Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2022/2023

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Sean las matrices $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, con $a,\ b,\ c\ \in \mathbb{R}$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

   a) **[1,5 puntos]** Determina las condiciones que tienen que cumplir los valores *a*, *b*, *c* para que $A\cdot X=B$

   b) **[1 punto]** Si además queremos que *X* sea simétrica, ¿qué se debe cumplir? ¿Cómo es la matriz *X* resultante?

2. a) **[0,5 puntos]** Enuncia el teorema de Bolzano.

b) **[1 punto]** Sea la función $f(x)=x^3+6x^2+3x-10$. Utiliza el teorema de Bolzano para justificar que esta función tiene al menos una raíz en el intervalo [0, 2].

c) **[1 punto]** ¿Podría *f(x)* tener más de una raíz en el intervalo [0, 2]? Justifica tu respuesta

3. Sea el punto *A(1, 1, a)* y el plano $\pi \equiv b\cdot x+y+z=1$, con $a,b\in\mathbb{R}$.

a) **[1,5 puntos]** ¿Qué deben cumplir los valores *a*, *b* para que el punto *A* esté contenido en el plano π y éste tenga como vector normal uno que es perpendicular al vector $\vec{u}=(1,2,0)$?

b) **[1 punto]** Con los valores de *a*, *b* del apartado anterior, obtén la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto *A*.

4. *a*) Una empresa de mantenimiento da servicio a empresas de dos polígonos industriales (el polígono Campo y el polígono Llano). El 30 % de las reparaciones se realizan en el polígono Campo mientras que el 70 % se realiza en el polígono Llano. Además, en el polígono Campo el 10 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el 90 % de tipo eléctrico. En el polígono Llano el 30 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el resto de tipo eléctrico.

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un momento dado se realice una reparación de tipo mecánico?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si se ha realizado una reparación de tipo eléctrico, ¿qué probabilidad hay de que se haya realizado en el polígono Llano?

b) El famoso piloto de carreras Fernando Osnola es capaz de completar una vuelta a un circuito en un tiempo que sigue una distribución normal de media 1.5 minutos y desviación típica 0.15 minutos.

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que complete una vuelta en menos de 1.35 minutos?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál sería el tiempo exacto que es mayor que el 85.08 % de los tiempos realizados al completar una vuelta al circuito?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633

5. a) **[1 punto]** Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2}-(1-3x)^{2/3}}$$

Puedes utilizar el cambio de variable $1-3x=t^6$

b) **[1,5 puntos]** Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\2&1&1\end{pmatrix}$. Sin calcular A^{-1}, razona por qué A^{-1} existe y discute si la matriz $A^{-1}\cdot B$ tiene inversa.

6. a) **[1 punto]** Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2}.$$

b) **[1.5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, 1, 3)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores $\vec{u}=(2,2,0)$ y $\vec{v}=(0,0,-1)$

.

7. a) **[1 punto]** Sea la función $f(x)=x^3+3x^2+x+3$. Obtén sus máximos y mínimos relativos.

b) Una urna contiene cuatro bolas numeradas del 1 al 4. Se extraen al azar dos bolas sin reemplazamiento y se obtiene una puntuación igual a la suma de los valores correspondientes.
b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación obtenida sea de 3?
b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación sea mayor de 3?

8. a) **[1,25 puntos]** Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&1\\2&1&0&1\end{pmatrix}$. Calcula el rango de A.

b) **[1,25 puntos]** Sea la recta r definida por la intersección de los planos $\pi_1\equiv x+y+z=1$, $\pi_2\equiv y+2z=1$. Por otro lado, consideraremos el plano $\pi_3\equiv 2x+y=1$. Determina la posición relativa de la recta r y el plano π_3. El resultado del apartado anterior te puede ayudar.

