	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS II**	**EJERCICIO** **Nº Páginas: 2**

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.
2.- CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

a) Obtener todas las soluciones del sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \end{cases}$ **(1 punto)**

b) Determinar todos los a, $b\in\mathbb{R}$ para que $x = 5$, $y = -2$, $z = -2$ sea solución del sistema

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \\ ax+2ay+bz=b \end{cases}$$

¿Para cuáles de esos valores la solución del sistema es única? **(1 punto)**

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ a & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, con $a\in\mathbb{R}-\{0\}$.

a) Calcular la matriz C, siendo $c_{11}=2$, tal que $AC=B$. **(1 punto)**

b) Si $D=B^tA$ siendo B^t la traspuesta de B, determinar los valores de a para los que D tiene matriz inversa. **(1 punto)**

E3.- (Geometría)

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=-1+t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$, y $r_2 \equiv \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{2}$.

a) Razonar si existe un plano perpendicular a r_2 que contenga a r_1. **(1 punto)**
b) Calcular la recta con vector director perpendicular a los de las rectas r_1 y r_2 y que contiene al punto (1,0,0). **(1 punto)**

E4.- (Geometría)

Sea r la recta que pasa por los puntos (1, 0, –1) y (0, 1, 1).

a) Determinar el plano que contiene a la recta r y al punto $P = (0,0,1)$. **(1 punto)**

b) Calcular la distancia de la recta r al punto $P = (0,0,1)$. **(1 punto)**

E5.- (Análisis)

Sea

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & si \quad x<1 \\ \ln(x) & si \quad x\geq 1 \end{cases}$$

a) Estudiar su continuidad y derivabilidad en $x = 1$. **(1 punto)**

b) Estudiar sus asíntotas verticales y horizontales. **(1 punto)**

E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=x^2(x+3)$, determinar su dominio de definición, puntos de corte de su gráfica con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. **(2 puntos)**

E7.- (Análisis)

Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(x^2)}{x^3+4x^2}$. **(1 punto)**

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(x)\cos^3(x)dx$ **(1 punto)**

E8.- (Análisis)

Dadas las funciones $f(x)=-x^2$ y $g(x)=x^3$.

a) Comprobar que las gráficas de dichas funciones en $[-1,0]$ sólo se cortan para $x=-1$ y $x=0$. Demostrar que en $[-1,0]$ $g(x)\geq f(x)$ **(1 punto)**

b) Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de dichas funciones. **(1 punto)**

E9- (Probabilidad y estadística)

Sean A, B y C sucesos de un experimento aleatorio con probabilidades $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,4$ y $P(C)=0,5$ tales que A y B son independientes y A y C son incompatibles. Calcular las probabilidades $P(A\cap B), P(A\cap C)$, $P(A\cap\overline{C})$, $P(A\cup B)$ y $P(\overline{A}\cup\overline{B})$ siendo $\overline{A}, \overline{B}$ y $\overline{C}$ los sucesos complementarios de A, B y C respectivamente. **(2 puntos)**

E10.- (Probabilidad y estadística)

De las camionetas que recogen los envases reciclados de una localidad el 45% son de la marca C1, el 30% de la marca C2 y el 25% de la marca C3. La probabilidad de que una camioneta se averíe es: 0,02 si es de la marca C1, 0,05 si es de la marca C2 y 0,04 si es de la marca C3.

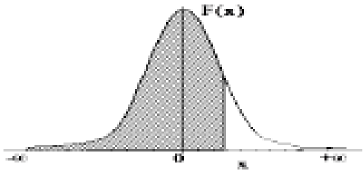
a) Indicar las 6 probabilidades que aparecen en el enunciado **(0,6 puntos)**

b) Si se selecciona una de esas camionetas al azar ¿qué probabilidad tiene de averiarse? **(0,7 puntos)**

c) Suponiendo que una de esas camionetas se ha averiado, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido una camioneta de la marca C3? **(0,7 puntos)**

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES

E1.- (Álgebra)

a) Obtener todas las soluciones del sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \end{cases}$ **(1 punto)**

b) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{R}$ para que $x = 5$, $y = -2$, $z = -2$ sea solución del sistema

