos rectángulos

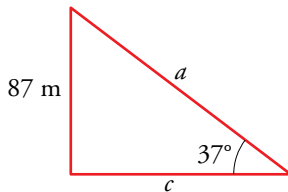
- 1. Los dos catetos de un triángulo rectángulo miden 48 cm y 71 cm. Halla los dos ángulos agudos.**



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{48}{71} = 0,676 \rightarrow \alpha = 34^{\circ} 3' 39,27''$$

$$\beta = 90^{\circ} - 34^{\circ} 3' 39,27'' = 55^{\circ} 86' 51,73''$$

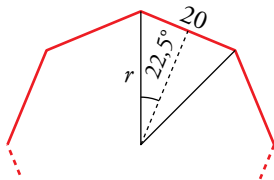
- 2. En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo mide 37° , y el cateto opuesto, 87 m. Halla el otro cateto y la hipotenusa.**



$$\operatorname{sen} 37^{\circ} = \frac{87}{a} \rightarrow a = \frac{87}{\operatorname{sen} 37^{\circ}} = 144,56 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} 37^{\circ} = \frac{87}{c} \rightarrow c = \frac{87}{\operatorname{tg} 37^{\circ}} = 115,45 \text{ m}$$

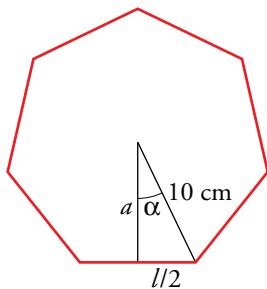
- 3. Calcula el radio de un octógono regular de 20 cm de lado. ¿Cuánto mide su apotema?**



$$\operatorname{sen} 22,5^{\circ} = \frac{10}{r} \rightarrow r = \frac{10}{\operatorname{sen} 22,5^{\circ}} \approx 26,13 \text{ cm}$$

$$\cos 22,5^{\circ} = \frac{\text{apotema}}{r} \rightarrow \text{apotema} \approx 24,14 \text{ cm}$$

- 4. Halla la apotema de un heptágono regular de 10 cm de radio. Calcula también la longitud del lado.**



$$\alpha = 360^{\circ} : 14 = 25^{\circ} 42' 51''$$

$$\cos (25^{\circ} 42' 51'') = \frac{a}{10} \rightarrow a = 10 \cdot \cos (25^{\circ} 42' 51'') \rightarrow$$

$$\rightarrow a = 9 \text{ cm}$$

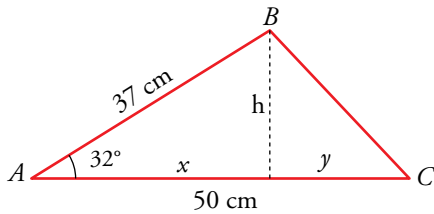
$$\operatorname{sen} (25^{\circ} 42' 51'') = \frac{l/2}{10} \rightarrow \frac{l}{2} = 10 \cdot \operatorname{sen} (25^{\circ} 42' 51'') \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{l}{2} = 4,34 \text{ cm} \rightarrow l = 8,68 \text{ cm}$$

Por tanto, el lado del heptágono mide 8,68 cm y su apotema 9 cm.

Resolución de triángulos oblicuángulos

1. En un triángulo ABC , halla $\overline{BC}$ conociendo $\overline{AB} = 37$ cm, $\overline{AC} = 50$ cm y $\hat{A} = 32^\circ$.



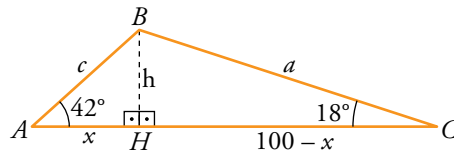
$$\cos 32^\circ = \frac{x}{37} \rightarrow x = 31,38 \text{ cm}$$

$$\operatorname{sen} 32^\circ = \frac{h}{37} \rightarrow h = 19,61 \text{ cm}$$

$$y = 50 - x = 50 - 31,38 = 18,62 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{h^2 + y^2} = 27,04 \text{ cm}$$

2. Halla los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo ABC en el que sabemos $\overline{AC} = 100$ cm, $\hat{A} = 42^\circ$ y $\hat{C} = 18^\circ$.



