Dibujo de Gráficas de funciones.

A) $y = -x^4 + 2x^2$

1.- Dominio de Definición (D_f)

Por ser una función polinómica el $D_f = \mathbb{R}$

2.- Regiones de existencia

Para estudiar las regiones estudiaremos el **sig (f(x))**, y factorizamos f(x):

$sig(f(x)) = sig(-x^4 + 2x^2) = sig(x^2(2 - x^2)) = sig(2 - x^2) = sig((\sqrt{2} + x)(\sqrt{2} - x))$

(no tiene signo en $x = \pm\sqrt{2}$)

	$(\sqrt{2} + x)$	$(\sqrt{2} - x)$	f(x)
$(-\infty, -\sqrt{2})$	–	+	-
$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	+	+	+
$(\sqrt{2}, \infty)$	+	-	-

3.- Puntos de corte con ejes de coordenadas

Eje OX: $y = 0 \Rightarrow -x^4 + 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(2 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$

Eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = -0 + 0 = 0 \Rightarrow y = 0$

4.- Simetrías

Todos los exponentes con los que aparece la variable son pares, luego sabemos que la función será PAR.

$f(-x) = -(-x)^4 + 2(-x)^2 = -x^4 + 2x^2 = f(x) \Rightarrow$ **f(x) es PAR (simétrica respecto OY)**

5.- Asíntotas

No tiene por ser función polinómica.

6.- Intervalos de Monotonía

Estudiaremos el **sig (f'(x))** ; calculamos y factorizamos $f'(x) = -4x^3 + 4x = 4x(1 - x^2) = 4x(1 + x)(1 - x)$

sig ((f'(x)) = sig (4x(1+x)(1-x)) = sig (x(1+x)(1-x)) (no tiene signo en x=-1, x=0, x=1)

	x	(1+x)	(1-x)	f'(x)	f(x)
$(-\infty, -1)$	-	-	+	+	**Crece**
(-1,0)	-	+	+	-	**Decrece**
(0,1)	+	+	+	+	**Crece**
$(1, \infty)$	+	+	–	–	**Decrece**

f(x) es **Creciente** $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (0,1)$ y f(x) es **Decreciente** $\forall x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$

7.- Extremos relativos

Como ya tenemos los intervalos de monotonía, aplicando la definición de extremo relativo (*"donde hay cambio de monotonía"*), podemos afirmar que:
En **x = -1** y **x = 1** hay un **Máximo** y en **x = 0** hay un **Mínimo.**
Tenemos que calcular la segunda coordenada de estos puntos, para ello sustituimos en **f(x):**

$f(-1) = -(-1)^4 + 2(-1)^2 = -1 + 2 = 1 \Rightarrow$ **(-1,1) Máximo**

$f(1) = 1$ (es par) $\Rightarrow$ **(1,1) Máximo**

$f(0) = 0 \Rightarrow$ **(0,0) Mínimo**

8.- Curvatura

Estudiaremos el **sig (f´´(x))** ; calculamos y factorizamos **f´´(x)**:

$$f''(x) = -12x^2 + 4 = 12\left(\frac{1}{3} - x^2\right) = 12\left(\sqrt{\frac{1}{3}} + x\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3}} - x\right)$$

$$sig\,((f''(x)) = sig\left(12\left(\sqrt{\frac{1}{3}} + x\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3}} - x\right)\right) = sig\left(\left(\sqrt{\frac{1}{3}} + x\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3}} - x\right)\right) \text{ (Observ : } \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}577 \approx 0{,}6\text{)}$$

	(0,6 + x)	(0,6 – x)	f´´(x)	f(x)
(-∞ , -0´6)	-	+	-	**Cóncava**
(-0´6 , 0´6)	+	+	+	**Convexa**
(0´6 , ∞)	+	-	-	**Cóncava**

Luego **f(x)** es **Cóncava** $\forall x \in (-\infty, -0'6) \cup (0'6, \infty)$ y **f(x)** es **Convexa** $\forall x \in (-0'6, 0'6)$

