Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2022/2023

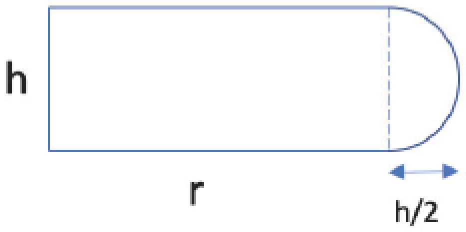
Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} -2x + y - z = -1 \\ -x + ay + z = 2 \\ 2x + y + az = 3 \end{cases}$,con $a \in \mathbb{R}$

a) **[1,75 punto]** Discute cómo es el sistema en función de los valores del parámetro *a*.
b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible

2. Una empresa desea construir un aparcamiento para sus empleados y necesita vallarlo de manera que la región resultante sea un rectángulo más medio círculo, tal y como se ve en la figura adjunta. El rectángulo tiene de lados $h, r \in \mathbb{R}$, de manera que el radio del semicírculo es *h/2*. La empresa tiene solamente presupuesto para comprar una valla de 80 metros de longitud, que ha de ser el perímetro del aparcamiento. La empresa desea construir un aparcamiento con el mayor área posible con ese perímetro de 80 metros.



a) **[1 punto]** Escribe el área del aparcamiento en función del valor *h*.
b) **[1,5 puntos]** ¿Cuánto deben valer *h* y *r* para que el área del aparcamiento sea lo mayor posible?

3. *a*) Tenemos dos urnas con bolas. La urna A tiene 6 bolas rojas y 8 negras y la urna B tiene 8 bolas rojas y 10 bolas negras. Disponemos de un dado de 12 caras numeradas del 1 al 12. Lanzamos el dado y si sale un número múltiplo de 4 se extrae una bola de la urna A. Si sale otro número se extrae una bola de la urna B. Calcula razonadamente:

a.1) **[0,5 puntos]** La probabilidad de obtener una bola roja.
a.2) **[0,75 puntos]** Sabiendo que la bola extraída es roja, la probabilidad de que haya sido extraída de la urna A.

b) Una empresa de mensajería sabe que la probabilidad de que el destinatario esté ausente (y no se pueda hacer la entrega) durante el reparto es del 25 %. Un repartidor de esta empresa ha de entregar 6 paquetes.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que no pueda entregar uno de ellos porque el destinatario esté ausente?
b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que pueda entregar al menos uno de los paquetes?

n	**p** **k**	**0.05**	**0.15**	**0.25**	**0.35**	**0.45**	**0.55**	**0.65**	**0.75**	**0.85**	**0.95**
6	**0**	0.7351	0.3771	0.1780	0.0754	0.0277	0.0083	0.0018	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.2321	0.3993	0.3560	0.2437	0.1359	0.0609	0.0205	0.0044	0.0004	0.0000
	2	0.0305	0.1762	0.2966	0.3280	0.2780	0.1861	0.0951	0.0330	0.0055	0.0001
	3	0.0021	0.0415	0.1318	0.2355	0.3032	0.3032	0.2355	0.1318	0.0415	0.0021
	4	0.0001	0.0055	0.0330	0.0951	0.1861	0.2780	0.3280	0.2966	0.1762	0.0305
	5	0.0000	0.0004	0.0044	0.0205	0.0609	0.1359	0.2437	0.3560	0.3993	0.2321
	6	0.0000	0.0000	0.0002	0.0018	0.0083	0.0277	0.0754	0.1780	0.3771	0.7351

4. Sean el plano $\pi \equiv a \cdot x + y - z = 1$, con $a \in \mathbb{R}$, y los puntos $A(1, 0, 0)$ y $B(b, 1, -1)$, con $b \in \mathbb{R}$.
   a) **[1,5 puntos]** Determina el valor de a, b para que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular al plano π y el punto A esté contenido en el plano π.
   b) **[1 puntos]** Con los valores de a, b obtenidos en el apartado anterior, escribe la ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular al plano π.

5. *a*) **[1 punto]** Encontrar el área encerrada por la recta $x = -1$ y las gráficas de las funciones

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \text{ y } g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1.$$

   b) **[1,5 puntos]** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & a \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$. Estudia el rango de A en función de los valores de a.

