GENERALITAT VALENCIANA
Conselleria d'Innovació, Universitats, Ciència i Societat Digital

**COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT**
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

**PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT** PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

| | |
|---|---|
| **CONVOCATÒRIA: JULIOL 2023** | CONVOCATORIA: JULIO 2023 |
| **Assignatura: MATEMÀTIQUES II** | Asignatura: MATEMÁTICAS II |

BAREMO DEL EXAMEN:
**El alumnado contestará solo CUATRO problemas entre los OCHO propuestos.**
*Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.*
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 4 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

**En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.**

**Problema 1.** Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde $a$ es un parámetro real:

a) Discutir el sistema en función del parámetro $a$. (6 puntos)
b) Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado. (4 puntos)

**Problema 2.** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtener:

a) La matriz $M = (A - \alpha I)^2$, donde $\alpha$ es un parámetro real. (6 puntos)
b) El valor de $\alpha$, si existe, para el cual la matriz $M$ es la matriz nula. (4 puntos)

**Problema 3.** Dados los puntos $A=(2,-1,0)$, $B=(1,2,3)$ y $C=(-1,0,0)$:
a) Hallar la ecuación implícita de la recta $r$ que contiene a los puntos $A$ y $B$. (3 puntos)
b) Hallar la ecuación del plano $\pi$ que es perpendicular a la recta anterior $r$ y que contiene al punto $C$. (4 puntos)
c) Calcular la distancia del punto $A$ al plano $\pi$. (3 puntos)

**Problema 4.** Dada la recta $r:(x,y,z)=(1,1,0)+\lambda(-1,-1,2)$ y el plano $\pi: 5x+my+z=2$:
a) Obtener la posición relativa de $r$ y $\pi$ en función de $m$. (6 puntos)
b) Para $m = 1$, calcular el plano $\pi'$ que contiene a $r$ y es perpendicular a $\pi$. (4 puntos)

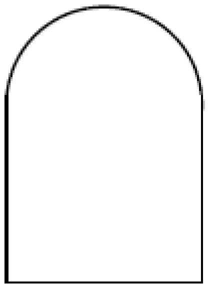
**Problema 5.** Consideramos la función $f\left(x\right)=\frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}$.

a) Comprobar que $x=-\frac{1}{2}$ es una discontinuidad evitable. (2 puntos)

b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (4 puntos)

c) Obtener $\int f\left(x\right)dx$. (4 puntos)

**Problema 6.** Una ventana rectangular está coronada por un semicírculo tal y como se indica en la siguiente figura.



Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 20 metros:

a) Calcular el área de la ventana en función de su anchura $x$. (3 puntos)

b) Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz. (5 puntos)

c) Calcular el valor de dicha área máxima. (2 puntos)

**Problema 7.** Una urna tiene tres bolas verdes, cuatro rojas y cinco amarillas. Todas de igual tamaño.

a) Se extrae una bola de la urna, se mira su color y se devuelve a la urna. Se repite de nuevo, una vez más, esta operación. ¿Cuál es la probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo? ¿Y la probabilidad de que sean distintos? (5 puntos)

b) Se extraen al mismo tiempo tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean de distinto color? (5 puntos)

*Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.*

**Problema 8.** Una empresa tiene dos plantas de producción de teléfonos móviles. La primera planta produce móviles defectuosos con probabilidad 0,02 y la segunda planta con probabilidad 0,06. Al comprar un móvil de esa empresa, la probabilidad de que sea de la primera planta es de 0,7. Compramos un móvil. Se pide determinar**:**

a) La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso. (4 puntos)

b) Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción. (6 puntos)

*Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.*

# Soluciones:

**Problema 1.** Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde $a$ es un parámetro real:

a) Discutir el sistema en función del parámetro $a$. (6 puntos)
b) Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado. (4 puntos)

a) Estudiamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{vmatrix} = 2a(a+2)+2a+2+1-a-(a+1)(a+2)-4 =$$

$$= 2a^2+4a+\cancel{2a}+\cancel{2}+1-a-a^2-\cancel{2a}-a-\cancel{2}-4 = a^2+2a-3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2+2a-3=0 \Rightarrow a = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(-3)}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} = \begin{cases} \dfrac{-2+4}{2} = \boxed{1=a} \\ \dfrac{-2-4}{2} = \boxed{-3=a} \end{cases}$$

Analizamos tres casos distintos.