9.- Puntos de Inflexión

Como por definición son puntos de inflexión aquellos en donde la curva cambia de curvatura, podemos afirmar (por lo visto en el apartado 8) que:

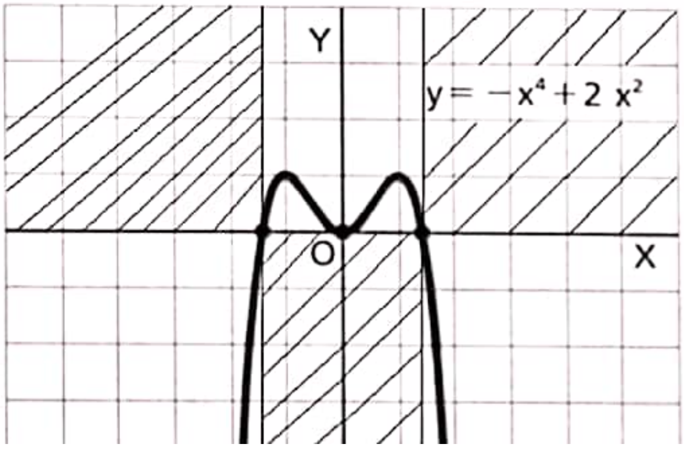
En **x = -0,6** y **x = 0,6** hay **Puntos de Inflexión**, necesitamos calcular la segunda coordenada, para lo cual, sustituimos en la función los dos valores obtenidos (*al ser par la función el resultado será el mismo en los dos*) y así:

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^4 + \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \approx 0{,}222 \approx 0{,}2$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{9} \approx 0{,}2$$

Luego los **Puntos de Inflexión** son **(-0´6 , 0´2)** y **(0´6 , 0´2)**

10.- Dibujo



B) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$

.- Dominio de Definición (D_f)

Por ser una función racional $D_f = R - \{ x \in R \ / \ 1+x^2=0 \}$, pero $1+x^2 \neq 0 \ \forall x \in R \Rightarrow D_f = R$

2.- Regiones de existencia

Para estudiar las regiones estudiaremos el sig (f(x)), y factorizamos f(x):

$sig(f(x)) = sig\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right) = sig\left(x^2(1+x^2)\right) = + \quad \forall x \in R$, luego la gráfica de la función se encuentra por encima del eje de abscisas.

3.- Puntos de corte con ejes de coordenadas

Eje OX: $y=0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{1+x^2}=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,0)$

Eje OY: $x=0 \Rightarrow y=0/1=0 \Rightarrow (0,0)$

4.- Simetrías

Todos los exponentes con los que aparece la variable son pares, luego sabemos que la función será PAR.

$f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{x^2}{1+x^2}=f(x) \quad \Rightarrow$ **f(x) es PAR (simétrica respecto OY)**

5.- Asíntotas

A. Vertical: No tiene pues su denominador es siempre distinto de cero (visto en D_f)
A. Horizontal: Si tiene pues el grado del numerador y denominador son iguales.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1 \Rightarrow \mathbf{y=1} \text{ es la Asíntota Horizontal}$$

No hay puntos de corte con A.H., pues resolviendo el sistema: $1=\dfrac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow 1+x^2=x^2 \Rightarrow 1 \neq 0$

A. Oblicua: No tiene por tener A. Horizontal, siendo función racional.

6.- Intervalos de Monotonía

Estudiaremos el sig (f'(x)) ; calculamos y factorizamos $f'(x)=\dfrac{2x(1+x^2)-2x\cdot x^2}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

sig ((f'(x)) = $sig\left(\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}\right)=sig(x)$ (no tiene signo en $x=0$)

	x	f'(x)	f(x)
$(-\infty, 0)$	-	-	**Decrece**
$(0, \infty)$	+	+	**Crece**

f(x) es **Decreciente** $\forall x \in (-\infty, 0)$ y f(x) es **Creciente** $\forall x \in (0, \infty)$

7.- Extremos relativos

Como ya tenemos los intervalos de monotonía, aplicando la definición de extremo relativo (*"donde hay cambio de monotonía"*), podemos afirmar que:

En **x = 0** hay un **Mínimo**.