6. a) **[1 punto]** Calcula el límite siguiente:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 9}{3x - 9}$$

   b) **[1,5 puntos]** Sean el punto $A(1, 2, 1)$ y el plano $\pi \equiv x - y = 1$. Calcula la distancia del punto A al plano π.

7. a) **[1 punto]** Resuelve la siguiente integral:

$$\int (x+3)e^{-2x}dx \, .$$

   b) En un juego de azar cada jugador tira un dado de seis caras. Si sale un 1 vuelve a tirar. Si sale otro resultado deja de tirar y la puntuación obtenida es el número de unos obtenidos durante las tiradas.
   b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de no obtener ningún uno? ¿Cuál es la probabilidad de obtener una puntuación de uno? ¿Y la de obtener una puntuación de tres?
   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Podrías dar la probabilidad de obtener una puntuación de $n \in \mathbb{N}$?

8. a) **[1,25 puntos]** Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$ con $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$ calcula el valor de $\begin{vmatrix} 1/2 & 3/2 & 5/2 \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix}$ e indica en cada paso las propiedades que utilizas.

   b) **[1,25 puntos]** Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (3,2,3)$.

SOLUCIONES

1. Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} -2x+y-z=-1 \\ -x+ay+z=2 \\ 2x+y+az=3 \end{cases}$, con $a \in \mathbb{R}$

a) **[1,75 punto]** Discute cómo es el sistema en función de los valores del parámetro *a*.
b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 3 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix}=-2a^2+2+1+2a+a+2=-2a^2+3a+5$$

$$|A|=0 \Rightarrow -2a^2+3a+5=0 \Rightarrow a=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-2)(5)}}{2(-2)}=\frac{-3\pm 7}{-4}=\begin{cases} \dfrac{-3+7}{-4}=\boxed{-1=a} \\ \dfrac{-3-7}{-4}=\boxed{2.5=a} \end{cases}$$

Distinguimos tres casos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 2.5$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de A/B e igual al número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $a=-1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Analizamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

$$A/B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 1^{\text{a}} \; - \; 2\cdot\text{Fila } 2^{\text{a}} \\ -2 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \\ 2 \quad 2 \quad -2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 3 \quad -3 \quad -5 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{\text{a}} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^{\text{a}} + \; \text{Fila } 1^{\text{a}} \\ 2 \quad 1 \quad -1 \quad 3 \\ -2 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 2 \quad -2 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{llll}3\cdot\text{Fila }3^{a}\ -\ 2\cdot\text{ Fila }2^{a} & & & \\ 0 & 6 & -6 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 10 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 16\rightarrow\text{ Nueva Fila }3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{-2\quad 1\quad -1\quad -1}}^{A/B}}\\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{0\quad 0\quad 0}}_{A}} & \end{array}\right)$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B es 3. Los rangos son distintos y el **sistema es incompatible** (sin solución)

CASO 3. $a=2.5$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Analizamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

$$A/B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2.5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2.5 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{llll}\text{Fila }1^{a}\ -\ 2\cdot\text{ Fila }2^{a} & & & \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -2 & -4 \\ \hline 0 & -4 & -3 & -5\rightarrow\text{ Nueva Fila }2^{a}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{llll}\text{Fila }3^{a}+\text{ Fila }1^{a} & & & \\ 2 & 1 & 2.5 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 2 & 1.5 & 2\rightarrow\text{ Nueva Fila }3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1.5 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{llll}2\cdot\text{Fila }3^{a}+\text{Fila }2^{a} & & & \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -3 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1\rightarrow\text{ Nueva Fila }3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{-2\quad 1\quad -1\quad -1}}^{A/B}}\\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{0\quad 0\quad 0}}_{A}} & \end{array}\right)$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B es 3. Los rangos son distintos y el **sistema es incompatible** (sin solución)

Resumiendo: Si $a\neq -1$ y $a\neq 2.5$ el sistema es compatible determinado, si $a=2.5$ o $a=-1$ el sistema es incompatible.

b) Para *a* = 2 el sistema es compatible determinado (apartado anterior). Hallamos su solución.

$$\left\{\begin{array}{l}-2x+y-z=-1 \\ -x+2y+z=2 \\ 2x+y+2z=3\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{lllll}\text{Ecuación }3^{a}+\text{ Ecuación }1^{a} & & & & \\ 2x & +y & +2z & =3 & \\ -2x & +y & -z & =-1 & \\ \hline & 2y & +z & =2 & \rightarrow Nueva\,Ecuación\,3^{a}\end{array}\right\}$$