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \\ ax+2ay+bz=b \end{cases}$$

¿Para cuáles de esos valores la solución del sistema es única? **(1 punto)**

a)

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y-z \\ x+2y-z=3 \end{cases} \Rightarrow 1-y-z+2y-z=3 \Rightarrow y-2z=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=2+2z \Rightarrow x=1-(2+2z)-z=-1-3z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=-1-3\lambda \\ y=2+2\lambda \ , \ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}}$$

b) Sustituimos los valores de $x = 5$, $y = -2$, $z = -2$ en el sistema.

$$\begin{cases} 5-2-2=1 \\ 5+2(-2)-(-2)=3 \\ 5a-4a-2b=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=1 \\ 3=3 \\ a=3b \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=3b}$$

Los valores buscados son $a=3b, b\in\mathbb{R}$.

El sistema queda $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \\ 3bx+6by+bz=b \end{cases}$

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3b & 6b & b \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3b & 6b & b \end{vmatrix} = 2b-3b+\cancel{6b}-\cancel{6b}-b+6b=4b$$

$$|A|=0 \Rightarrow 4b=0 \Rightarrow b=0$$

Si $b \neq 0$ el determinante de A es no nulo y su rango es 3. Al igual que el rango de la matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3b & 6b & b & b \end{pmatrix}$ e igual que el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

Si $b = 0$ entonces el rango de A es menor de 3 y la solución del sistema, si la hay, no es única.

Para que $x = 5$, $y = -2$, $z = -2$ sea solución del sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \\ ax+2ay+bz=b \end{cases}$ y además sea su única solución debe ser $a = 3b, b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$.

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & a\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ a & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, con $a\in\mathbb{R}-\{0\}$.

a) Calcular la matriz C, siendo $c_{11}=2$, tal que $AC=B$. **(1 punto)**

b) Si $D=B^tA$ siendo B^t la traspuesta de B, determinar los valores de a para los que D tiene matriz inversa. **(1 punto)**

a) Para que sea posible el producto AC y el resultado tenga las mismas dimensiones que B la matriz C debe ser de dimensiones 2×2.

$$\left.\begin{array}{l} C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\\ c_{11}=2\end{array}\right\}\Rightarrow C=\begin{pmatrix}2 & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$$

$$AC=B\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & a\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ a & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2+c_{21} & c_{12}+c_{22}\\ ac_{21} & ac_{22}\\ 2+c_{21} & c_{12}+c_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ a & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2+c_{21}=3\rightarrow\boxed{c_{21}=1}\\ c_{12}+c_{22}=-1\\ ac_{21}=a\rightarrow\{a\neq 0\}\rightarrow c_{21}=1\\ ac_{22}=0\rightarrow\{a\neq 0\}\rightarrow\boxed{c_{22}=0}\end{cases}\Rightarrow c_{12}+0=-1\Rightarrow\boxed{c_{12}=-1}\Rightarrow\boxed{C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}$$

b) Hallamos la expresión de la matriz D.

$$B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ a & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}3 & a & 3\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$D=B^tA=\begin{pmatrix}3 & a & 3\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & a\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+3 & 3+a^2+3\\ -1-1 & -1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 6+a^2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|D|=\begin{vmatrix}6 & 6+a^2\\ -2 & -2\end{vmatrix}=-12-(-2)(6+a^2)=-12+12+2a^2=2a^2$$

$$|D|=0\Rightarrow 2a^2=0\Rightarrow a=0$$

La matriz D es invertible para cualquier valor de $a\neq 0$.