SOLUCIONES

1. Sean las matrices $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, con $a,\ b,\ c\ \in\mathbb{R}$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) **[1,5 puntos]** Determina las condiciones que tienen que cumplir los valores *a*, *b*, *c* para que $A\cdot X=B$

b) **[1 punto]** Si además queremos que *X* sea simétrica, ¿qué se debe cumplir? ¿Cómo es la matriz *X* resultante?

a)

$$A\cdot X=B\Rightarrow\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 2a+c & 2b \\ 4a+2c & 4b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 2a+c=1 \\ 2b=0 \\ 4a+2c=2 \\ 4b=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 2a+c=1 \\ \boxed{b=0} \\ 4a+2c=2 \\ \boxed{b=0} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 2a+c=1 \\ 4a+2c=2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} c=1-2a \\ 2a+c=1 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a+(1-2a)=1\Rightarrow 0=0\Rightarrow\boxed{\begin{cases} c=1-2a \\ b=0 \end{cases}}$$

Para que se cumpla $A\cdot X=B$ debe ser *a* cualquier valor real, *b = 0* y *c = 1 – 2a*.

b) Para que $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ sea una matriz simétrica debe ser *b* = *c*, lo que implica que *c = 0*. Y esto a su vez implica que $0=1-2a\Rightarrow 2a=1\Rightarrow\boxed{a=\frac{1}{2}}$.

Con la condición de simetría de la matriz X los valores para que $A\cdot X=B$ son *a = 1/2, b = c = 0*.

La matriz X queda $X=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. a) **[0,5 puntos]** Enuncia el teorema de Bolzano.
b) **[1 punto]** Sea la función $f(x)=x^3+6x^2+3x-10$. Utiliza el teorema de Bolzano para justificar que esta función tiene al menos una raíz en el intervalo [0, 2].
c) **[1 punto]** ¿Podría *f(x)* tener más de una raíz en el intervalo [0, 2]? Justifica tu respuesta

a) Sea una $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

b) La función $f(x)=x^3+6x^2+3x-10$ es una función continua en [0, 2] por ser una función polinómica.

Comprobamos que la función tiene signo distinto en los extremos del intervalo [0, 2].

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0^3+6\cdot 0^2+3\cdot 0-10=-10<0 \\ f(2)=2^3+6\cdot 2^2+3\cdot 2-10=28>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)\cdot f(2)<0$$

Se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano y existe $c\in(0,2)$ tal que $f(c) = 0$.

c) La función es continua. Comprobamos si es monótona creciente o decreciente en el intervalo $[0,2]$.

$$f(x)=x^3+6x^2+3x-10 \Rightarrow f'(x)=3x^2+12x+3$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+12x+3=0 \Rightarrow x^2+4x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(1)(1)}}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

Como $x=-2\notin[0,2]$ comprobamos el signo de la derivada en el intervalo $[0,2]$ tomando $x=1$ y como su derivada vale $f'(1)=3\cdot 1^2+12\cdot 1+3=18>0$ la función crece en el intervalo $(-2,+\infty)$ y en particular en el intervalo $[0,2]$.
Por lo tanto, la función es estrictamente creciente en el intervalo $[0,2]$ y sólo puede tener una raíz en el intervalo $[0,2]$.

3. Sea el punto *A(1, 1, a)* y el plano $\pi \equiv b \cdot x + y + z = 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$.
a) **[1,5 puntos]** ¿Qué deben cumplir los valores *a*, *b* para que el punto *A* esté contenido en el plano *π* y éste tenga como vector normal uno que es perpendicular al vector $\vec{u} = (1, 2, 0)$?
b) **[1 punto]** Con los valores de *a*, *b* del apartado anterior, obtén la ecuación de la recta perpendicular al plano *π* y que pasa por el punto *A*.

a) Para que el punto *A* esté contenido en el plano *π* debe satisfacer su ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv b \cdot x + y + z = 1 \\ A(1,\ 1,\ a) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow b + 1 + a = 1 \Rightarrow \boxed{a + b = 0}$$

