



Universidad
Zaragoza

**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA
UNIVERSIDAD**

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2023

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Sea la siguiente función

$$f(x) = (e^{ax} + b)x - e, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

- a) (1 punto) Calcula los valores de a y b , sabiendo que dicha función tiene un extremo relativo en $x = 0$ y un punto de inflexión en $x = 2$.
- b) (1 punto) Para los valores $a = 1$ y $b = 2$, calcula $\int xf(x) dx$

2) Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, para que el siguiente límite sea finito y calcula el valor de dicho límite

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - a \sin(x) + 3x \cos(2x)}{x^2}$$

3) Descompón el número $\sqrt{3}$ en dos sumandos positivos, de forma que la suma de sus respectivos logaritmos en base 3 sea máxima y calcula esta suma de forma exacta.

4) Para la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1}$$

- a) (1 punto) Indica el dominio de definición y estudia su monotonía.
- b) (1 punto) Estudia la curvatura de la función (concavidad = $\cap$ y convexidad = $\cup$) y la existencia de puntos de inflexión, y calcúlalos si existen.

5) Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 2 & m & m+2 \\ m-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) Discute el rango de la matriz A según los valores de $m \in \mathbb{R}$.
- b) (1 punto) Calcula la inversa de la matriz A para el valor $m = 1$.

6) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$, calcula razonadamente el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ 3a & 3b & 3c \\ a+4 & b & c+5 \end{pmatrix}$$

7) Una ONG aragonesa de reciente creación tiene tres sedes, una en Huesca, otra en Zaragoza y otra en Teruel. El número total de voluntarios es de 31. Para que Huesca y Zaragoza tuvieran el mismo número de voluntarios tendrían que trasladarse 3 de Huesca a Zaragoza. Además, el número de los voluntarios de la sede de Huesca excede en 1 a la suma de los voluntarios de las otras dos sedes. ¿Cuántos voluntarios hay en cada una de las tres sedes?

8) Si los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1,2 puntos) Comprueba si los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\vec{r} = \vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}, \quad \vec{s} = \vec{u} + 3\vec{w}, \quad \vec{t} = 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$$

b) (0,8 puntos) Calcula razonadamente $3\vec{s} \times (\vec{t} - \vec{r})$ donde $\times$ representa el producto vectorial de dos vectores.

9) De los turistas que llegaron a España el mes pasado, el 35% visitaron Aragón. Si seleccionamos al azar y de manera independiente 7 turistas que llegaron a España el mes pasado.

a) (1 punto) Razona, sin hacer uso de la calculadora: ¿Qué es más probable, que 2 de estos turistas visitaran Aragón, o que sean 5 los que visitaron nuestra Comunidad Autónoma?

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que alguno de los 7 turistas haya visitado Aragón.

10) En el club deportivo Ares, se juegan tres modalidades de raqueta: pádel, tenis y frontón-tenis. Cada socio del club sólo puede apuntarse a una única modalidad. El 60% se apuntó a pádel, el 25% a tenis y el 15% a frontón-tenis. En los campeonatos anuales entre clubes deportivos, participaron todos los socios del club Ares, de los cuales han conseguido medalla el 21% de los jugadores de pádel, el 30% de los jugadores de tenis y el 12% de los jugadores de frontón-tenis.

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un jugador de raqueta del club, seleccionado al azar, haya obtenido una medalla.

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un jugador con medalla, seleccionado al azar, sea jugador de la modalidad tenis.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1) Sea la siguiente función

$$f(x) = (e^{ax} + b)x - e, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

a) (1 punto) Calcula los valores de a y b , sabiendo que dicha función tiene un extremo relativo en $x = 0$ y un punto de inflexión en $x = 2$.

b) (1 punto) Para los valores $a = 1$ y $b = 2$, calcula $\int xf(x) dx$

a) La función tiene un extremo relativo en $x = 0$, lo que significa que $f'(0) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= (e^{ax} + b) + x(ae^{ax}) = e^{ax} + b + axe^{ax} \\ f'(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow e^{a \cdot 0} + b + a \cdot 0 \cdot e^{a \cdot 0} = 0 \Rightarrow 1 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

La función queda $f(x) = (e^{ax} - 1)x - e, \quad a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