**CASO 1.** $a \neq 1$ $y$ $a \neq -3$.
En este caso el determinante de A es distinto de cero y el rango de la matriz A es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B e igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

**CASO 2.** $a = 1$.
En este caso el determinante de A es nulo. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -4 & -2 \\ \hline 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \text{ Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 2 \cdot \text{Fila } 3^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -6 & -4 \\ \hline 0 & 0 & -5 & -5 \end{array} \text{ Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3\cdot \text{Fila } 3^a - 5\cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad -15 \quad -15 \\ 0 \quad 0 \quad 15 \quad 15 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \text{ Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{2\;2\;1\;-1}}^{A/B}} \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{0\;0\;0}}_{A}} \end{array}\right)$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

**CASO 3.** $a = -3$.

En este caso el determinante de A es nulo. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 2\cdot \text{Fila } 2^a \\ 2 \quad -2 \quad 1 \quad -1 \\ -2 \quad 6 \quad -4 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 4 \quad -3 \quad -3 \text{ Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 2\cdot \text{Fila } 3^a \\ 2 \quad -2 \quad 1 \quad -1 \\ -2 \quad -2 \quad 2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad -4 \quad 3 \quad -5 \text{ Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -4 \quad 3 \quad -5 \\ 0 \quad 4 \quad -3 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -8 \text{ Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{2\;-2\;1\;-1}}^{A/B}} \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{0\;0\;0}}_{a}} \end{array}\right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz ampliada A/B es 3. Como tienen rangos distintos el sistema es incompatible (no tiene solución).

*Resumiendo*: Si $a \neq 1$ $y$ $a \neq -3$ el sistema es compatible determinado, si $a = -3$ el sistema es incompatible y si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

b) El sistema es compatible indeterminado para $a = 1$.

Lo resolvemos a partir del sistema triangular obtenido en el apartado anterior.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+2y+z=-1 \\ -3z=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 2x+2y+z=-1 \\ \boxed{z=\frac{-3}{-3}=1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+2y+1=-1 \Rightarrow 2x+2y=-2 \Rightarrow x+y=-1 \Rightarrow y=-1-x \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1-\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=1 \end{cases}}$$

**Problema 2.** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtener:

a) La matriz $M=(A-\alpha I)^2$, donde $\alpha$ es un parámetro real. (6 puntos)

b) El valor de $\alpha$, si existe, para el cual la matriz $M$ es la matriz nula. (4 puntos)

a)

$$A-\alpha I=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}-\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3-\alpha \end{pmatrix}$$

$$M=(A-\alpha I)^2=\begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3-\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3-\alpha \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha^2+1-2 & \alpha+\alpha-2 & 2\alpha+2-6+2\alpha \\ \alpha+\alpha-2 & 1+\alpha^2-2 & 2+2\alpha-6+2\alpha \\ -\alpha-1+3-\alpha & -1-\alpha+3-\alpha & -2-2+(3-\alpha)^2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha^2-1 & 2\alpha-2 & 4\alpha-4 \\ 2\alpha-2 & \alpha^2-1 & 4\alpha-4 \\ -2\alpha+2 & -2\alpha+2 & -4+9+\alpha^2-6\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2-1 & 2\alpha-2 & 4\alpha-4 \\ 2\alpha-2 & \alpha^2-1 & 4\alpha-4 \\ -2\alpha+2 & -2\alpha+2 & \alpha^2-6\alpha+5 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} M=\begin{pmatrix} \alpha^2-1 & 2\alpha-2 & 4\alpha-4 \\ 2\alpha-2 & \alpha^2-1 & 4\alpha-4 \\ -2\alpha+2 & -2\alpha+2 & \alpha^2-6\alpha+5 \end{pmatrix} \\ 0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ M=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \alpha^2-1=0\to\alpha^2=1\to\alpha=\sqrt{1}=\begin{cases}\boxed{1=\alpha} \\ -1=\alpha\end{cases} \\ 2\alpha-2=0\to\alpha-1=0\to\boxed{\alpha=1} \\ 4\alpha-4=0\to\alpha-1=0\to\boxed{\alpha=1} \\ -2\alpha+2=0\to\alpha-1=0\to\boxed{\alpha=1} \\ \alpha^2-6\alpha+5=0\to\alpha=\dfrac{6\pm\sqrt{(-6)^2-20}}{2}=\dfrac{6\pm4}{2}= \\ \qquad=\begin{cases}\dfrac{6+4}{2}=6=\alpha \\ \dfrac{6-4}{2}=\boxed{1=\alpha}\end{cases} \end{array}\right.$$

La matriz M es nula solo cuando $\alpha=1$.