Tenemos que calcular la segunda coordenada de estos puntos, para ello sustituimos en **f(x)**:

$f(0) = 0 \Rightarrow$ **(0,0) Mínimo**

8.- Curvatura

Estudiaremos el **sig (f´´(x))** ; calculamos y factorizamos f´´(x):

$$f''(x) = \frac{2\cdot(1+x^2)^2 - 2x\cdot 2\cdot(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2\cdot(1+x^2) \ - \ 2x\cdot 2\cdot 2x}{(1+x^2)^3} = \frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6\cdot\left(\frac{1}{3}-x^2\right)}{(1+x^2)^3} = \frac{6\cdot\left(\left(\sqrt{\frac{1}{3}}+x\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{3}}-x\right)\right)}{(1+x^2)^3}$$

$$sig\ ((f''(x)) = sig\left(\frac{6\cdot\left(\left(\sqrt{\frac{1}{3}}+x\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{3}}-x\right)\right)}{(1+x^2)^3}\right) = sig\left(\left(\sqrt{\frac{1}{3}}+x\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3}}-x\right)\right)$$

(Observ : $(1+x^2)^3 > 0 \ \forall x \in R$ y además $\sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}577 \approx 0{,}6$)

	(0,6 + x)	(0,6 – x)	f´´(x)	f(x)
(-∞ , -0´6)	-	+	-	**Cóncava**
(-0´6 , 0´6)	+	+	+	**Convexa**
(0´6 , ∞)	+	-	-	**Cóncava**

Luego **f(x)** es **Cóncava** $\forall x \in (-\infty , -0'6) \cup (0'6 , \infty)$ y **f(x)** es **Convexa** $\forall x \in (-0'6 , 0'6)$

9.- Puntos de Inflexión

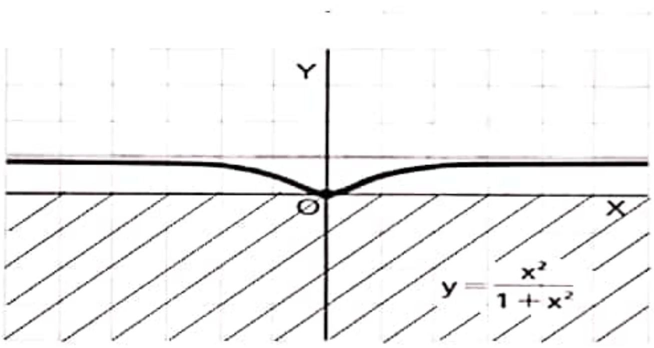
Como por definición son puntos de inflexión aquellos en donde la curva cambia de curvatura, podemos afirmar (por lo visto en el apartado 8) que:

En **x = -0,6** y **x = 0,6** hay **Puntos de Inflexión**, necesitamos calcular la segunda coordenada, para lo cual, sustituimos en la función los dos valores obtenidos (*al ser par la función el resultado será el mismo en los dos*) y así:

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2}{1+\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \quad ; \quad f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Luego los **Puntos de Inflexión** son **(-0´6 , 0´25)** y **(0´6 , 0´25)**

10.- Dibujo



C) $y = Ln\ (x+2)$

1.- Dominio de Definición (D_f)

Por ser una función logarítmica $D_f = \{ x \in R \ / \ x+2 > 0 \}$, es decir $x > -2 \Rightarrow D_f = (-2, \infty)$

2.- Regiones de existencia

Para estudiar las regiones estudiaremos el **sig (f(x))** :
$sig\ (f\ (x)) = sig\ (Ln\ (x+2))$, y como $Ln\ (x+2) = 0$ si $x + 2 = 1 \Rightarrow x = -1$

	Ln (x+2)	f(x)
(-2 , -1)	-	-
(-1 , ∞)	+	+

3.- Puntos de corte con ejes de coordenadas

Eje OX: $y = 0 \Rightarrow Ln\ (x+2) = 0 \Rightarrow$ si $x + 2 = 1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow$ **(-1 , 0)**
Eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = Ln\ (0+2) \Rightarrow y = Ln\ 2 = 0'693 \approx 0'7 \Rightarrow$ **(0 , Ln 2)**