La función tiene un punto de inflexión en $x = 2$, lo que significa que $f''(2) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= e^{ax} - 1 + axe^{ax} \Rightarrow f''(x) = ae^{ax} + ae^{ax} + axae^{ax} \\ f''(2) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow ae^{2a} + ae^{2a} + 2aae^{2a} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ae^{2a} + 2a^2e^{2a} = 0 \Rightarrow 2ae^{2a}(1 + a) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} a &\neq 0 \\ e^{2a} &\neq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

Los valores buscados son $a = -1, b = -1$.

b) Para los valores $a = 1$ y $b = 2$ la función queda $f(x) = (e^x + 2)x - e = xe^x + 2x - e$.

$$\int xf(x) dx = \int x(xe^x + 2x - e) dx = \int x^2e^x + 2x^2 - ex dx =$$

$$= \int x^2e^x dx + \int 2x^2 dx - \int ex dx = \int x^2e^x dx + 2 \int x^2 dx - e \int x dx =$$

$$= \int x^2e^x dx + 2 \frac{x^3}{3} - e \frac{x^2}{2} = \dots$$

$$\begin{aligned} \int x^2e^x dx &= \left[\begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ x^2 = u \rightarrow 2x dx = du \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right] = x^2e^x - \int e^x 2x dx = x^2e^x - 2 \int xe^x dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ x = u \rightarrow dx = du \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right] = x^2e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = \\ &= x^2e^x - 2(xe^x - e^x) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x \end{aligned}$$

$$\dots = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + 2\frac{x^3}{3} - e\frac{x^2}{2} = \boxed{x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + 2\frac{x^3}{3} - \frac{e}{2}x^2 + K}$$

2) Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, para que el siguiente límite sea finito y calcula el valor de dicho límite

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - a \operatorname{sen}(x) + 3x \cos(2x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - a \operatorname{sen}(x) + 3x \cos(2x)}{x^2} = \frac{\ln(0+1) - a \operatorname{sen}(0) + 0 \cdot \cos(0)}{0^2} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} - a \cos(x) + 3 \cos(2x) - 6x \operatorname{sen}(2x)}{2x} =$$

$$= \frac{\frac{1}{0+1} - a \cos(0) + 3 \cos(0) - 0 \operatorname{sen}(0)}{0} = \frac{1 - a + 3}{0} = \frac{4 - a}{0} = \dots$$

Como el límite debe ser finito el numerador debe de ser nulo y así seguimos resolviendo el límite con la regla de L'Hôpital $\rightarrow 4 - a = 0 \rightarrow a = 4$.

$$\dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 4 \cos(x) + 3 \cos(2x) - 6x \operatorname{sen}(2x)}{2x} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{(x+1)^2} + 4 \operatorname{sen}(x) - 6 \operatorname{sen}(2x) - 6 \operatorname{sen}(2x) - 12x \cos(2x)}{2} =$$

$$= \frac{\frac{-1}{(0+1)^2} + 4 \operatorname{sen}(0) - 6 \operatorname{sen}(0) - 6 \operatorname{sen}(0) - 0 \cos(0)}{2} = \frac{-1 + 0 - 0 - 0 - 0}{2} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

3) Descompón el número $\sqrt{3}$ en dos sumandos positivos, de forma que la suma de sus respectivos logaritmos en base 3 sea máxima y calcula esta suma de forma exacta.

Descomponemos $\sqrt{3}$ como $x + y = \sqrt{3}$.

La función $f(x, y) = \log_3 x + \log_3 y$ debe ser máxima. Convertimos esta función en una función de una sola variable.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = \sqrt{3} \rightarrow y = \sqrt{3} - x \\ f(x, y) = \log_3 x + \log_3 y \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = \log_3 x + \log_3 (\sqrt{3} - x)$$

Esta función solo existe cuando $x > 0$ y cuando $\sqrt{3} - x > 0 \Rightarrow \sqrt{3} > x$.

El dominio de la función es $(0, \sqrt{3})$

Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = \log_3 (\sqrt{3}x - x^2) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \log_3 e + \frac{-1}{\sqrt{3} - x} \log_3 e = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{3} - x} \right) \log_3 e$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{3} - x} \right) \log_3 e \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{3} - x} \right) \cdot \log_3 e = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{3} - x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{3} - x} \Rightarrow \sqrt{3} - x = x \Rightarrow \sqrt{3} = 2x \Rightarrow \boxed{x = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

En el intervalo $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ tomamos $x = 0.1$ y la derivada vale

$$f'(0.1) = \frac{\sqrt{3} - 0.2}{\sqrt{3} \cdot 0.1 - 0.1^2} \cdot \log_3 e \approx 8.54 > 0. \text{ La función crece en } \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

En el intervalo $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} - 1^2} \cdot \log_3 e \approx -0.33 < 0$.