E3.- (Geometría)

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = -1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, y $r_2 \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$.

a) Razonar si existe un plano perpendicular a r_2 que contenga a r_1. **(1 punto)**

b) Calcular la recta con vector director perpendicular a los de las rectas r_1 y r_2 y que contiene al punto (1,0,0). **(1 punto)**

a) Estudiamos la posición relativa de las rectas.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = -1+t \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} \overrightarrow{u_1} = (1,2,1) \\ P_1(1,0,-1) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_2} = (3,2,2) \\ Q_2(1,0,0) \end{cases}$$

Las rectas no son paralelas ni coincidentes pues sus vectores directores no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_1} = (1,2,1) \\ \overrightarrow{v_2} = (3,2,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{3} \neq \frac{2}{2} \neq \frac{1}{2}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Estudiamos el valor nulo o no de $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{P_1Q_2}\right]$.

$$\overrightarrow{P_1Q_2} = (1,0,0) - (1,0,-1) = (0,0,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_1} = (1,2,1) \\ \overrightarrow{v_2} = (3,2,2) \\ \overrightarrow{P_1Q_2} = (0,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{P_1Q_2}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2+0+0-0-6-0 = -4 \neq 0$$

Las rectas r_2 y r_1 se cruzan.

Para que pueda existir un plano perpendicular a r_2 que contenga a r_1 los vectores directores de las rectas deben ser perpendiculares.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_1} = (1,2,1) \\ \overrightarrow{v_2} = (3,2,2) \\ \overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{v_2} \rightarrow \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,2,1)(3,2,2) = 0 \Rightarrow 3+4+2 = 9 \neq 0$$

Los vectores directores de las rectas no son perpendiculares y no existe el plano pedido.

b) Si el vector director es perpendicular a los de las rectas r_1 y r_2 nos sirve como vector director de la recta que busco el producto vectorial de los vectores directores de r_1 y r_2.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u_1}=(1,2,1)\\ \overrightarrow{v_2}=(3,2,2)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{v}=\overrightarrow{u_1}\times\overrightarrow{v_2}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=2i+j-4k=(2,1,-4)$$

La recta *t* pedida es la recta que tiene como vector director $\vec{v}=(2,1,-4)$ y que pasa por el punto (1,0,0)**.**

$$t:\begin{cases}\vec{v}=(2,1,-4)\\ (1,0,0)\in t\end{cases}\Rightarrow \boxed{t:\begin{cases}x=1+2\alpha\\ y=\alpha \qquad ,\ \alpha\in\mathbb{R}\\ z=-4\alpha\end{cases}}$$

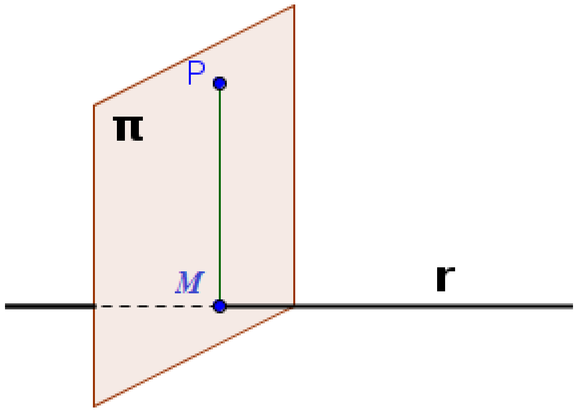
E4.- (Geometría)
Sea r la recta que pasa por los puntos (1, 0, –1) y (0, 1, 1).
a) Determinar el plano que contiene a la recta r y al punto $P = (0,0,1)$. **(1 punto)**
b) Calcular la distancia de la recta r al punto $P = (0,0,1)$. **(1 punto)**

a) **E**l plano que contiene a la recta r y al punto $P = (0,0,1)$ es el plano que contiene a los tres puntos dados en el ejercicio.

$$\pi : \begin{cases} P(0,0,1) \in \pi \\ Q(1,0,-1) \in \pi \\ R(0,1,1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (1,0,-1)-(0,0,1) = (1,0,-2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PR} = (0,1,1)-(0,0,1) = (0,1,0) \\ P(0,0,1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi : z-1+2x=0 \Rightarrow \boxed{\pi : 2x+z-1=0}$$

b) Seguimos el esquema del dibujo para obtener la distancia de la recta r al punto P.



Hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta que pasa por P.

$$r : \begin{cases} Q(1,0,-1) \\ R(0,1,1) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{QR} = (0,1,1)-(1,0,-1) = (-1,1,2) \\ R(0,1,1) \in r \end{cases}$$

$$\pi : \begin{cases} \vec{n} = \overrightarrow{u_r} = (-1,1,2) \\ P(0,0,1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi : -x+y+2z+D=0 \\ P(0,0,1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+D=0 \Rightarrow D=-2 \Rightarrow \boxed{\pi : -x+y+2z-2=0}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l}\pi : -x+y+2z-2=0 \\ r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(-1,1,2) \\ R(0,1,1)\in r\end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases}x=-\alpha \\ y=1+\alpha \\ z=1+2\alpha\end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha+1+\alpha+2+4\alpha-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\alpha=-1 \Rightarrow \alpha=\frac{-1}{6} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{6} \\ y=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6} \\ z=1+2\frac{-1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\end{cases} \Rightarrow \boxed{M\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{2}{3}\right)}$$

La distancia del punto P a la recta es la distancia del punto P al punto M (proyección ortogonal del punto P en la recta *r*).

$$\left.\begin{array}{l}M\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{2}{3}\right) \\ P(0,0,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{MP}=(0,0,1)-\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{-1}{6},\frac{-5}{6},\frac{1}{3}\right)$$

$$d(P,r)=d(P,M)=\left|\overrightarrow{MP}\right|=\sqrt{\left(\frac{-1}{6}\right)^2+\left(\frac{-5}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\boxed{\frac{\sqrt{30}}{6}\simeq 0.913\ unidades}$$

E5.- (Análisis)
Sea

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-x} & si \quad x<1\\ \ln(x) & si \quad x\geq 1\end{cases}$$

a) Estudiar su continuidad y derivabilidad en x = 1. **(1 punto)**
b) Estudiar sus asíntotas verticales y horizontales. **(1 punto)**

a) Comparamos el valor de la función con el de los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\ln(1)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{1}{2-1}=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\ln(x)=\ln(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=1\neq 0=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

La función no es continua en $x = 1$.
Por lo tanto, tampoco es derivable en $x = 1$.

b) El dominio de la función es $\mathbb{R}$.

En $(-\infty,1)$ la función es $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$. El denominador se anula para $x = 2$ que es mayor que 1 y por tanto no está incluido en el dominio.

En $[1,+\infty)$ la función es $f(x)=\ln(x)$ que existe pues $x > 0$.

Asíntota vertical. $x=a$.

Al ser el dominio todos los números reales no tiene asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=\infty$$

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2+\infty}=\frac{1}{\infty}=0$$

$y=0$ es asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$

E6.- (Análisis)
Dada la función $f(x)=x^2(x+3)$, determinar su dominio de definición, puntos de corte de su gráfica con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. **(2 puntos)**

$f(x)=x^2(x+3)=x^3+3x^2$ es una función polinómica, por lo que el Dominio = $\mathbb{R}$.

Puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3+3x^2 \\ Eje\,OY \to x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=0^3+3\cdot 0^2=0 \Rightarrow A(0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2(x+3) \\ Eje\,OX \to y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \to x=0 \to A(0,0) \\ x+3=0 \to x=-3 \to B(-3,0) \end{cases}$$

La función tiene dos puntos de corte con los ejes: A(0, 0) y B(–3, 0).

Intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento usamos la derivada.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2+6x \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2+6x=0 \Rightarrow 3x(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

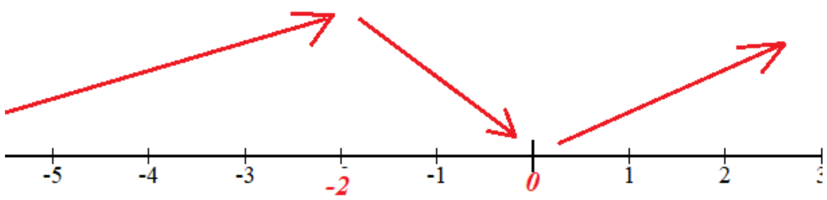
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -2$ y $x = 0$.

En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3)=3(-3)^2+6(-3)=9>0$. La función crece en $(-\infty,-2)$.