Para que el plano tenga como vector normal uno que es perpendicular al vector $\vec{u} = (1, 2, 0)$ el producto escalar de ambos debe ser 0.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv b \cdot x + y + z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (b, 1, 1) \\ \vec{u} = (1, 2, 0) \\ \vec{u} \perp \vec{n} \to \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (b, 1, 1)(1, 2, 0) = 0 \Rightarrow b + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{b = -2}$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación tenemos que $a - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$

Los valores buscados son *a = 2* y *b = –2*.

b) Con *a = 2* y *b = –2* el punto queda *A(1, 1, 2)* y el plano $\pi \equiv -2x + y + z = 1$.
La recta *r* perpendicular al plano *π* tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi \equiv -2x + y + z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (-2, 1, 1)$$

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \vec{n} = (-2, 1, 1) \\ A(1, 1, 2) \in r \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{r \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{array}\right. ,\ \lambda \in \mathbb{R}}$$

4. *a*) Una empresa de mantenimiento da servicio a empresas de dos polígonos industriales (el polígono Campo y el polígono Llano). El 30 % de las reparaciones se realizan en el polígono Campo mientras que el 70 % se realiza en el polígono Llano. Además, en el polígono Campo el 10 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el 90 % de tipo eléctrico. En el polígono Llano el 30 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el resto de tipo eléctrico.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un momento dado se realice una reparación de tipo mecánico?

a.2) **[0,75 puntos]** Si se ha realizado una reparación de tipo eléctrico, ¿qué probabilidad hay de que se haya realizado en el polígono Llano?

b) El famoso piloto de carreras Fernando Osnola es capaz de completar una vuelta a un circuito en un tiempo que sigue una distribución normal de media 1.5 minutos y desviación típica 0.15 minutos.

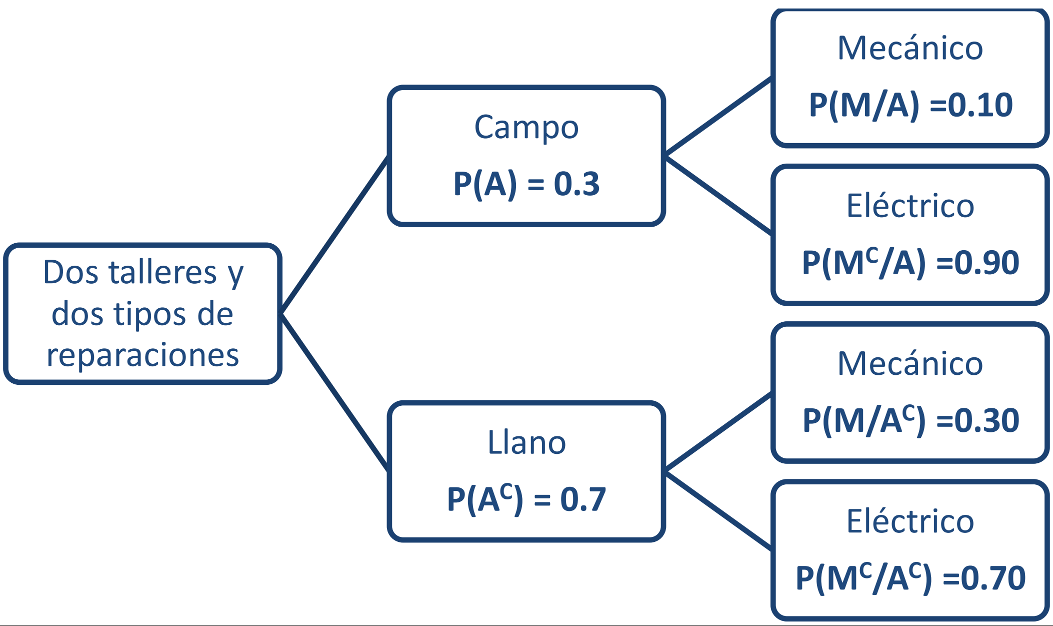
b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que complete una vuelta en menos de 1.35 minutos?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál sería el tiempo exacto que es mayor que el 85.08 % de los tiempos realizados al completar una vuelta al circuito?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633

a) Llamamos A a "la reparación se hace en el polígono Campo", A^C a "la reparación se hace en el polígono Llano", M a "la reparación es de tipo mecánico" y M^C a "la reparación es de tipo eléctrico".