4.- Simetrías

$f\ (-x) = Ln\ ((-x)+2) = Ln\ (2-x) \neq f\ (x)$

$-f\ (x) = -Ln\ (x+2) = Ln\ (x+2)^{-1} = Ln\ \frac{1}{x+2} \neq f\ (-x)$ $\Rightarrow$ **f(x) no tiene simetrías.**

5.- Asíntotas

A. Vertical: Si tiene pues $\lim_{x \to -2^+} Ln\ (x+2) = Ln\ (-2^+ + 2) = Ln\ 0^+ = -\infty \Rightarrow$ **x = -2**

A. Horizontal: No tiene pues $\lim_{x \to \infty} Ln\ (x+2) = \infty \notin R$

A. Oblicua: No tiene pues las funciones Logarítmicas no tienen.

6.- Intervalos de Monotonía

Estudiaremos el **sig (f´(x))** ; calculamos y factorizamos $f'(x) = \frac{1}{x+2}$

sig ((f´(x)) = $sig\ \left(\frac{1}{x+2}\right) = sig\ (x+2)$ (no tiene signo en x = -2)

	x + 2	f´(x)	f(x)
(-2 , ∞)	+	+	**Crece**

f(x) es **Creciente** $\forall x \in (-2, \infty)$, es decir en todo su D_f.

7.- Extremos relativos

Como ya tenemos los intervalos de monotonía, aplicando la definición de extremo relativo (*"donde hay cambio de monotonía"*), podemos afirmar que **no tiene extremos relativos** al no variar la monotonía.

8.- *Curvatura*

Estudiaremos el **sig (f´´(x))** ; calculamos y factorizamos f´´(x):

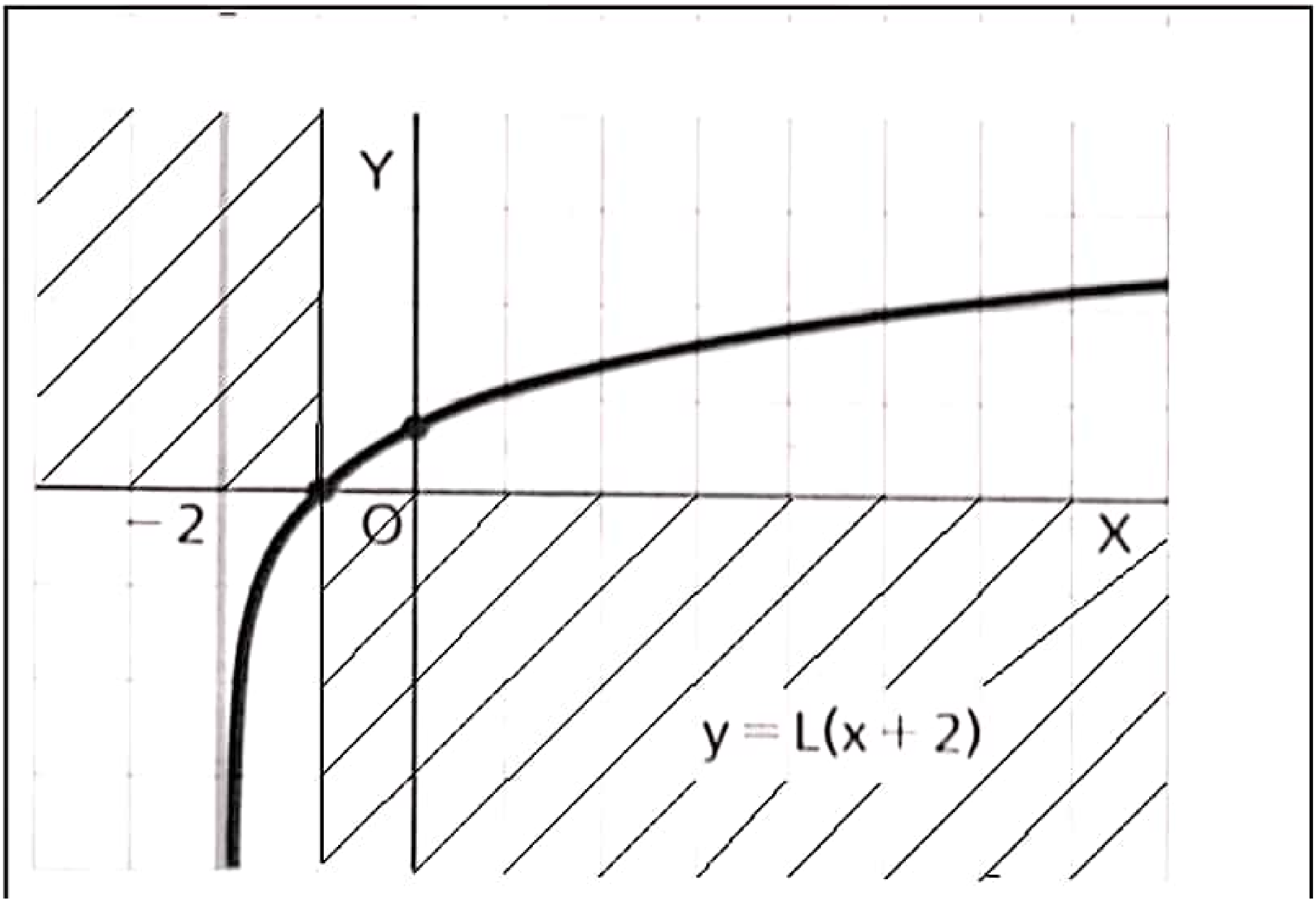
$$f''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$sig\ ((f''(x)) = sig\left(-\frac{1}{(x+2)^2}\right) = sig\ (-1) \quad < \ 0 \quad \forall\, x \in D_f \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f(x)\ es\ Cóncava\ \forall\, x \in D_f = (-2\ ,\ \infty)}$$