**Problema 3.** Dados los puntos $A=(2,-1,0)$, $B=(1,2,3)$ y $C=(-1,0,0)$:
a) Hallar la ecuación implícita de la recta $r$ que contiene a los puntos $A$ y $B$. (3 puntos)
b) Hallar la ecuación del plano $\pi$ que es perpendicular a la recta anterior $r$ y que contiene al punto $C$. (4 puntos)
c) Calcular la distancia del punto $A$ al plano $\pi$. (3 puntos)

a) Hallamos la ecuación de la recta $r$ que pasa por los puntos $A$ y $B$.

$$r:\begin{cases} A(2,-1,0)\in r \\ B(1,2,3)\in r \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} \vec{v}_r=\overrightarrow{AB}=(1,2,3)-(2,-1,0)=(-1,3,3) \\ B(1,2,3)\in r \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r:\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{3} \to 3x-3=-y+2 \\ \frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{3} \to y-2=z-3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{r:\begin{cases} 3x+y-5=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}}$$

b) El plano $\pi$ que es perpendicular a la recta $r$ tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=\vec{v}_r=(-1,3,3) \\ C(-1,0,0)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi:-x+3y+3z+D=0 \\ C(-1,0,0)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow 1+0+0+D=0 \Rightarrow D=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi:-x+3y+3z-1=0}$$

c) Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi:-x+3y+3z-1=0 \\ A(2,-1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow d(A,\pi)=\frac{|-2-3+0-1|}{\sqrt{(-1)^2+3^2+3^2}}=\boxed{\frac{6}{\sqrt{19}}\simeq 1.3765 \text{ unidades}}$$

**Problema 4.** Dada la recta $r:(x,y,z)=(1,1,0)+\lambda(-1,-1,2)$ y el plano $\pi:5x+my+z=2$:
a) Obtener la posición relativa de $r$ y $\pi$ en función de $m$. (6 puntos)
b) Para $m=1$, calcular el plano $\pi'$ que contiene a $r$ y es perpendicular a $\pi$. (4 puntos)

a) El vector director de la recta es $\overrightarrow{v_r}=(-1,-1,2)$ y el vector normal del plano es $\vec{n}=(5,m,1)$.
Para que la recta y el plano sean paralelos o la recta esté contenida en el plano deben ser perpendiculares el vector director de la recta y el normal del plano.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(-1,-1,2)\\ \vec{n}=(5,m,1)\\ \overrightarrow{v_r}\perp\vec{n}\rightarrow\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n}=0\end{array}\right\}\Rightarrow(-1,-1,2)(5,m,1)=0\Rightarrow -5-m+2=0\Rightarrow\boxed{-3=m}$$

Nos planteamos dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

Si $m\neq-3$ el producto escalar no es nulo y por tanto recta y plano no son paralelos, por lo que serán secantes y se cortarán en un punto.

Si $m=-3$ el producto escalar es nulo y por tanto recta y plano son paralelos o la recta está contenida en el plano.
Vemos si el punto A(1,1,0) perteneciente a la recta está en el plano.

$$\left.\begin{array}{l}\pi:5x-3y+z=2\\ ¿A(1,1,0)\in\pi?\end{array}\right\}\Rightarrow ¿5\cdot1-3\cdot1+0=2?\Rightarrow ¿5-3=2?$$

Se cumple la igualdad. El punto A de la recta y todos los puntos de dicha recta pertenecen al plano. Es decir, la recta está contenida en el plano.