Sabemos que $P(A) = 0.30$ y $P(A^C) = 0.70$. $P(M/A) = 0.10$, $P(M/A^C) = 0.30$.
Realizamos un diagrama de árbol



a.1) Aplicamos el teorema de la probabilidad total para calcular *P(M)*.

$$P(M) = P(A)P(M/A) + P(A^C)P(M/A^C) = 0.3\cdot 0.1 + 0.7\cdot 0.3 = \boxed{0.24}$$

a.2) Nos piden calcular $P(A^C/M^C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A^C/M^C) = \frac{P(A^C \cap M^C)}{P(M^C)} = \frac{P(A^C)P(M^C/A^C)}{1-P(M)} = \frac{0.7\cdot 0.7}{1-0.24} = \boxed{\frac{49}{76} \simeq 0.645}$$

b) X = Tiempo que tarda en completar una vuelta a un circuito (en minutos)
X = N(1.5, 0.15)

b.1)

$$P(X < 1.35) = \{Tipificamos\} = P\left(Z < \frac{1.35-1.5}{0.15}\right) = P(Z < -1) =$$

$$= P(Z > 1) = 1 - P(Z \le 1) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$

a	0.00	0
0.90	0.8159	0.8
1.00	0.8413	0.8
1.10	0.8643	0.8

b.2) Nos piden hallar "*a*" tal que $P(X < a) = 0.8508$.

$$P(X < a) = 0.8508 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z < \frac{a-1.5}{0.15}\right) = 0.8508 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{a-1.5}{0.15} = 1.04 \Rightarrow a - 1.5 = 1.04\cdot 0.15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 1.5 + 1.04\cdot 0.15 = 1.656}$$

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8

El tiempo que está por encima del 85.08 % de los tiempos es 1.656 minutos

5. a) **[1 punto]** Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2}-(1-3x)^{2/3}}$$

Puedes utilizar el cambio de variable $1-3x=t^6$

b) **[1,5 puntos]** Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\2&1&1\end{pmatrix}$. Sin calcular A^{-1}, razona por qué A^{-1} existe y discute si la matriz $A^{-1}\cdot B$ tiene inversa.

a)

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2}-(1-3x)^{2/3}} = \left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ 1-3x=t^6 \to -3dx=6t^5dt\\ dx=-2t^5dt\\ (1-3x)^{1/2}=\left(t^6\right)^{1/2}=t^3\\ (1-3x)^{2/3}=\left(t^6\right)^{2/3}=t^4\end{array}\right\} = \int \frac{-2t^5dt}{t^3-t^4} =$$

$$=2\int \frac{-t^3\cdot t^2dt}{t^3(1-t)} = 2\int \frac{-t^2dt}{1-t} = 2\int \frac{1-t^2-1}{1-t}dt = 2\left[\int \frac{1-t^2}{1-t}dt + \int \frac{-1}{1-t}dt\right] =$$

$$=2\left[\int \frac{\cancel{(1-t)}(1+t)}{\cancel{1-t}}dt + \int \frac{-1}{1-t}dt\right] = 2\left[\int 1+tdt + \int \frac{-1}{1-t}dt\right] =$$

$$=2\left[t+\frac{t^2}{2}+\ln|1-t|\right] = 2t+t^2+2\ln|1-t| = 2t+t^2+\ln(1-t)^2 =$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Deshacemos el cambio}\\ 1-3x=t^6 \to t=\sqrt[6]{1-3x}\end{array}\right\} = 2\sqrt[6]{1-3x}+\left(\sqrt[6]{1-3x}\right)^2+\ln\left(1-\sqrt[6]{1-3x}\right)^2 =$$

$$=\boxed{2\sqrt[6]{1-3x}+\sqrt[3]{1-3x}+\ln\left(1-\sqrt[6]{1-3x}\right)^2+K}$$

b) La matriz A tiene inversa si su determinante es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{vmatrix}=0+0+0-2-0-0=-2\neq 0$$

Al ser el determinante de A no nulo existe la inversa de la matriz A.