9.- Puntos de Inflexión

Como por definición son puntos de inflexión aquellos en donde la curva cambia de curvatura, podemos afirmar (por lo visto en el apartado 8) que: **No existen Puntos de Inflexión** al no haber cambio de Curvatura.

10.- Dibujo



D) $y = x^2 \cdot e^x$

- Dominio de Definición (D_f)

Por ser un un producto de funciones que ambas tienen de $D_f = R$, el Dominio común viene dado por la intersección de ambos, en este caso **$D_f = R$**

2.- Regiones de existencia

Para estudiar las regiones estudiaremos el **sig (f(x))**, y factorizamos f(x):
$sig(f(x)) = sig\left(x^2 \cdot e^x\right) = sig\left(e^x\right) = + \quad \forall x \in R$, luego la gráfica de la función se encuentra por encima del eje de abscisas.

3.- Puntos de corte con ejes de coordenadas

Eje OX: $y = 0 \Rightarrow x^2 \cdot e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ e^x = 0 \Rightarrow \text{Im posible}, \ e^x \neq 0 \ \forall x \in R \end{cases} \Rightarrow$ **(0 , 0)**

Eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \,.\, e^0 = 0 \,.\, 1 = 0 \Rightarrow$ **(0 , 0)**

4.- Simetrías

$f(-x) = (-x)^2 \cdot e^{(-x)} = x^2 \cdot \frac{1}{e^x} = \frac{x^2}{e^x} \neq f(x)$
$-f(x) = -x^2 \cdot e^x \neq f(-x)$

$\Rightarrow$ **f(x) no tiene simetrías.**

5.- Asíntotas

A. Vertical: No tiene, pues no existe ningún número real "a" tal que $\lim_{x \to a,\, a^+,\, a^-} f(x) = \pm\infty$

A. Horizontal: Si tiene pues:

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 \cdot e^x = \frac{\infty^2}{e^\infty} = \frac{\infty}{\infty} = 0$$ $\Rightarrow$ pues crece más deprisa la función exponencial del denominador que la potencial del numerador $\Rightarrow$ **$y = 0$** es la Asintota Horizontal