En el intervalo $(-2,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=3(-1)^2+6(-1)=-3<0$. La función decrece en $(-2,0)$.

En el intervalo $(0,+\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=3\cdot 1^2+6\cdot 1=9>0$. La función crece en $(0,+\infty)$.

La función sigue el esquema:



La función decrece en $(-2,0)$ y crece en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$.

La función tiene un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 0$.

E7.- (Análisis)
Calcular:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x^2)}{x^3+4x^2}$. **(1 punto)**

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(x)\cos^3(x)\,dx$ **(1 punto)**

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x^2)}{x^3+4x^2} = \frac{sen(0)}{0^3+4\cdot 0^2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L´Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x^2)}{3x^2+8x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cancel{x}\cos(x^2)}{\cancel{x}(3x+8)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x^2)}{3x+8} = \frac{2\cos(0^2)}{3\cdot 0+8} = \frac{2}{8} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

b) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int sen(x)\cos^3(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t=\cos(x) \to dt = -sen(x)\,dx \\ dx = \frac{dt}{-sen(x)} \end{array} \right\} = \int \cancel{sen(x)}\,t^3 \frac{dt}{-\cancel{sen(x)}} =$$

$$= -\int t^3 dt = -\frac{t^4}{4} = -\frac{\cos^4(x)}{4} + K$$

Aplicamos este resultado al calculo de la integral definida pedida.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(x)\cos^3(x)\,dx = \left[-\frac{\cos^4(x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[-\frac{\cos^4\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4}\right] - \left[-\frac{\cos^4(0)}{4}\right] = \boxed{\frac{1}{4}}$$

E8.- (Análisis)

Dadas las funciones $f(x)=-x^2$ y $g(x)=x^3$.

a) Comprobar que las gráficas de dichas funciones en $[-1,0]$ sólo se cortan para $x=-1$ y $x=0$.
Demostrar que en $[-1,0]$ $g(x)\geq f(x)$ **(1 punto)**

b) Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de dichas funciones. **(1 punto)**

a) Averiguamos donde se cortan las gráficas de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2 \\ g(x)=x^3 \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2=x^3 \Rightarrow x^3+x^2=0 \Rightarrow x^2(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \end{cases}$$

Las gráficas de las dos funciones sólo se cortan en $x=-1$ y $x=0$.
Como son funciones continuas basta darle un valor del intervalo $[-1,0]$ para saber que función es mayor en todo el intervalo. Tomamos $x=-0.5$ y comparamos el valor de las funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(-0.5)=-(-0.5)^2=-0.25 \\ g(-0.5)=(-0.5)^3=-0.125 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-0.5)=-0.25<-0.125=g(-0.5) \Rightarrow f(x)\leq g(x)$$

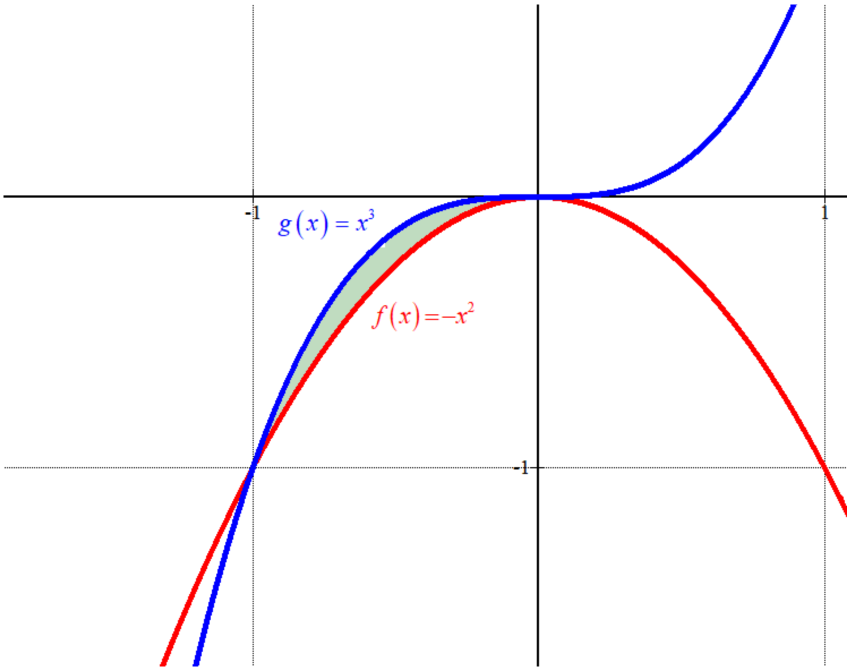
b) El área pedida se obtiene con la integral definida de la diferencia entre las dos funciones entre -1 y 0.