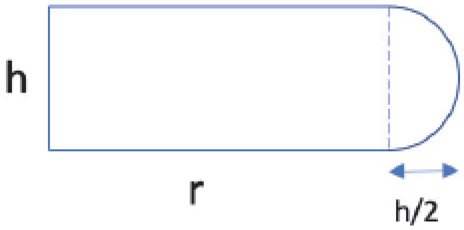
$$\left\{\begin{array}{lllll}-2\cdot\text{Ecuación }2^{a}+\text{ Ecuación }1^{a} & & & & \\ 2x & -4y & -2z & =-4 & \\ -2x & +y & -z & =-1 & \\ \hline & -3y & -3z & =-5 & \rightarrow Nueva\,Ecuación\,2^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}-2x+y-z=-1 \\ \quad -3y-3z=-5\Rightarrow \\ \quad\ 2y\ +\ z=2\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3\cdot\text{Ecuación } 3^{\text{a}} + 2\cdot\text{ Ecuación } 2^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} 6y & +3z & = & 6 \\ -6y & -6z & = & -10 \\ \hline & -3z & = & -4 \end{array} \rightarrow \textit{Nueva Ecuación}\, 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x+y-z=-1 \\ \quad -3y-3z=-5 \\ \qquad -3z=-4 \rightarrow \boxed{z=\frac{4}{3}} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x+y-\frac{4}{3}=-1 \\ \quad -3y-4=-5 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x+y=\frac{1}{3} \\ \quad -3y=-1 \rightarrow \boxed{y=\frac{1}{3}} \end{array}\right. \Rightarrow -2x+\frac{1}{3}=\frac{1}{3} \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

La solución del sistema es $x = 0$, $y=\frac{1}{3}$, $z=\frac{4}{3}$.

2. Una empresa desea construir un aparcamiento para sus empleados y necesita vallarlo de manera que la región resultante sea un rectángulo más medio círculo, tal y como se ve en la figura adjunta. El rectángulo tiene de lados $h, r \in \mathbb{R}$, de manera que el radio del semicírculo es *h/2*. La empresa tiene solamente presupuesto para comprar una valla de 80 metros de longitud, que ha de ser el perímetro del aparcamiento. La empresa desea construir un aparcamiento con el mayor área posible con ese perímetro de 80 metros.



a) **[1 punto]** Escribe el área del aparcamiento en función del valor *h*.

b) **[1,5 puntos]** ¿Cuánto deben valer *h* y *r* para que el área del aparcamiento sea lo mayor posible?

a) El perímetro de la figura es la suma de tres de los lados del rectángulo y la mitad del perímetro de la circunferencia de radio *h/2*. Este perímetro es la longitud de la valla (80 metros)

$$Perímetro = 2r + h + \frac{\cancel{2}\pi\frac{h}{2}}{\cancel{2}} = 2r + h + \frac{\pi h}{2} = 80 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{80 - h - \frac{\pi h}{2}}{2} = 40 - \frac{1}{2}h - \frac{\pi}{4}h$$

El área del aparcamiento es la suma del área del rectángulo y la mitad del área del círculo de radio *h/2*.

$$Área = hr + \frac{\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2} = hr + \frac{\pi h^2}{8}$$

Reemplazamos en el área el valor de *r* por lo obtenido inicialmente y nos queda la función de la que deseamos hallar su máximo.

$$\left.\begin{array}{l} Área = hr + \frac{\pi h^2}{8} \\ r = 40 - \frac{1}{2}h - \frac{\pi}{4}h \end{array}\right\} \Rightarrow A(h) = h\left(40 - \frac{1}{2}h - \frac{\pi}{4}h\right) + \frac{\pi h^2}{8} = 40h - \frac{1}{2}h^2 - \frac{\pi}{4}h^2 + \frac{\pi}{8}h^2$$

El área del aparcamiento en función del valor *h* tiene la expresión: $A(h) = 40h - \frac{1}{2}h^2 - \frac{\pi}{8}h^2$

b) Buscamos los puntos críticos de esta función usando la derivada.

