	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS II**	**EJERCICIO** **Nº Páginas: 2**

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.
2.- CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

Calcular λ y μ para que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+2y+z=\mu \\ \lambda x+y=1 \\ y+\lambda z=-1 \end{cases}$ tenga infinitas soluciones.

(2 puntos)

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ z & x+y \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular los valores de $x,y,z\in\mathbb{R}$ para que AB sea igual a la inversa C^{-1} de la matriz C. **(2 puntos)**

E3.- (Geometría)
Calcular la ecuación del plano π que es perpendicular al plano $\sigma\equiv x+2y+3z=0$ y pasa por los puntos P = (0,0,0) y Q = (0,1,1). **(2 puntos)**

E4.- (Geometría)

Dados el plano $\pi\equiv x+2y-2z=0$ y la recta $r\equiv\frac{x}{-2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-1}{1}$, se pide:

a) Comprobar que r es paralela a π. **(1 punto)**
b) Hallar el plano σ, distinto de π y paralelo a π, cuya distancia a r coincide con la de π. **(1 punto)**

E5.- (Análisis)
a) Determinar a y b de modo que las funciones $f(x)=x^2-a$ y $g(x)=(x-b)e^x$ tomen el mismo valor en un punto en el que ambas tengan un extremo relativo. **(1 punto)**
b) Demostrar que la función $f(x)=2x+senx$ solo se anula en el punto x = 0. **(1 punto)**

E6.- (Análisis)

a) Determínense el dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen, de la función $f(x)=x(\ln x-1)$. (**1 punto**)

b) Calcúlese $\int x(\ln x-1)\,dx$ (**1 punto**)

E7.- (Análisis)

Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x^3+1}}{x-2}$. **(2 puntos)**

E8.- (Análisis)

Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=xe^{-x}$ y el eje de abscisas cuando x varía en el intervalo $[-1,0]$. **(2 puntos)**

E9- (Probabilidad y estadística)

Un 50% de los participantes en un torneo abierto de ajedrez celebrado en Salamanca son españoles, un 30% son europeos no españoles y los demás proceden del resto del mundo. De ellos, dos tercios de los españoles, la mitad de los europeos no españoles y un tercio de los no europeos no pasan de los 40 años.

a) Indicar las 6 probabilidades que aparecen en el enunciado **(0,6 puntos)**

b) Si se selecciona un participante al azar ¿Calcular la probabilidad de que no tenga más de 40 años? **(0,7 puntos)**

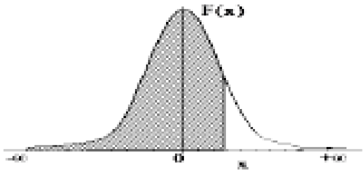
c) Si se elige al azar un participante del torneo y no tiene más de 40 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea español? **(0,7 puntos)**

E10.- (Probabilidad y estadística)

Si lanzamos al mismo tiempo dos dados idénticos y del tipo usual (es decir, que sean cúbicos, que todas sus caras tengan la misma probabilidad de quedar hacia arriba y que en cada una de ellas aparezca un número de puntos que varíe desde el uno hasta el seis), ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones obtenidas en los dos dados coincida con la suma más frecuente? **(2 puntos)**

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES

E1.- (Álgebra)

Calcular λ y μ para que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+2y+z=\mu \\ \lambda x+y=1 \\ y+\lambda z=-1 \end{cases}$ tenga infinitas soluciones.

(2 puntos)

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mu \\ \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

Para que tenga infinitas soluciones el rango de A y el de A/B debe ser iguales y menores de 3 (el número de incógnitas).

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda+0+\lambda-0-2\lambda^2-0=-2\lambda^2+2\lambda$$

$$|A|=0 \Rightarrow -2\lambda^2+2\lambda=0 \Rightarrow -2\lambda(\lambda-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ \lambda-1=0 \to \lambda=1 \end{cases}$$

Si $\lambda \neq 0 \ y \ \lambda \neq 1$ el determinante es no nulo y el rango de A es 3. El sistema tiene una única solución.

Si $\lambda=0$ el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos el rango de A y de A/B en este caso.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mu \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{\text{Fila } 3^{\text{a}} - \text{Fila } 2^{\text{a}}} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & \mu \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{matrix}}^{A/B} \right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. El sistema no tiene solución.