- Trazamos la altura sobre AC y dividimos el triángulo $\widehat{ABC}$ en dos triángulos rectángulos $\widehat{ABH}$ y $\widehat{BHC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{En } \widehat{ABH}: \operatorname{tg} 42^\circ = \frac{h}{x} \\ \text{En } \widehat{BHC}: \operatorname{tg} 18^\circ = \frac{h}{100 - x} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 0,900 = \frac{h}{x} \\ 0,325 = \frac{h}{100 - x} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} h = 0,900x \\ h = 0,325(100 - x) \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow 0,900x = 0,325(100 - x) \rightarrow 0,900x = 32,5 - 0,325x \rightarrow$$

$$\rightarrow 1,225x = 32,5 \rightarrow x = \frac{32,5}{1,225} \rightarrow x = 26,5 \text{ cm} \rightarrow$$

$$\rightarrow h = 23,85 \text{ cm}$$

- Conociendo x y h podemos hallar los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

$$\text{En } \widehat{ABH}: \cos 42^\circ = \frac{26,5}{c} \rightarrow c = \frac{26,5}{\cos 42^\circ} \rightarrow c = 35,7 \text{ cm}$$

$$\text{En } \widehat{BHC}: \cos 18^\circ = \frac{100 - 26,5}{a} \rightarrow a = \frac{73,5}{\cos 18^\circ} \rightarrow a = 77,3 \text{ cm}$$

Por tanto, $\overline{AB} = c = 35,7$ cm y $\overline{BC} = a = 77,3$ cm.

Razones trigonométricas de 0° a 360°

1. Indica el signo de cada una de estas razones trigonométricas, situando aproximadamente los ángulos en la circunferencia goniométrica:

a) $\text{sen } 185^\circ$

b) $\cos 320^\circ$

c) $\text{tg } 100^\circ$

d) $\cos 350^\circ$

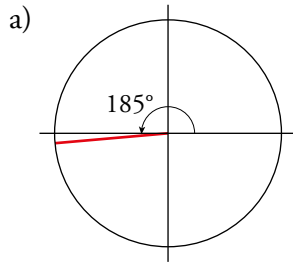
e) $\cos 120^\circ$

f) $\text{tg } 95^\circ$

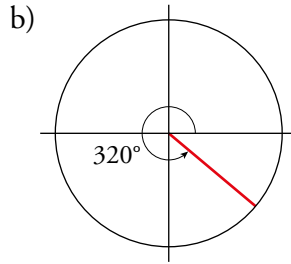
g) $\cos 275^\circ$

h) $\text{sen } 85^\circ$

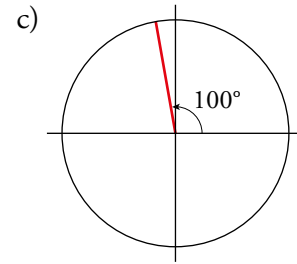
i) $\text{tg } 265^\circ$



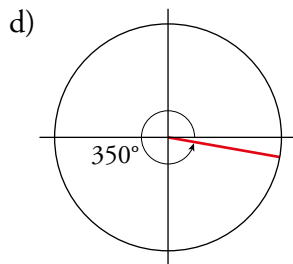
$$\text{sen } 185^\circ < 0$$



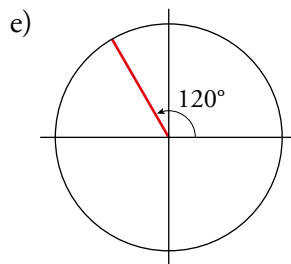
$$\cos 320^\circ > 0$$



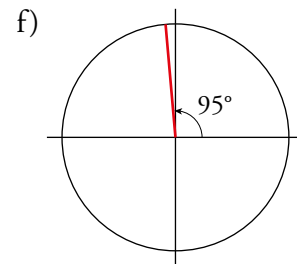
$$\text{tg } 100^\circ < 0$$



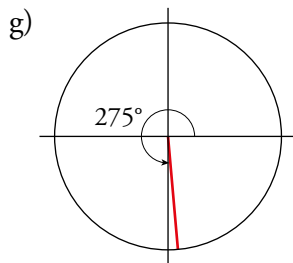
$$\cos 350^\circ > 0$$



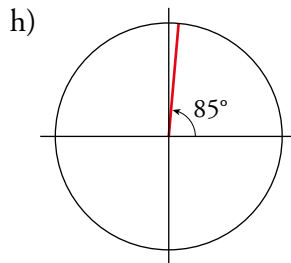
$$\cos 120^\circ < 0$$



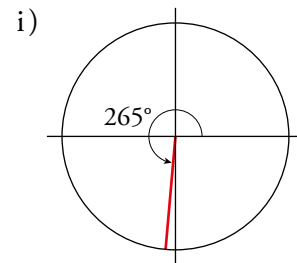
$$\text{tg } 95^\circ < 0$$



$$\cos 275^\circ > 0$$



$$\text{sen } 85^\circ > 0$$



$$\text{tg } 265^\circ > 0$$

2. Indica en qué cuadrante se encuentra cada uno de los ángulos α , β , γ y ϕ :

a) $\text{sen } \alpha < 0$ y $\text{tg } \alpha > 0$

b) $\cos \beta > 0$ y $\text{tg } \beta < 0$

c) $\text{sen } \gamma < 0$ y $\cos \gamma < 0$

d) $\cos \phi > 0$ y $\text{sen } \phi < 0$

¿Qué signo tiene cada una de las razones trigonométricas que faltan?

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \text{sen } \alpha < 0 \rightarrow \alpha \in \text{III o IV cuadrante} \\ \text{tg } \alpha > 0 \rightarrow \alpha \in \text{I o III cuadrante} \end{array} \right\} \rightarrow \alpha \in \text{III cuadrante}$$

Además, $\cos \alpha < 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } \cos \beta > 0 \rightarrow \beta \in \text{I o IV cuadrante} \\ \quad \quad \quad \text{tg } \beta < 0 \rightarrow \beta \in \text{II o IV cuadrante} \end{array} \right\} \rightarrow \beta \in \text{IV cuadrante}$$

Además, $\text{sen } \beta < 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{c) } \text{sen } \gamma < 0 \rightarrow \gamma \in \text{III o IV cuadrante} \\ \quad \quad \quad \cos \gamma < 0 \rightarrow \gamma \in \text{II o III cuadrante} \end{array} \right\} \rightarrow \gamma \in \text{III cuadrante}$$

Además, $\text{tg } \gamma > 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{d) } \cos \phi > 0 \rightarrow \phi \in \text{I o IV cuadrante} \\ \quad \quad \quad \text{sen } \phi < 0 \rightarrow \phi \in \text{III o IV cuadrante} \end{array} \right\} \rightarrow \phi \in \text{IV cuadrante}$$

Además, $\text{tg } \phi < 0$.

3. Dibuja sobre una circunferencia goniométrica, en papel milimetrado, los ángulos siguientes:

62° , 154° , 243° y 300°

Representa sus razones trigonométricas y da su valor aproximado.

$\text{sen } 62^\circ = 0,88$	$\cos 62^\circ = 0,47$	$\text{tg } 62^\circ = 1,88$
$\text{sen } 154^\circ = 0,44$	$\cos 154^\circ = -0,9$	$\text{tg } 154^\circ = -0,49$
$\text{sen } 243^\circ = -0,89$	$\cos 243^\circ = -0,45$	$\text{tg } 243^\circ = 1,96$
$\text{sen } 300^\circ = -0,87$	$\cos 300^\circ = 0,5$	$\text{tg } 300^\circ = -1,73$

4. En la página anterior, en la circunferencia goniométrica sobre la que se han representado el seno y el coseno, hay un triángulo coloreado, $OA'A$.

a) Razonando sobre él y teniendo en cuenta que $\overline{OA} = 1$, justifica que $\cos \alpha = \overline{OA'}$ y $\text{sen } \alpha = \overline{AA'}$.

b) Aplicando el teorema de Pitágoras en este triángulo, justifica que $(\text{sen } \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$.

c) Justifica que $(\text{sen } \beta)^2 + (\cos \beta)^2 = 1$, razonando sobre el correspondiente triángulo.

$$\text{a) } \cos \alpha = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA'}}{1} = \overline{OA'}$$

$$\text{b) } (\text{sen } \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = (\overline{AA'})^2 + (\overline{OA'})^2 = (\overline{OA})^2 = 1$$