Comprobamos de la misma forma si la matriz $A^{-1}\cdot B$ tiene inversa.

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=0+0+0-0-0-0=0$$

$$\left|A^{-1}\cdot B\right|=\left\{\begin{matrix}\text{Propiedad de los determinantes}\\ |A\cdot B|=|A|\cdot|B|\end{matrix}\right\}=\left|A^{-1}\right|\cdot|B|=\left|A^{-1}\right|\cdot 0=0$$

Al ser nulo el determinante de $A^{-1}\cdot B$ esta matriz no tiene inversa.

6. a) **[1 punto]** Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2}.$$

b) **[1.5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, 1, 3)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores $\vec{u}=(2,2,0)$ *y* $\vec{v}=(0,0,-1)$

a)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x}{5x}+\frac{1}{5x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{5x\frac{x^2}{5x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{5x}\right)^{\frac{x^2}{5x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{5x}\right)^{\frac{x}{5}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{5}}=e^{+\infty}=\{e>1\}=\boxed{+\infty}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2}=1^{+\infty}=Indeterminación(n^o\, e)=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{5x+1}{5x}-1\right)}=\ldots$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{5x+1}{5x}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{5x+1-5x}{5x}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{1}{5x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{5x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{5}=\frac{+\infty}{5}=+\infty}$$

$$\ldots=e^{+\infty}=\{e>1\}=\boxed{+\infty}$$

b) Un vector perpendicular a los vectores $\vec{u}=(2,2,0)$ *y* $\vec{v}=(0,0,-1)$ es su producto vectorial.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(2,2,0)\\ \vec{v}=(0,0,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=-2i+0+0+0+2j=-2i+2j=(-2,2,0)$$

Tenemos que hallar la ecuación de una recta r que pasa por el punto $A(2, 1, 3)$ y tiene como vector director $\vec{v_r}=(-2,2,0)$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=(-2,2,0)\\ A(2,1,3)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{r\equiv\begin{cases}x=2-2\lambda\\ y=1+2\lambda\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=3\end{cases}}$$

7. a) **[1 punto]** Sea la función $f(x)=x^3+3x^2+x+3$. Obtén sus máximos y mínimos relativos.

b) Una urna contiene cuatro bolas numeradas del 1 al 4. Se extraen al azar dos bolas sin reemplazamiento y se obtiene una puntuación igual a la suma de los valores correspondientes.

b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación obtenida sea de 3?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación sea mayor de 3?

a) Utilizamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2+6x+1 \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2+6x+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4(3)(1)}}{2(3)}=\frac{-6\pm\sqrt{24}}{6}=\begin{cases} x=-1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\simeq -0.18 \\ x=-1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\simeq -1.82 \end{cases}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada

$$f''(x)=6x+6 \Rightarrow \begin{cases} f''\left(-1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)=6\left(-1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)+6=-2\sqrt{3}<0 \to x=-1-\dfrac{\sqrt{6}}{3} \text{ es máximo} \\ f''\left(-1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)=6\left(-1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)+6=2\sqrt{3}>0 \to x=-1+\dfrac{\sqrt{6}}{3} \text{ es mínimo} \end{cases}$$

La función presenta un máximo en $x=-1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ y un mínimo en $x=-1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

b) Las posibles extracciones de la urna son:

12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43.

Todas estas extracciones son igual de probables. La probabilidad de una de ellas es 1/12.

b.1) La suma es 3 sacando 12 o 21.