$$\left.\begin{array}{l} A'(h) = 40 - h - \frac{\pi}{4}h \\ A'(h) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 40 - h - \frac{\pi}{4}h = 0 \Rightarrow 40 = h + \frac{\pi}{4}h \Rightarrow 40 = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h=\frac{40}{1+\frac{\pi}{4}}=\frac{160}{4+\pi}\simeq 22.4\,metros$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada para comprobar si es un máximo o un mínimo de la función *A(x)*.

$$A'(h)=40-h-\frac{\pi}{4}h\Rightarrow A''(h)=-1-\frac{\pi}{4}\Rightarrow A''(22.4)=-1-\frac{\pi}{4}<0$$

Como es negativa la segunda derivada sabemos que la función tiene un máximo en $h=\frac{160}{4+\pi}$.

El valor de *r* es:

$$r=40-\frac{1}{2}\left(\frac{160}{4+\pi}\right)-\frac{\pi}{4}\left(\frac{160}{4+\pi}\right)=40-\frac{80}{4+\pi}-\frac{40\pi}{4+\pi}=\frac{160+40\pi}{4+\pi}-\frac{80}{4+\pi}-\frac{40\pi}{4+\pi}$$

$$\boxed{r=\frac{80}{4+\pi}\simeq 11.2\ metros}$$

Resumiendo: El área del aparcamiento es máxima para $h=\frac{160}{4+\pi}\simeq 22.4\,metros$ y $r=\frac{80}{4+\pi}\simeq 11.2\ metros$

3. *a*) Tenemos dos urnas con bolas. La urna A tiene 6 bolas rojas y 8 negras y la urna B tiene 8 bolas rojas y 10 bolas negras. Disponemos de un dado de 12 caras numeradas del 1 al 12. Lanzamos el dado y si sale un número múltiplo de 4 se extrae una bola de la urna A. Si sale otro número se extrae una bola de la urna B. Calcula razonadamente:

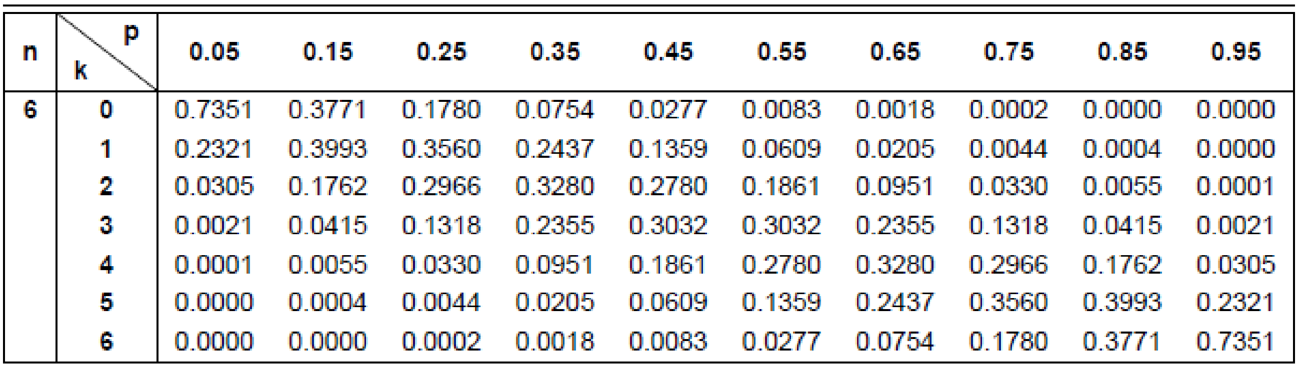
a.1) **[0,5 puntos]** La probabilidad de obtener una bola roja.

a.2) **[0,75 puntos]** Sabiendo que la bola extraída es roja, la probabilidad de que haya sido extraída de la urna A.

b) Una empresa de mensajería sabe que la probabilidad de que el destinatario esté ausente (y no se pueda hacer la entrega) durante el reparto es del 25 %. Un repartidor de esta empresa ha de entregar 6 paquetes.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que no pueda entregar uno de ellos porque el destinatario esté ausente?