La función decrece en $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$.

Por lo tanto, la función tiene un máximo en $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Los dos sumandos que buscamos son $x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow y = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

La función toma el valor:

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \log_3 \frac{\sqrt{3}}{2} + \log_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \log_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \log_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \log_3 \frac{3}{4} = \log_3 3 - \log_3 4 = \boxed{1 - \log_3 4}$$

4) Para la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1}$$

a) (1 punto) Indica el dominio de definición y estudia su monotonía.

b) (1 punto) Estudia la curvatura de la función (concavidad = $\cap$ y convexidad = $\cup$) y la existencia de puntos de inflexión, y calcúlalos si existen.

a) Vemos cuando se anula el denominador.

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

Este valor está excluido del dominio. Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$

Vemos cuando se anula la derivada de la función.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 2x + 1) - x^2(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 1)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 4x^2 + 2x - \cancel{2x^3} + 2x^2}{(x^2 - 2x + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2x}{(x^2 - 2x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x(x-1)}{(x^2 - 2x + 1)^2} = \frac{-2x(x-1)}{((x-1)^2)^2} = \frac{-2x(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-2x}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Estudiamos el signo de la derivada, antes y después de $x = 0$. Añadimos el valor excluido del dominio $x = 1$.

En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{-2(-1)}{(-1-1)^3} = \frac{2}{-1} = -2 < 0$.

La función decrece en $(-\infty, 0)$.

En el intervalo $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

$$f'(0.5) = \frac{-2(0.5)}{(0.5-1)^3} = \frac{-1}{-0.125} = 8 > 0. \text{ La función crece en } (0, 1).$$

En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-2(2)}{(2-1)^3} = \frac{-4}{1} = -4 < 0$. La

función decrece en $(1, +\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y crece en $(0, 1)$.

b) Averiguamos cuando se anula la derivada segunda.

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x-1)^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2(x-1)^3 - (-2x)(3)(x-1)^2}{((x-1)^3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(\cancel{x-1})^2(x-1) + 6x(\cancel{x-1})^2}{(x-1)^6} = \frac{-2(x-1) + 6x}{(x-1)^4} = \frac{-2x + 2 + 6x}{(x-1)^4} = \frac{4x + 2}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x + 2}{(x-1)^4} = 0 \Rightarrow 4x + 2 = 0 \Rightarrow 4x = -2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de este valor. Añadimos el valor excluido del dominio.

En el intervalo $(-\infty, -0.5)$ tomamos $x = -1$ y la derivada segunda vale

$$f''(-1) = \frac{4 \cdot (-1) + 2}{(-1-1)^4} = -\frac{1}{8} < 0. \text{ La función es cóncava } (\cap) \text{ en } (-\infty, -0.5).$$

En el intervalo $(-0.5, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0) = \frac{4 \cdot 0 + 2}{(0-1)^4} = 2 > 0$.

La función es convexa ($\cup$) en $(-0.5, 1)$.

En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada segunda vale $f''(2) = \frac{4 \cdot 2 + 2}{(2-1)^4} = 10 > 0$.

La función es convexa ($\cup$) en $(1, +\infty)$.

Resumiendo: La función es cóncava en $(-\infty, -0.5)$ y convexa en $(-0.5, 1) \cup (1, +\infty)$.

La función presenta un punto de inflexión en $x = -0.5$.

Como $f(-0.5) = \frac{(-0.5)^2}{(-0.5)^2 - 2(-0.5) + 1} = \frac{1}{9}$ la función tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{9}\right)$

5) Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 2 & m & m+2 \\ m-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Discute el rango de la matriz A según los valores de $m \in \mathbb{R}$.

b) (1 punto) Calcula la inversa de la matriz A para el valor $m = 1$.

a) Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 2 & m & m+2 \\ m-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = m - (m+2)(m-1) + 4m - m^2(m-1) + 2 - 2(m+2) =$$

$$= m - (m^2 - m + 2m - 2) + 4m - m^3 + m^2 + 2 - 2m - 4 =$$

$$= m - m^2 + m - 2m + 2 + 4m - m^3 + m^2 + 2 - 2m - 4 = -m^3 + 2m = -m(m^2 - 2)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -m(m^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m^2 - 2 = 0 \rightarrow m^2 = 2 \rightarrow m = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

- Si $m \neq \pm\sqrt{2}$ y $m \neq 0$ el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3.
- Si $m = 0$ el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Su rango es 2 o 1.