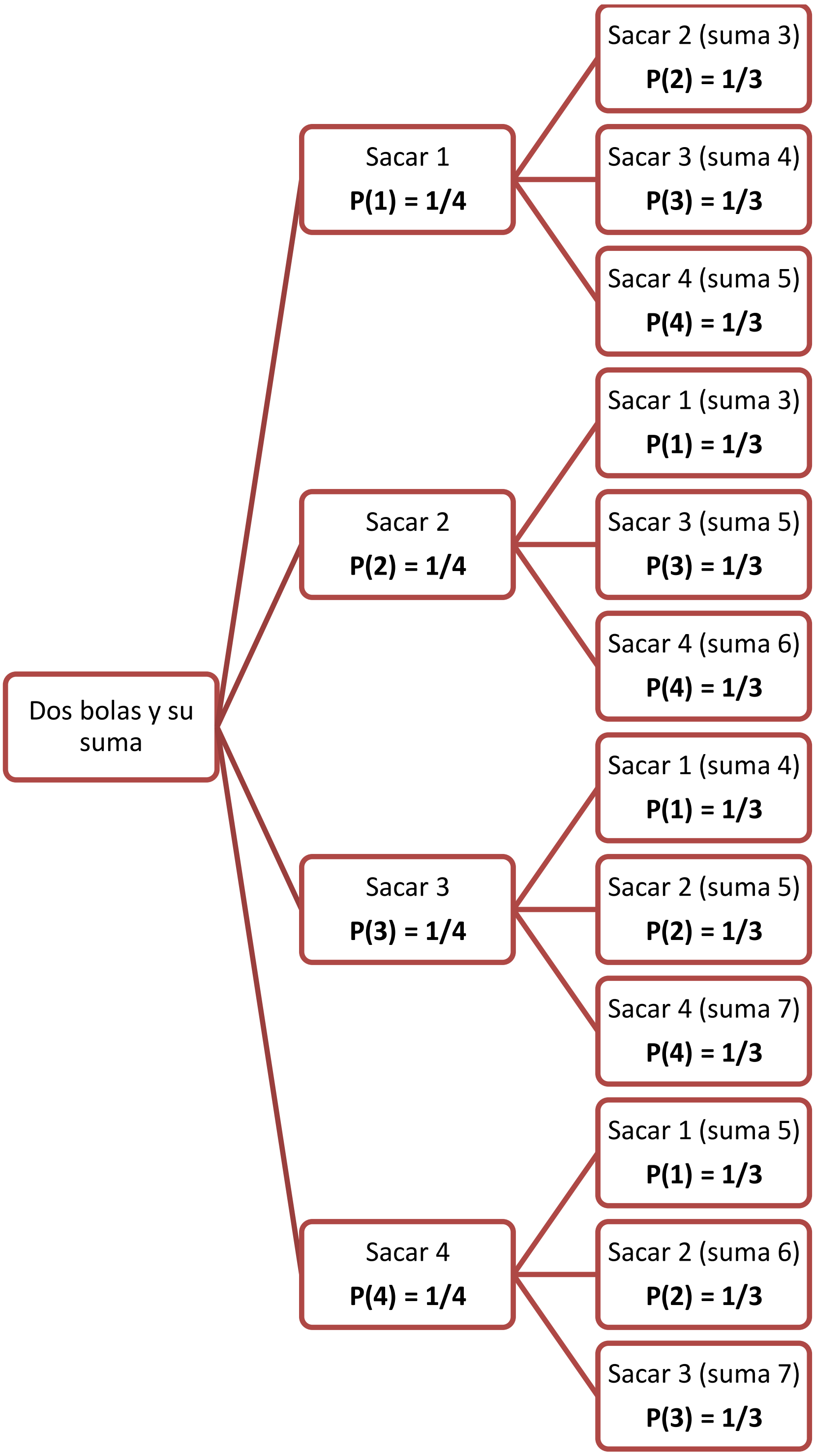
$$P(Suma\ 3)=P(12,21)=\{\text{Regla de Laplace}\}=\frac{2}{12}=\boxed{\frac{1}{6}\simeq 0.16667}$$

b.2) La suma mayor de 3 se consigue de 10 formas distintas, sacando 13, 14, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42 o 43.