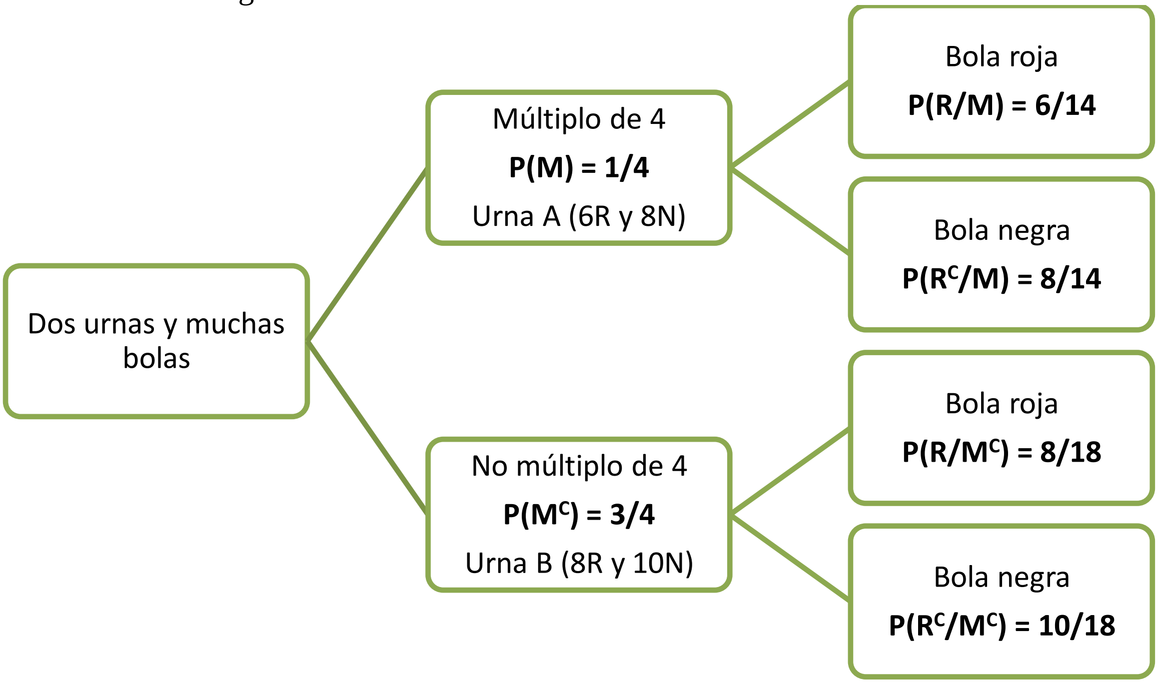
b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que pueda entregar al menos uno de los paquetes?



n	p k	0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85	0.95
6	0	0.7351	0.3771	0.1780	0.0754	0.0277	0.0083	0.0018	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.2321	0.3993	0.3560	0.2437	0.1359	0.0609	0.0205	0.0044	0.0004	0.0000
	2	0.0305	0.1762	0.2966	0.3280	0.2780	0.1861	0.0951	0.0330	0.0055	0.0001
	3	0.0021	0.0415	0.1318	0.2355	0.3032	0.3032	0.2355	0.1318	0.0415	0.0021
	4	0.0001	0.0055	0.0330	0.0951	0.1861	0.2780	0.3280	0.2966	0.1762	0.0305
	5	0.0000	0.0004	0.0044	0.0205	0.0609	0.1359	0.2437	0.3560	0.3993	0.2321
	6	0.0000	0.0000	0.0002	0.0018	0.0083	0.0277	0.0754	0.1780	0.3771	0.7351

a) Para obtener un múltiplo de 4 al lanzar el dado debe salir 4, 8 o 12. Si llamamos M al suceso “sacar múltiplo de 4 al lanzar el dado” tenemos que $P(M) = 3/12 = 1/4$.
Llamamos R al suceso “sacar bola roja” y R^C al suceso “sacar bola negra”

Realizamos un diagrama de árbol.



a.1) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R)=P(M)P(R/M)+P\left(M^C\right)P\left(R/M^C\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{14}+\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{18}=\boxed{\frac{37}{84}\simeq 0.44}$$

b.2) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M/R)=\frac{P(M\cap R)}{P(R)}=\frac{P(M)P(R/M)}{P(R)}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{14}}{\frac{37}{84}}=\boxed{\frac{9}{37}\simeq 0.243}$$

b) Sea X la variable que cuenta el número de paquetes que no se pueden entregar de un grupo de 6 paquetes.
Esta variable es una binomial de parámetros *n = 6* y *p = P(no entregar un paquete) = 0.25*.
X = B(6, 0.25)

b.1) Nos piden calcular $P(X=1)$.