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int g(x)-f(x)\,dx=\int x^3-(-x^2)\,dx=\int x^3+x^2dx=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+K$$

Calculamos el valor del área.

$$Área=\int_{-1}^{0} g(x)-f(x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}=\left[\frac{0^4}{4}+\frac{0^3}{3}\right]-\left[\frac{(-1)^4}{4}+\frac{(-1)^3}{3}\right]=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\boxed{\frac{1}{12}\approx 0.083\ u^2}$$



E9- (Probabilidad y estadística)
Sean A, B y C sucesos de un experimento aleatorio con probabilidades $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}4$ y $P(C) = 0{,}5$ tales que A y B son independientes y A y C son incompatibles. Calcular las probabilidades $P(A\cap B), P(A\cap C)$, $P\left(A\cap \overline{C}\right)$, $P(A\cup B)$ y $P\left(\overline{A}\cup \overline{B}\right)$ siendo $\overline{A}, \overline{B}\, y\, \overline{C}$ los sucesos complementarios de A, B y C respectivamente. **(2 puntos)**

A y B son independientes → $P(A\cap B) = P(A)P(B)$

$$P(A\cap B) = P(A)P(B) = 0.3\cdot 0.4 = \boxed{0.12}$$

A y C son incompatibles → $\boxed{P(A\cap C) = 0}$

$$P(A) = P(A\cap C) + P\left(A\cap \overline{C}\right) \Rightarrow 0.3 = 0 + P\left(A\cap \overline{C}\right) \Rightarrow \boxed{P\left(A\cap \overline{C}\right) = 0.3}$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.3 + 0.4 - 0.12 = \boxed{0.58}$$

$$P\left(\overline{A}\cup \overline{B}\right) = \{Leyes\ de\ Morgan\} = P\left(\overline{A\cap B}\right) = 1 - P(A\cap B) = 1 - 0.12 = \boxed{0.88}$$

E10.- (Probabilidad y estadística)
De las camionetas que recogen los envases reciclados de una localidad el 45% son de la marca C1, el 30% de la marca C2 y el 25% de la marca C3. La probabilidad de que una camioneta se averíe es: 0,02 si es de la marca C1, 0,05 si es de la marca C2 y 0,04 si es de la marca C3.
a) Indicar las 6 probabilidades que aparecen en el enunciado **(0,6 puntos)**
b) Si se selecciona una de esas camionetas al azar ¿qué probabilidad tiene de averiarse? **(0,7 puntos)**
c) Suponiendo que una de esas camionetas se ha averiado, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido una camioneta de la marca C3? **(0,7 puntos)**

a) $P(C1)=0.45;\ P(C2)=0.30;\ P(C3)=0.25$

Si llamamos A al suceso "La camioneta se avería".

$P(A/C1)=0.02;\ P(A/C2)=0.05;\ P(A/C3)=0.04$

b) Nos piden calcular P(A). Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A)=P(A\cap C1)+P(A\cap C2)+P(A\cap C3)=$$

$$=P(C1)P(A/C1)+P(C2)P(A/C2)+P(C3)P(A/C3)=$$

$$=0.45\cdot 0.02+0.30\cdot 0.05+0.25\cdot 0.04=\boxed{0.034}$$

c) Nos piden calcular $P(C3/A)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C3/A)=\frac{P(C3\cap A)}{P(A)}=\frac{P(C3)P(A/C3)}{P(A)}=\frac{0.25\cdot 0.04}{0.034}=\boxed{\frac{5}{17}\simeq 0.2941}$$