Si hay puntos de corte con A.H., pues resolviendo el sistema: $x^2 \cdot e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ e^x = 0 \Rightarrow \text{Im posible}, \ e^x \neq 0 \ \forall x \in R \end{cases} \Rightarrow$ el punto es **(0 , 0)**

A. Oblicua: No tiene, pues: $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 \cdot e^x}{x} = x \cdot e^x = \infty \notin R$

6.- Intervalos de Monotonía

Estudiaremos el **sig (f'(x))** ; calculamos y factorizamos $f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x \cdot e^x \cdot (2 + x)$
sig ((f'(x)) = $sig\left(x \cdot e^x \cdot (2 + x)\right) = sig\left(x \cdot (2 + x)\right)$ (no tiene signo en x = 0 y x = -2)

	x	(2 + x)	f'(x)	f(x)
(-∞ , -2)	-	-	+	**Crece**
(-2 , 0)	-	+	+	**Decrece**
(0 , ∞)	+	+	+	**Crece**

f(x) es **Decreciente** ∀ x ∈ (-2 , 0) y f(x) es **Creciente** ∀ x ∈ (-∞ , -2) ∪ (0 , ∞)

7.- Extremos relativos

Como ya tenemos los intervalos de monotonía, aplicando la definición de extremo relativo (*"donde hay cambio de monotonía"*), podemos afirmar que:

En **x = -2** hay un **Máximo**
Tenemos que calcular la segunda coordenada de estos puntos, para ello sustituimos en **f(x)**: $f(-2) = (-2)^2 . e^{(-2)}$
$= \frac{4}{e^2} = 0'541 \approx 0'5 \Rightarrow$ **(-2 , 0'5) Máximo**

En **x = 0** hay un **Mínimo**
Tenemos que calcular la segunda coordenada de estos puntos, para ello sustituimos en **f(x)**: f(0) = 0 (visto anteriormente)
$\Rightarrow$ **(0 , 0) Mínimo**

8.- Curvatura

Estudiaremos el **sig (f''(x))** ; calculamos y factorizamos f''(x):
$$f''(x) = 1 \cdot e^x \cdot (2+x) + x \cdot e^x \cdot (2+x) + x \cdot e^x \cdot 1 = e^x \cdot (2 + x + 2x + x^2 + x) = e^x \cdot (x^2 + 4x + 2)$$
$$sig\ ((f''(x)) = sig\ \left(e^x \cdot (x^2+4x+2)\right) = sig\ (x^2+4x+2) = sig\ ((x+3'4)\cdot(x+0'6))$$
(Observ : $e^x > 0 \ \ \forall x \in R$ y $x^2 + 4x + 2 = 0$ si $x = -2 \pm \sqrt{2} \approx \begin{cases} -3'4 \\ -0'6 \end{cases}$

	(x + 3'4)	(x + 0'6)	f''(x)	f(x)
(-∞ , -3'4)	-	-	+	**Convexa**
(-3'4 , -0'6)	+	-	-	**Cóncava**
(0'6 , ∞)	+	+	+	**Convexa**

Luego **f(x)** es **Convexa** $\forall x \in (-\infty , -3'4) \cup (0'6 , \infty)$ y **f(x)** es **Cóncava** $\forall x \in (-3'4 , 0'6)$

9.- Puntos de Inflexión

Como por definición son puntos de inflexión aquellos en donde la curva cambia de curvatura, podemos afirmar (por lo visto en el apartado 8) que:
En **x = -3,4** y **x = -0,6** hay **Puntos de Inflexión**, necesitamos calcular la segunda coordenada, para lo cual, sustituimos en la función los dos valores obtenidos :
$f(-3'4) = (-3'4)^2 \cdot e^{(-3'4)} = 0'386 \approx 0{,}4$; $f(-0'6) = (-0'6)^2 \cdot e^{(-0'6)} = 0'197 \approx 0'2$
Luego los **Puntos de Inflexión** son **(-3'4 , 0'4)** y **(-0'6 , 0'2)**

10.- Dibujo