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que queda al

eliminar la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2 \neq 0$. El rango de A es 2.

- Si $m = -\sqrt{2}$ el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Su rango es 2 o 1.

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ 2 & -\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2

que queda al eliminar la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = -\sqrt{2} + 2 \neq 0$. El rango de A es 2.

- Si $m = \sqrt{2}$ el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Su rango es 2 o 1.

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} \\ \sqrt{2} - 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que

queda al eliminar la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} + 2 \neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo:

Si $m \neq \pm\sqrt{2}$ y $m \neq 0$ el rango de A es 3. Si $m = \pm\sqrt{2}$ o $m = 0$ el rango de A es 2.

a) Para $m = 1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 + 4 - 0 + 2 - 6 = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

6) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$, calcula razonadamente el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ 3a & 3b & 3c \\ a+4 & b & c+5 \end{pmatrix}^2$$

Consideramos $A = B^2$. Hallamos el determinante de la matriz B.

$$|B| = \begin{vmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ 3a & 3b & 3c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Si en la fila 1ª hay suma de elementos} \\ \text{separamos el determinante} \\ \text{en suma de determinantes} \end{array} \right\} =$$

$$= 3 \left[\begin{vmatrix} 4a & 4b & 4c \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} \right] = 3 \left[4 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{La fila 1ª y 2ª son iguales} \\ \text{y el determinante vale 0} \end{array} \right\} = 3 \left[0 + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} \right] = 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Si en la fila 3ª hay suma de elementos} \\ \text{separamos el determinante} \\ \text{en suma de determinantes} \end{array} \right\} =$$

$$= 6 \left[\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \right] = \left\{ \begin{array}{l} \text{La fila 2ª y 3ª son iguales} \\ \text{y el determinante vale 0} \end{array} \right\} =$$

$$= 6 \left[0 + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \right] = 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Intercambiamos} \\ \text{la fila 2ª y 3ª} \\ \text{El determinante} \\ \text{cambia de signo} \end{array} \right\} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -6 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{-3}$$

Aplicamos el resultado al cálculo del determinante de A.

$$\boxed{|A| = |B^2| = |B|^2 = (-3)^2 = 9}$$

7) Una ONG aragonesa de reciente creación tiene tres sedes, una en Huesca, otra en Zaragoza y otra en Teruel. El número total de voluntarios es de 31. Para que Huesca y Zaragoza tuvieran el mismo número de voluntarios tendrían que trasladarse 3 de Huesca a Zaragoza. Además, el número de los voluntarios de la sede de Huesca excede en 1 a la suma de los voluntarios de las otras dos sedes. ¿Cuántos voluntarios hay en cada una de las tres sedes?

Llamamos “x” al número de voluntarios de la sede de Huesca, “y” al número de voluntarios de la sede de Zaragoza y “z” al número de voluntarios de la sede de Teruel.

“El número total de voluntarios es de 31” $\rightarrow x + y + z = 31$.

“Para que Huesca y Zaragoza tuvieran el mismo número de voluntarios tendrían que trasladarse 3 de Huesca a Zaragoza” $\rightarrow x - 3 = y + 3$.

“El número de los voluntarios de la sede de Huesca excede en 1 a la suma de los voluntarios de las otras dos sedes” $\rightarrow x = y + z + 1$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 31 \\ x - 3 = y + 3 \\ x = y + z + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 31 \\ x = y + 6 \\ x = y + z + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 6 + y + z = 31 \\ y + 6 = y + z + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + z = 25 \\ 5 = z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y + 5 = 25 \Rightarrow 2y = 20 \Rightarrow \boxed{y = 10} \Rightarrow \boxed{x = 10 + 6 = 16}$$

Hay 16 voluntarios en la sede de Huesca, 10 en la de Zaragoza y 5 en la de Teruel.