$$P(X=1)=\binom{6}{1}0.25^1\cdot 0.75^5=\boxed{\frac{729}{2048}\simeq 0.356}$$

b.2) Entregar al menos uno de los paquetes es entregar 1, 2, 3, 4, 5 o 6 paquetes. Esto es lo mismo que no entregar 5, 4, 3, 2, 1 o 0 paquetes. Nos piden calcular $P(X\leq 5)$. Calculamos su valor usando el suceso contrario.

$$P(X\leq 5)=1-P(X>5)=1-P(X=6)=1-\binom{6}{6}0.25^6\cdot 0.75^0=\boxed{\frac{4095}{4096}\simeq 0.9998}$$

4. Sean el plano $\pi \equiv a \cdot x + y - z = 1$, con $a \in \mathbb{R}$, y los puntos $A(1, 0, 0)$ y $B(b, 1, -1)$, con $b \in \mathbb{R}$.

a) **[1,5 puntos]** Determina el valor de *a*, *b* para que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular al plano π y el punto *A* esté contenido en el plano π.

b) **[1 puntos]** Con los valores de *a*, *b* obtenidos en el apartado anterior, escribe la ecuación de la recta que pasa por *A* y es perpendicular al plano π.

a) Si el punto *A* esté contenido en el plano π el punto satisface su ecuación.

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv ax + y - z = 1 \\ A(1,0,0) \in \pi\end{array}\right\} \Rightarrow a + 0 - 0 = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Además, el vector $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular al plano π. Esto significa que este vector tiene coordenadas proporcionales al vector normal al plano.

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv x + y - z = 1 \rightarrow \vec{n} = (1,1,-1) \\ \overrightarrow{AB} = (b,1,-1) - (1,0,0) = (b-1,1,-1) \\ \overrightarrow{AB} \parallel \vec{n}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{b-1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} \Rightarrow b - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

Los valores buscados son *a = 1* y *b = 2*.

b) Para *a = 1* y *b = 2* el plano queda $\pi \equiv x + y - z = 1$.

La recta que pasa por *A* y es perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r} = \vec{n} = (1,1,-1) \\ A(1,0,0) \in r\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -\lambda \end{cases}}$$

5. *a*) **[1 punto]** Encontrar el área encerrada por la recta $x = -1$ y las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$.

b) **[1,5 puntos]** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & a \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$. Estudia el rango de A en función de los valores de a.

a) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 2x + 3 \\ g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 \\ f(x) = g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = \frac{1}{2}x^2 + 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(4)}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

El área del recinto es el valor absoluto de la integral definida entre –1 y 2 de la diferencia de las dos funciones.

Como $f(0) = 3$ y $g(0) = 1$ tenemos que *f(x)* > *g(x)* en el intervalo (–1,2).