Si $\lambda=1$ el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos el rango de A y de A/B en este caso.

$$A/B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & \mu\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^{a} - \text{Fila } 1^{a}\\ \begin{array}{cccc}1 & 1 & 0 & 1\\ -1 & -2 & -1 & -\mu\\ \hline 0 & -1 & -1 & 1-\mu\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & \mu\\ 0 & -1 & -1 & 1-\mu\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{a} + \text{Fila } 2^{a}\\ \begin{array}{cccc}0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 1-\mu\\ \hline 0 & 0 & 0 & -\mu\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow\overbrace{\begin{pmatrix}\underbrace{\begin{matrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}\mu\\ 1-\mu\\ -\mu\end{matrix}\end{pmatrix}}^{A/B}$$

El rango de A es 2. El rango de A/B depende del valor de μ. Si queremos que el rango de A/B sea 2 debe ser $\mu=0$.

Con $\lambda=1$ y $\mu=0$ el rango de A es 2 y el de A/B también siendo menor que el número de incógnitas. El sistema tiene infinitas soluciones.

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x & 0\\ y & 1\\ z & x+y\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, calcular los valores de $x,y,z\in\mathbb{R}$ para que AB sea igual a la inversa C^{-1} de la matriz C. **(2 puntos)**

Comprobamos que C es invertible y determinamos su inversa.

$$|C|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$$

$$C^{-1}=\frac{Adj\left(C^T\right)}{|C|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Hacemos que $AB=C^{-1}$.

$$AB=C^{-1}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & 0\\ y & 1\\ z & x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x+z & x+y\\ -x+y & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+z=2\\ x+y=1\\ -x+y=1\\ 1=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=2-z\\ x+y=1\\ -x+y=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2-z+y=1\\ -2+z+y=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-z+y=-1\\ z+y=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}y=-1+z\\ z+y=3\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z-1+z=3\Rightarrow 2z=4\Rightarrow\boxed{z=2}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{y=-1+2=1}\\ \boxed{x=2-2=0}\end{cases}$$

Los valores buscados son $x = 0$; $y = 1$; $z = 2$.

E3.- (Geometría)
Calcular la ecuación del plano π que es perpendicular al plano $\sigma \equiv x+2y+3z=0$ y pasa por los puntos $P = (0,0,0)$ y $Q = (0,1,1)$. **(2 puntos)**

Si el plano π es perpendicular al plano σ tendrá como uno de sus vectores directores el vector normal del plano σ. El otro vector director necesario para definir el plano es el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\sigma \equiv x+2y+3z=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,2,3)$$

$$\pi \equiv \begin{cases} \vec{u}=\vec{n}=(1,2,3) \\ \vec{v}=\overrightarrow{PQ}=(0,1,1)-(0,0,0)=(0,1,1) \\ P(0,0,0)\in\pi \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+0+z-0-y-3x=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv -x-y+z=0}$$

E4.- (Geometría)

Dados el plano $\pi \equiv x+2y-2z=0$ y la recta $r \equiv \frac{x}{-2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-1}{1}$, se pide:

a) Comprobar que r es paralela a π. **(1 punto)**

b) Hallar el plano σ, distinto de π y paralelo a π, cuya distancia a r coincide con la de π. **(1 punto)**

a) Hallamos el vector director de la recta y el vector normal del plano y comprobamos si son ortogonales.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+2y-2z=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,2,-2) \\ r \equiv \frac{x}{-2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-1}{1} \Rightarrow \vec{v_r}=(-2,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{v_r}=(-2,2,1)\cdot(1,2,-2)=-2+4-2=0$$

Son ortogonales, por lo que la recta es paralela al plano o está contenida en él. Comprobamos si el punto P(0, 4, 1) perteneciente a la recta r está en el plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+2y-2z=0 \\ ¿P(0,4,1)\in\pi? \end{array}\right\} \Rightarrow ¿0+8-2=0? \text{ ¡No es cierto!}$$

El punto P de la recta no está en el plano, por lo que la recta es paralela al plano.

b) Si el plano σ es paralelo a π tendrá ecuación $\sigma \equiv x+2y-2z+D=0$.
Como la recta r es paralela a π también es paralela al plano σ, la distancia de la recta al plano será la distancia del punto P(0, 4, 1) al plano. Determinamos el valor de D haciendo que esta distancia sea la misma que al plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+2y-2z=0 \\ P(0,4,1)\in r \end{array}\right\} \Rightarrow d(r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|0+8-2|}{\sqrt{0^2+4^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{17}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma \equiv x+2y-2z+D=0 \\ P(0,4,1)\in r \end{array}\right\} \Rightarrow d(r,\sigma)=d(P,\sigma)=\frac{|0+8-2+D|}{\sqrt{0^2+4^2+1^2}}=\frac{|6+D|}{\sqrt{17}}$$

$$d(r,\pi)=d(r,\sigma) \Rightarrow \frac{6}{\sqrt{17}}=\frac{|6+D|}{\sqrt{17}} \Rightarrow 6=|6+D| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6=6+D \rightarrow D=0 \rightarrow \pi \equiv x+2y-2z=0 \\ -6=6+D \rightarrow D=-12 \rightarrow \boxed{\sigma \equiv x+2y-2z-12=0} \end{cases}$$

El plano buscado tiene ecuación $\sigma \equiv x+2y-2z-12=0$.