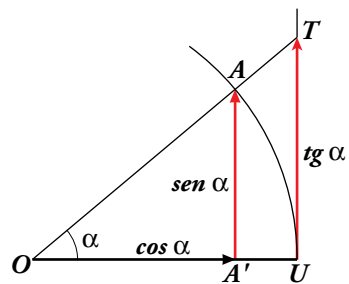
$$\text{c) } (\text{sen } \beta)^2 + (\cos \beta)^2 = \overline{OB}^2 = 1$$

5. Di el valor de $\text{sen } \alpha$ y $\cos \alpha$ cuando α vale 0° , 90° , 180° , 270° y 360° .

α	0°	90°	180°	270°	360°
$\text{sen } \alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	1

6. Teniendo en cuenta la semejanza de los triángulos $OA'A$ y OUT , y que $\overline{OU} = 1$, demuestra que:

$$\frac{\overline{sen} \alpha}{\overline{cos} \alpha} = \overline{tg} \alpha$$



Por la semejanza de triángulos:

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{OU}}{\overline{UT}} \rightarrow \overline{UT} = \frac{\overline{AA'} \cdot \overline{OU}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}} \rightarrow \overline{tg} \alpha = \frac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{sen} \alpha}{\overline{cos} \alpha}$$

Ángulos de medidas cualesquiera. Razones trigonométricas

1. Expresa con valores comprendidos entre -180° y 180° estos ángulos:

a) $1\,837^\circ$

b) $3\,358^\circ$

c) $1\,381^\circ$

d) $3\,805^\circ$

Comprueba con la calculadora que, en cada caso, coinciden las razones trigonométricas de uno y otro ángulo.

a) $1\,837 \overline{) 360}$
37 5

$$1\,837^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 37^\circ = 37^\circ$$

$$\text{sen } 1\,837^\circ = \text{sen } 37^\circ = 0,602$$

$$\text{cos } 1\,837^\circ = \text{cos } 37^\circ = 0,799$$

$$\text{tg } 1\,837^\circ = \text{tg } 37^\circ = 0,754$$

b) $3\,358 \overline{) 360}$
118 9

$$3\,358^\circ = 9 \cdot 360^\circ + 118^\circ = 118^\circ$$

$$\text{sen } 3\,358^\circ = \text{sen } 118^\circ = 0,883$$

$$\text{cos } 3\,358^\circ = \text{cos } 118^\circ = -0,469$$

$$\text{tg } 3\,358^\circ = \text{tg } 118^\circ = -1,881$$

c) $1\,381 \overline{) 360}$
301 3

$$1\,381^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 301^\circ = 301^\circ = 301^\circ - 360^\circ = -59^\circ$$

$$\text{sen } 1\,381^\circ = \text{sen } (-59^\circ) = -0,857$$

$$\text{cos } 1\,381^\circ = \text{cos } (-59^\circ) = 0,515$$

$$\text{tg } 1\,381^\circ = \text{tg } (-59^\circ) = -1,664$$

d) $3\,805 \overline{) 360}$
205 10

$$3\,805^\circ = 10 \cdot 360^\circ + 205^\circ = 205^\circ = 205^\circ - 360^\circ = -155^\circ$$

$$\text{sen } 3\,805^\circ = \text{sen } (-155^\circ) = -0,423$$

$$\text{cos } 3\,805^\circ = \text{cos } (-155^\circ) = -0,906$$

$$\text{tg } 3\,805^\circ = \text{tg } (-155^\circ) = 0,466$$

Funciones trigonométricas. El radián

1. Pasa a radianes los siguientes ángulos:

a) 25°

b) 100°

c) 150°

d) 250°

Expresa el resultado en función de π y, luego, en forma decimal. Por ejemplo:
 $180^\circ = \pi \text{ rad} = 3,14 \text{ rad}$.

a) $25^\circ = \frac{25 \cdot 2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{5\pi}{36} \text{ rad} = 0,44 \text{ rad}$

b) $100^\circ = \frac{100 \cdot 2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{5\pi}{9} \text{ rad} = 1,74 \text{ rad}$

c) $150^\circ = \frac{150 \cdot 2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad} = 2,62 \text{ rad}$

d) $250^\circ = \frac{250 \cdot 2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{25\pi}{18} \text{ rad} = 4,36 \text{ rad}$