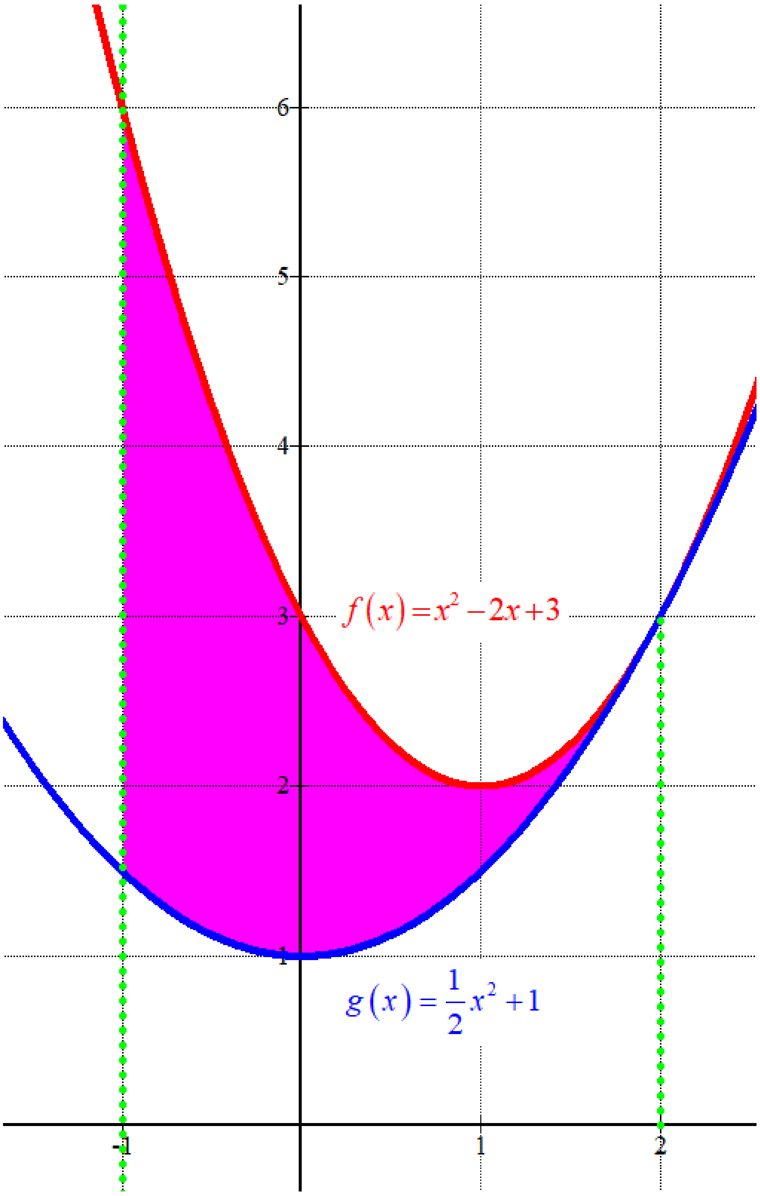
$$Área = \int_{-1}^{2} f(x) - g(x)\,dx = \int_{-1}^{2} x^2 - 2x + 3 - \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} x^2 - 2x + 3 - \frac{1}{2}x^2 - 1dx = \int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_{-1}^{2} = \left[\frac{x^3}{6} - x^2 + 2x\right]_{-1}^{2} = \left[\frac{2^3}{6} - 2^2 + 4\right] - \left[\frac{(-1)^3}{6} - (-1)^2 - 2\right] =$$

$$= \frac{8}{6} - 4 + 4 + \frac{1}{6} + 1 + 2 = \frac{9}{2} = \boxed{4.5\ u^2}$$

El recinto del cual hemos hallado el área es el coloreado de rosa en el dibujo inferior.



b) El rango de la matriz A puede ser 3, 2 o 1.
Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 1 & a\\ -1 & 0 & 0\\ -1 & a+1 & a+1\end{vmatrix}=0+0-a(a+1)-0+a+1-0=-a^2-a+a+1=-a^2+1$$

$$|A|=0\Rightarrow -a^2+1=0\Rightarrow a^2=1\Rightarrow \boxed{a=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Si $a\neq \pm 1$ el determinante de A es no nulo y su rango es 3.
Si $a = 1$ el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.
La matriz queda $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª. Calculamos su determinante: $\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1\neq 0$. El rango de A es 2.

Si $a = -1$ el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª. Calculamos su determinante: $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $a \neq \pm 1$ el rango de A es 3 y si $a = 1$ o $a = -1$ el rango de A es 2.

6. a) **[1 punto]** Calcula el límite siguiente:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+3x-9}{3x-9}$$

b) **[1,5 puntos]** Sean el punto *A*(1, 2, 1) y el plano $\pi \equiv x - y = 1$. Calcula la distancia del punto *A* al plano π.

a)

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+3x-9}{3x-9}=\frac{27-27+9-9}{9-9}=\frac{0}{0}=Indeterminación=$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 3 & -9 \\ 3 & & 3 & 0 & 9 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow x^3-3x^2+3x-9=(x-3)\left(x^2+3\right)$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}\left(x^2+3\right)}{3\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3}{3}=\frac{12}{3}=\boxed{4}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+3x-9}{3x-9}=\frac{27-27+9-9}{9-9}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-6x+3}{3}=\frac{27-18+3}{3}=\frac{12}{3}=\boxed{4}$$

b) Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,2,1) \\ \pi \equiv x-y-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(A,\pi)=\frac{|1-2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\boxed{\sqrt{2}\ unidades}$$