$$P(Sacar\ más\ de\ 3)=\frac{10}{12}=\boxed{\frac{5}{6}\simeq 0.8333}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Realizamos un diagrama de árbol.



b.1) La suma es 3 sacando 12 o 21.

$$P(Suma3) = P(12) + P(21) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{12} = \boxed{\frac{1}{6} \simeq 0.16667}$$

b.2) La suma mayor de 3 se consigue de muchas formas. Calculamos su probabilidad usando el suceso contrario. El suceso contrario es "sacar 3 o menos", es decir, "sacar 3".

$$P(Sacar\ más\ de\ 3) = 1 - P(Sacar\ 3) = 1 - \frac{1}{6} = \boxed{\frac{5}{6} \simeq 0.8333}$$

8. a) **[1,25 puntos]** Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&1\\2&1&0&1\end{pmatrix}$. Calcula el rango de A.

b) **[1,25 puntos]** Sea la recta r definida por la intersección de los planos $\pi_1 \equiv x+y+z=1$, $\pi_2 \equiv y+2z=1$. Por otro lado, consideraremos el plano $\pi_3 \equiv 2x+y=1$. Determina la posición relativa de la recta r y el plano π_3. El resultado del apartado anterior te puede ayudar.

a) La matriz A es de dimensiones 3×4 por lo que tiene rango 3, 2 o 1.
Observamos que la columna 2ª y la 4ª son iguales por lo que el rango de la matriz A es el mismo que el de la matriz $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\2&1&0\end{pmatrix}$.

Calculamos el determinante de la matriz anterior.

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\2&1&0\end{vmatrix}=0+4+0-2-0-2=0$$

Como el determinante es nulo el rango de A no es 3.

¿El rango de A es 2?

Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y las columnas 3ª y 4ª de la matriz A. Calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

El determinante es no nulo y por lo tanto el rango de A es 2.

<u>OTRA FORMA DE HACERLO</u>

Triangulamos la matriz usando el método de Gauss.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&1\\2&1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 3ª} - 2\cdot\text{Fila 1ª}\\ \begin{array}{cccc}2&1&0&1\\-2&-2&-2&-2\\\hline 0&-1&-2&-1\end{array}\to\text{Nueva Fila 3ª}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&1\\0&-1&-2&-1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 3ª + Fila 2ª}\\ \begin{array}{cccc}0&-1&-2&-1\\0&1&2&1\\\hline 0&0&0&0\end{array}\to\text{Nueva Fila 3ª}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

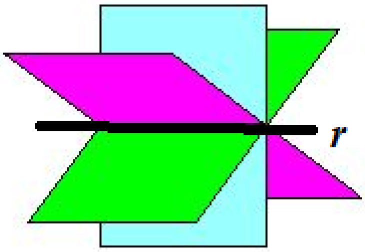
Como la fila tercera es nula el rango de A es 2.

b) Planteamos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv x+y+z=1 \\ \pi_2 \equiv y+2z=1 \\ \pi_3 \equiv 2x+y=1\end{array}\right\}$$

Este sistema tiene como matriz ampliada asociada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ del apartado anterior.

En la triangulación hecha en el apartado anterior tenemos que este sistema es equivalente al sistema asociado a la matriz ampliada $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r}x+y+z=1 \\ y+2z=1\end{array}\right\}$. Este sistema tiene infinitas soluciones y por tanto los tres planos coinciden en una recta.



Resolvemos el sistema y obtenemos la ecuación de la recta.

$$\left.\begin{array}{r}x+y+z=1 \\ y+2z=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x+y+z=1 \\ y=1-2z\end{array}\right\} \Rightarrow x+1-2z+z=1 \Rightarrow x=z \Rightarrow \boxed{\begin{cases}x=\lambda \\ y=1-2\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda\end{cases}}$$