8) Si los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1,2 puntos) Comprueba si los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\vec{r} = \vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}, \quad \vec{s} = \vec{u} + 3\vec{w}, \quad \vec{t} = 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$$

b) (0,8 puntos) Calcula razonadamente $3\vec{s} \times (\vec{t} - \vec{r})$ donde $\times$ representa el producto vectorial de dos vectores.

a) Calculamos el producto mixto de los tres vectores. Si da un resultado nulo son linealmente dependientes, en caso contrario son independientes.

Como $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independientes sabemos que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ y forman una base.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{r} = \vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w} = (1, -1, -2) \\ \vec{s} = \vec{u} + 3\vec{w} = (1, 0, 3) \\ \vec{t} = 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = (2, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 6 + 2 - 0 + 1 + 3 = 0$$

Los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ son linealmente dependientes.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ son linealmente dependientes si encontramos un valor de a y de b tal que $\vec{r} = a\vec{s} + b\vec{t}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{r} = \vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w} \\ \vec{s} = \vec{u} + 3\vec{w} \\ \vec{t} = 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} \\ \vec{r} = a\vec{s} + b\vec{t} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w} = a(\vec{u} + 3\vec{w}) + b(2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w} = a\vec{u} + 3a\vec{w} + 2b\vec{u} - b\vec{v} + b\vec{w} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w} = (a + 2b)\vec{u} - b\vec{v} + (3a + b)\vec{w} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = a + 2b \\ -1 = -b \rightarrow \boxed{b=1} \\ -2 = 3a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = a + 2 \\ -2 = 3a + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{-1 = a} \\ -3 = 3a \rightarrow \boxed{a = -1} \end{cases}$$

Como hemos encontrado los valores que permiten expresar $\vec{r}$ como combinación lineal de los otros dos sabemos que los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ son linealmente dependientes

b)

$$\left. \begin{array}{l} \vec{r} = \vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w} \\ \vec{s} = \vec{u} + 3\vec{w} \\ \vec{t} = 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3\vec{s} = 3\vec{u} + 9\vec{w} \\ \vec{t} - \vec{r} = 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} - (\vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}) = \vec{u} + 3\vec{w} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\vec{s} \times (\vec{t} - \vec{r}) = (3\vec{u} + 9\vec{w}) \times (\vec{u} + 3\vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ 3 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9\vec{v} - 9\vec{v} = \boxed{\vec{0}}$$

9) De los turistas que llegaron a España el mes pasado, el 35% visitaron Aragón. Si seleccionamos al azar y de manera independiente 7 turistas que llegaron a España el mes pasado.

a) (1 punto) Razona, sin hacer uso de la calculadora: ¿Qué es más probable, que 2 de estos turistas visitaran Aragón, o que sean 5 los que visitaron nuestra Comunidad Autónoma?

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que alguno de los 7 turistas haya visitado Aragón.

- a) La probabilidad de que un turista elegido al azar entre los que visitan España visite Aragón es de 0.35 y la probabilidad de que no visite Aragón es de 0.65.

De los 7 turistas elegidos al azar es más probable que sean 2 los que visitaran Aragón y 5 que no lo visitaron que el hecho de que sean 5 los que visitan Aragón y 2 no, pues es más alta la probabilidad de no visitar Aragón.

Si necesitamos más detalle.

Llamamos X a la variable que cuenta los turistas que visitaran Aragón de un grupo de 7. Esta variable es binomial pues las repeticiones son independientes y solo hay dos posibilidades (visita Aragón o no).

Los parámetros son $n = n^{\circ} \text{ de repeticiones} = 7$. $p = P(\text{Visite Aragón}) = 0.35$

$$X = B(7, 0.35)$$

$$\left. \begin{aligned} P(X=5) &= \binom{7}{5} 0.35^5 \cdot 0.65^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 0.35^2 \cdot 0.65^2 \cdot \mathbf{0.35^3} \\ P(X=2) &= \binom{7}{2} 0.35^2 \cdot 0.65^5 = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 0.35^2 \cdot 0.65^2 \cdot \mathbf{0.65^3} \\ &\quad 0.35 < 0.65 \rightarrow 0.35^3 < 0.65^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(X=5) < P(X=2)$$

Es más probable que sean 2 los que visitaran Aragón.

- b) Nos piden calcular $P(X \geq 1)$. Calculamos esta probabilidad usando el suceso contrario.