E5.- (Análisis)

a) Determinar a y b de modo que las funciones $f(x)=x^2-a$ y $g(x)=(x-b)e^x$ tomen el mismo valor en un punto en el que ambas tengan un extremo relativo. **(1 punto)**

b) Demostrar que la función $f(x)=2x+senx$ solo se anula en el punto $x = 0$. **(1 punto)**

a) Buscamos los extremos relativos en ambas funciones.

$$f(x)=x^2-a \Rightarrow f'(x)=2x$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

$$f''(x)=2 \Rightarrow f''(0)=2>0 \Rightarrow \text{En } x=0 \text{ hay un mímimo de } f(x)$$

$$g(x)=(x-b)e^x \Rightarrow g'(x)=e^x+(x-b)e^x=(x-b+1)e^x$$

$$g'(x)=0 \Rightarrow (x-b+1)e^x=0 \Rightarrow x-b+1=0 \Rightarrow \boxed{x=b-1}$$

$$g''(x)=e^x+(x-b+1)e^x=(x-b+2)e^x \Rightarrow g''(b-1)=(b-1-b+2)e^{b-1}=e^{b-1}>0$$

En $x=b-1$ hay un mínimo de $g(x)$

Como deben coincidir en los extremos relativos.

$$\left.\begin{matrix} b-1=0 \\ g(b-1)=f(0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \boxed{b=1} \\ g(b-1)=f(0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow g(0)=f(0) \Rightarrow (0-1)e^0=0^2-a \Rightarrow -1=-a \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Los valores buscados son *a = 1; b = 1*.

b) La función $f(x)=2x+senx$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

También sabemos que $f(0)=2\cdot 0+sen0=0$.

Si existiese algún $x = c$ tal que $f(c) = 0$ tendríamos que $f(0) = f(c) = 0$ y aplicando el teorema de Rolle en el intervalo [0, c] o [c, 0], según fuese c positivo o negativo existiría un valor d en el intervalo tal que $f'(d) = 0$, pero la derivada de la función es $f'(x)=2+\cos x$ y no se puede anular pues el coseno no puede alcanzar el valor –2.

Por lo que podemos afirmar que no existe un valor $c\neq 0$ donde la función se anule.

E6.- (Análisis)
a) Determínense el dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen, de la función $f(x)=x(\ln x-1)$. **(1 punto)**

b) Calcúlese $\int x(\ln x-1)\,dx$ **(1 punto)**

a) El logaritmo neperiano solo existe de un número positivo. → Dominio = $(0,+\infty)$.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento usamos la derivada.

$$f'(x)=(\ln x-1)+x\frac{1}{x}=\ln x$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \ln x=0 \Rightarrow x=1$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 1$.

En el intervalo (0, 1) tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5)=\ln 0.5<0$. La función decrece en (0, 1).
En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=\ln 2>0$. La función crece en $(1,+\infty)$.

La función decrece en (0, 1) y crece en $(1,+\infty)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 1$. No presenta máximos relativos.

b)

$$\int x(\ln x-1)\,dx=\int x\ln x-x\,dx=\int x\ln x\,dx-\int x\,dx=\dots$$

$$\int x\ln x\,dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln x\to du=\frac{1}{x}dx\\ dv=xdx\to v=\int xdx=\frac{x^2}{2}\end{array}\right\}=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}$$

$$\dots=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}-\frac{2x^2}{4}=\boxed{\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{3x^2}{4}+K}$$

E7.- (Análisis)

Calcular $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x^3+1}}{x-2}$. **(2 puntos)**

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x^3+1}}{x-2}=\frac{\sqrt{2^3+2-1}-\sqrt{2^3+1}}{2-2}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (conjugado)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x^3+1}\right)\left(\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^3+1}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^3+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x^3+x-1}\right)^2-\left(\sqrt{x^3+1}\right)^2}{(x-2)\left(\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^3+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x-1-\left(x^3+1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^3+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x^3}+x-1-\cancel{x^3}-1}{(x-2)\left(\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^3+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^3+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^3+1}}=\frac{1}{\sqrt{2^3+2-1}+\sqrt{2^3+1}}=\frac{1}{3+3}=\boxed{\frac{1}{6}}$$