7**.** a) **[1 punto]** Resuelve la siguiente integral:

$$\int (x+3)e^{-2x}dx\,.$$

b) En un juego de azar cada jugador tira un dado de seis caras. Si sale un 1 vuelve a tirar. Si sale otro resultado deja de tirar y la puntuación obtenida es el número de unos obtenidos durante las tiradas.

b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de no obtener ningún uno? ¿Cuál es la probabilidad de obtener una puntuación de uno? ¿Y la de obtener una puntuación de tres?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Podrías dar la probabilidad de obtener una puntuación de $n \in \mathbb{N}$?

a)

$$\int (x+3)e^{-2x}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x+3 \to du = dx \\ dv = e^{-2x}dx \to v = \int e^{-2x}dx = \frac{1}{-2}e^{-2x} \end{array} \right\} = (x+3)\frac{1}{-2}e^{-2x} - \int \frac{1}{-2}e^{-2x}dx =$$

$$= \frac{-x-3}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = \frac{-x-3}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-2}e^{-2x}\right) = \frac{-x-3}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} =$$

$$= \frac{-2x-6}{4}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} = \boxed{\frac{-2x-7}{4}e^{-2x} + K}$$

b) En cualquier momento del juego, la probabilidad de obtener un 1 es de 1/6 y la de obtener otro valor es de 5/6.

b.1) No obtener ningún uno es sacar en la primera tirada un resultado que no sea 1.
La probabilidad de no sacar ningún 1 es 5/6.

$$P(\textit{Sacar puntuación } 0) = \boxed{\frac{5}{6} \simeq 0.833}$$

Obtener una puntuación de 1 es sacar 1 en la primera tirada y un resultado distinto de 1 en la segunda, como son sucesos independientes la probabilidad de obtener puntuación 1 es:

$$P(\textit{Sacar puntuación } 1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \boxed{\frac{5}{6^2} = \frac{5}{36} \simeq 0.1389}$$

Para obtener una puntuación de tres debemos sacar 1 en la 1ª, 2ª y 3ª tirada y un resultado distinto de 1 en la 4ª tirada.

$$P(\textit{Sacar puntuación} 3) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \boxed{\frac{5}{6^4} = \frac{5}{1296} \simeq 0.0039}$$

b.2) Analizamos lo obtenido en el apartado anterior:

$$P(\textit{Sacar puntuación } 0) = \frac{5}{6} = \frac{5}{6^{0+1}}$$

$$P\left(Sacar\ puntuación\ 1\right)=\frac{5}{6^2}=\frac{5}{6^{1+1}}$$

$$P\left(Sacar\ puntuación\ 3\right)=\frac{5}{6^4}=\frac{5}{6^{3+1}}$$

Generalizando la regla para n puntos tendremos $\boxed{P\left(Sacar\ puntuación\ n\right)=\frac{5}{6^{n+1}}}$

8. a) **[1,25 puntos]** Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$ con $a,b,c,x,y,z \in \mathbb{R}$ calcula el valor de $\begin{vmatrix} 1/2 & 3/2 & 5/2 \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix}$ e indica en cada paso las propiedades que utilizas.

b) **[1,25 puntos]** Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (3,2,3)$.

a)

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 3/2 & 5/2 \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} Sacamos\ \ factor\, común\, \frac{1}{2} \\ de\, la\, 1^{\text{a}}\, Fila \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} Sacamos\ \ factor\, común\, 4 \\ de\, la\, 3^{\text{a}}\, Fila \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{En la 2}^{\text{a}} \text{ fila separamos el determinante} \\ \text{en suma de dos determinantes} \end{array} \right\} = 2 \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ x & y & z \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{En el segundo determinante} \\ \text{la 2}^{\text{a}} \text{ fila es proporcional} \\ \text{a la 1}^{\text{a}} \text{ fila (x2) } \rightarrow \text{determinante = 0} \end{array} \right\} = 2 \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 \right) = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 = \boxed{12}$$

b)

$$\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} = \frac{(1,1,1)(3,2,3)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{3^2+2^2+3^2}} = \frac{3+2+3}{\sqrt{3}\sqrt{22}} = \frac{8}{\sqrt{66}} \Rightarrow$$

$$\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{8}{\sqrt{66}}\right) \simeq 10^{\text{o}}$$

El valor aproximado del ángulo formado por los dos vectores es de 10º.