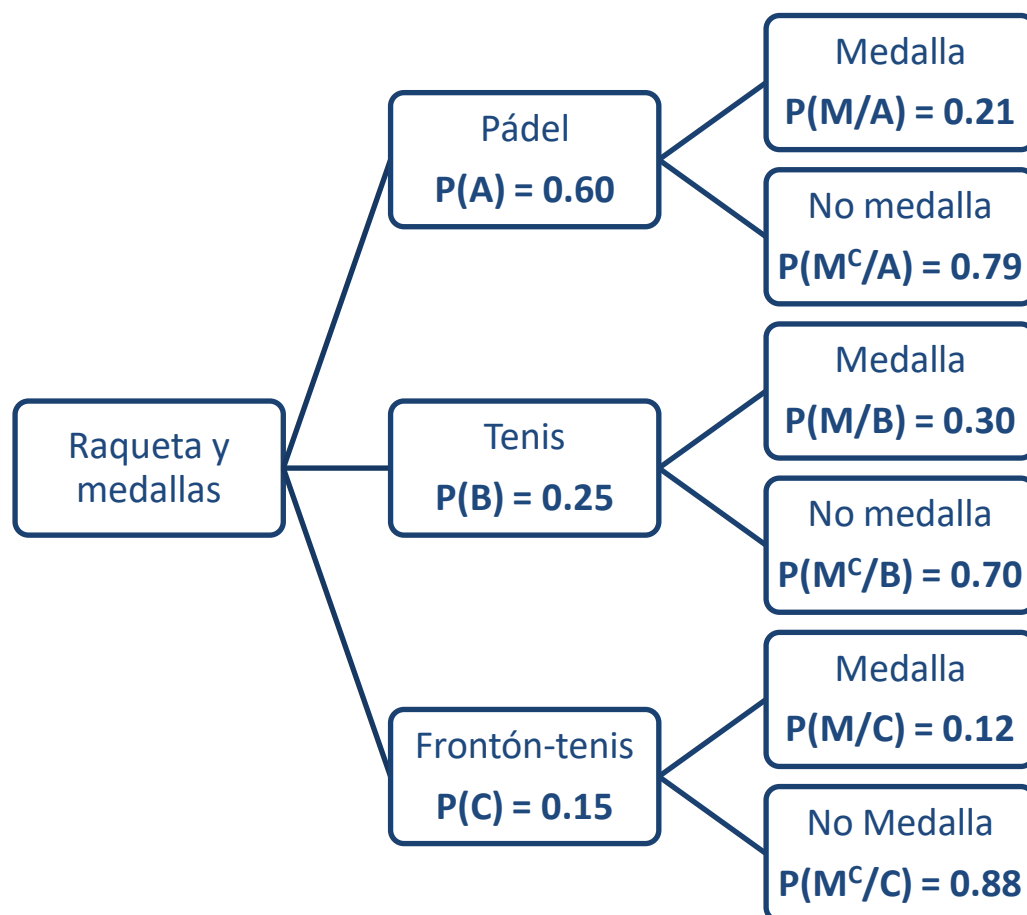
$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{7}{0} 0.35^0 \cdot 0.65^7 = 1 - 0.65^7 = \boxed{0.951}$$

10) En el club deportivo Ares, se juegan tres modalidades de raqueta: pádel, tenis y frontón-tenis. Cada socio del club sólo puede apuntarse a una única modalidad. El 60% se apuntó a pádel, el 25% a tenis y el 15% a frontón-tenis. En los campeonatos anuales entre clubes deportivos, participaron todos los socios del club Ares, de los cuales han conseguido medalla el 21% de los jugadores de pádel, el 30% de los jugadores de tenis y el 12% de los jugadores de frontón-tenis.

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un jugador de raqueta del club, seleccionado al azar, haya obtenido una medalla.

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un jugador con medalla, seleccionado al azar, sea jugador de la modalidad tenis.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M) = P(A)P(M/A) + P(B)P(M/B) + P(C)P(M/C) =$$

$$= 0.60 \cdot 0.21 + 0.25 \cdot 0.30 + 0.15 \cdot 0.12 = \boxed{0.219}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{P(B)P(M/B)}{P(M)} = \frac{0.25 \cdot 0.30}{0.219} = \boxed{\frac{25}{73} \approx 0.3425}$$