E8.- (Análisis)
Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = xe^{-x}$ y el eje de abscisas cuando x varía en el intervalo $[-1,0]$. **(2 puntos)**

Comprobamos si la función corta el eje de abscisas en el intervalo $[-1,0]$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = xe^{-x} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xe^{-x} = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ e^{-x} = 0 \text{ ¡Imposible!} \end{array}\right.$$

Como la gráfica de la función no corta el eje en ningún punto intermedio del intervalo $[-1,0]$ el área pedida se obtiene con la integral definida de la función entre –1 y 0.

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int xe^{-x}dx = \left\{\begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \to du = dx \\ dv = e^{-x}dx \to v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{array}\right\} = -e^{-x} \cdot x - \int -e^{-x}dx =$$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + K$$

Calculamos la integral definida.

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_{-1}^{0} =$$

$$= \left[-0e^{-0} - e^{-0}\right] - \left[-(-1)e^{-(-1)} - e^{-(-1)}\right] = -1 - e + e = -1$$

El área del recinto es el valor absoluto de la integral definida y es de 1 unidad cuadrada.

E9- (Probabilidad y estadística)
Un 50% de los participantes en un torneo abierto de ajedrez celebrado en Salamanca son españoles, un 30% son europeos no españoles y los demás proceden del resto del mundo. De ellos, dos tercios de los españoles, la mitad de los europeos no españoles y un tercio de los no europeos no pasan de los 40 años.
a) Indicar las 6 probabilidades que aparecen en el enunciado **(0,6 puntos)**
b) Si se selecciona un participante al azar ¿Calcular la probabilidad de que no tenga más de 40 años? **(0,7 puntos)**
c) Si se elige al azar un participante del torneo y no tiene más de 40 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea español? **(0,7 puntos)**

Llamamos A al suceso "Ser español", B al suceso "ser europeo no español", C al suceso "ser del resto del mundo" y D al suceso "No pasar de 40 años".

a)
$$P(A)=0.50;\ P(B)=0.30;\ P(C)=1-0.50-0.30=0.20$$

$$P(D/A)=\frac{2}{3};\ P(D/B)=\frac{1}{2};\ P(D/C)=\frac{1}{3}$$

b) Usamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D)=P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C)=$$

$$=0.5\cdot\frac{2}{3}+0.30\cdot\frac{1}{2}+0.20\cdot\frac{1}{3}=\boxed{\frac{11}{20}=0.55}$$

c) Nos piden calcular $P(A/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{P(A)P(D/A)}{1-P(D)}=\frac{0.5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)}{0.55}=\boxed{\frac{20}{33}\simeq 0.61}$$

E10.- (Probabilidad y estadística)
Si lanzamos al mismo tiempo dos dados idénticos y del tipo usual (es decir, que sean cúbicos, que todas sus caras tengan la misma probabilidad de quedar hacia arriba y que en cada una de ellas aparezca un número de puntos que varíe desde el uno hasta el seis), ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones obtenidas en los dos dados coincida con la suma más frecuente? **(2 puntos)**

Al lanzar dos dados podemos obtener 36 pares de valores distintos que podemos organizar en una tabla.

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Como cada uno de los sucesos elementales de la tabla son equiprobables tenemos que la probabilidad de cada uno de ellos es 1/36.

He marcado de rojo los sucesos elementales que suman 7. Siendo esta suma la que puede suceder de más formas distintas entonces tendrá la probabilidad más alta (6/36).

$$P(\text{Sumar } 2) = \frac{1}{36}$$
$$P(\text{Sumar } 3) = \frac{2}{36}$$
$$P(\text{Sumar } 4) = \frac{3}{36}$$
$$P(\text{Sumar } 5) = \frac{4}{36}$$
$$P(\text{Sumar } 6) = \frac{5}{36}$$
$$P(\text{Sumar } 7) = \frac{6}{36}$$
$$P(\text{Sumar } 8) = \frac{5}{36}$$
$$P(\text{Sumar } 9) = \frac{4}{36}$$
$$P(\text{Sumar } 10) = \frac{3}{36}$$
$$P(\text{Sumar } 11) = \frac{2}{36}$$
$$P(\text{Sumar } 12) = \frac{1}{36}$$

La probabilidad más alta es la de sumar 7 siendo su probabilidad $P(\text{Sumar } 7) = \frac{6}{36} = \boxed{\frac{1}{6} \simeq 0.16}$