2. Pasa a grados los siguientes ángulos:

a) $0,5 \text{ rad}$

b) $1,5 \text{ rad}$

c) $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$

d) $\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$

e) $4,8 \text{ rad}$

f) $3\pi \text{ rad}$

a) $0,5 \text{ rad} = \frac{0,5 \cdot 360^\circ}{2\pi} = 28^\circ 39' 36''$

b) $1,5 \text{ rad} = \frac{1,5 \cdot 360^\circ}{2\pi} = 85^\circ 59' 24''$

c) $\frac{\pi}{3} \text{ rad} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

d) $\frac{3\pi}{4} \text{ rad} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{4} = 135^\circ$

e) $4,8 \text{ rad} = \frac{4,8 \cdot 360^\circ}{2\pi} = 275^\circ 8' 36''$

f) $3\pi \text{ rad} = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$

3. ¿Verdadero o falso?

- a) El radián es una medida de longitud equivalente al radio.
 - b) Un radián es un ángulo algo menor que 60° .
 - c) Puesto que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, un ángulo completo (360°) tiene 2π radianes.
 - d) 180° es algo menos de 3 radianes.
 - e) Un ángulo recto mide $\pi/2$ radianes.
 - f) Las funciones trigonométricas son periódicas.
 - g) Las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{cos} x$ tienen un periodo de 2π .
 - h) La función $\operatorname{tg} x$ tiene periodo π .
 - i) La función $\operatorname{cos} x$ es como $\operatorname{sen} x$ desplazada $\pi/2$ a la izquierda.
-
- a) Falso, el radián es una unidad de medida de ángulos. Se llama radián a un ángulo tal que el arco que abarca tiene la misma longitud que el radio con el que se ha trazado.
 - b) Verdadero. $1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 45''$
 - c) Verdadero.
 - d) Falso. $180^\circ = \pi \text{ rad} \approx 3,14 \text{ rad}$
 - e) Verdadero.
 - f) Verdadero.
 - g) Verdadero.
 - h) Verdadero.
 - i) Verdadero, se cumple $\operatorname{sen} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{cos} \alpha, \forall \alpha$.

Hazlo tú. Repite el problema anterior suponiendo que el satélite ve la Tierra bajo un ángulo de 100° .

a) En este caso, $\widehat{TSO} = 50^\circ$ y, por tanto, $\widehat{SOT} = 40^\circ$.

Siguiendo el mismo razonamiento que en el libro de texto:

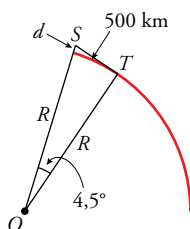
$$d = \frac{6371}{\cos 40^\circ} - 6371 \approx 1946 \text{ km}$$

b) $h = R \cdot (1 - \cos 40^\circ) = 6371 \cdot (1 - \cos 40^\circ) = 1490,53$

$$\text{Área del casquete} = 2\pi R \cdot h \approx 59635926 \text{ km}^2$$

El área de la porción visible de la Tierra es de unos 60 millones de km^2 .

Hazlo tú. ¿A qué altura hemos de subir para ver un lugar situado a 500 km?



Como el cuadrante de meridiano terrestre tiene 10000 km y corresponde a un ángulo recto, al arco de 500 km le corresponde un ángulo de $4,5^\circ$.

Siguiendo el mismo razonamiento que en el ejercicio resuelto en el libro de texto:

$$d = 6371 \cdot \left(\frac{1}{\cos 4,5^\circ} - 1 \right) = 19,17 \text{ km}$$

Deberíamos elevarnos unos 19 km.

Hazlo tú. Repite el problema con estos datos: 1.ª medición, 50° ; camina 10 m; 2.ª medición, 25° .

Siguiendo el planteamiento del ejercicio resuelto del libro de texto:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 50^\circ = \frac{y}{x} \\ \operatorname{tg} 25^\circ = \frac{y}{x+10} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow y = 1,19x \\ \rightarrow y = (x+10) \cdot 0,47 \end{array} \rightarrow x = 6,53; y = 7,77$$

El ancho del río es 6,53 m y la altura del árbol, 7,77 m.