*Resumiendo*: Si $m\neq-3$ recta y plano coinciden en un punto. Si $m=-3$ la recta está contenida en el plano.

b) El plano $\pi'$ que contiene a $r$ y es perpendicular a $\pi$ tiene como uno de sus vectores directores el vector normal del plano $\pi$.
Otro vector director del plano $\pi'$ es el vector director de la recta $r$.
Para $m=1$ el plano es $\pi:5x+y+z=2$ y su vector normal es $\vec{n}=(5,1,1)$.
El vector director de la recta $r$ es $\overrightarrow{v_r}=(-1,-1,2)$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\vec{n}=(5,1,1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{v_r}=(-1,-1,2)\\ A(1,1,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\pi:\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z\\ 5 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-2-y+1-5z+z-10y+10+x-1=0\Rightarrow\boxed{\pi':3x-11y-4z+8=0}$$

**Problema 5.** Consideramos la función $f(x)=\dfrac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}$.

a) Comprobar que $x=-\dfrac{1}{2}$ es una discontinuidad evitable. (2 puntos)

b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (4 puntos)

c) Obtener $\int f(x)\,dx$. (4 puntos)

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$f(x)=\frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}\Rightarrow 2x^2+5x+2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4(2)(2)}}{4}=\frac{-5\pm 3}{4}=\begin{cases}\dfrac{-5+3}{4}=-\dfrac{1}{2}=x\\[2mm] \dfrac{-5-3}{4}=-2=x\end{cases}$$

$$\boxed{\text{Dominio } f(x)=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2},-2\right\}}$$

En $x=-\dfrac{1}{2}$ la función presenta una discontinuidad. Comprobamos si es evitable viendo si el limite de la función cuando $x$ tiende a –1/2 tiene un valor finito.

$$\lim_{x\to -1/2} f(x)=\lim_{x\to -1/2}\frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=\lim_{x\to -1/2}\frac{-4x+1}{4x+5}=$$

$$=\frac{-4\left(-\frac{1}{2}\right)+1}{4\left(-\frac{1}{2}\right)+5}=\frac{3}{3}=1$$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(-\frac{1}{2}\right)=\dfrac{-2\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1}{2\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}+2}=\dfrac{0}{0}=\nexists \\ \lim\limits_{x\to -1/2} f(x)=1\end{array}\right\}\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\text{ es una discontinuidad evitable.}$$

**OTRA FORMA DE RESOLVERLO**

Vemos si la función se puede simplificar descomponiendo el numerador y el denominador.

$$2x^2+5x+2=0 \Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4(2)(2)}}{4}=\frac{-5\pm3}{4}=\begin{cases}\dfrac{-5+3}{4}=-\dfrac{1}{2}=x\\ \dfrac{-5-3}{4}=-2=x\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2+5x+2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+2)$$

$$-2x^2+x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-2)(1)}}{-4}=\frac{-1\pm3}{-4}=\begin{cases}\dfrac{-1+3}{-4}=-\dfrac{1}{2}=x\\ \dfrac{-1-3}{-4}=1=x\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x^2+x+1=-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)$$

Si simplificamos la función se evitaría la discontinuidad en $x=-\frac{1}{2}$

$$f(x)=\frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}=\frac{\cancel{2}\cancel{\left(x+\frac{1}{2}\right)}(x-1)}{-\cancel{2}\cancel{\left(x+\frac{1}{2}\right)}(x+2)}=\frac{-(x-1)}{x+2}=\frac{1-x}{x+2}$$

b) Calculamos la derivada.

$$f(x)=\frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}=\frac{1-x}{x+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-1\cdot(x+2)-(1)(1-x)}{(x+2)^2}=\frac{-x-2-1+x}{(x+2)^2}=\frac{-3}{(x+2)^2}$$

Esta derivada no cambia de signo y siempre es negativa.

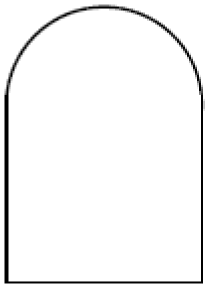
La función es decreciente en todo su dominio $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2},-2\right\}$.

c) Usamos la simplificación de la función vista en el apartado anterior.

$$\int f(x)dx=\int\frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}dx=\int\frac{1-x}{x+2}dx=\int\frac{1+2-2-x}{x+2}dx=\int\frac{3-(x+2)}{x+2}dx=$$

$$=\int\frac{3}{x+2}dx-\int\frac{x+2}{x+2}dx=3\int\frac{1}{x+2}dx-\int dx=\boxed{3\ln|x+2|-x+K}$$

**Problema 6.** Una ventana rectangular está coronada por un semicírculo tal y como se indica en la siguiente figura.



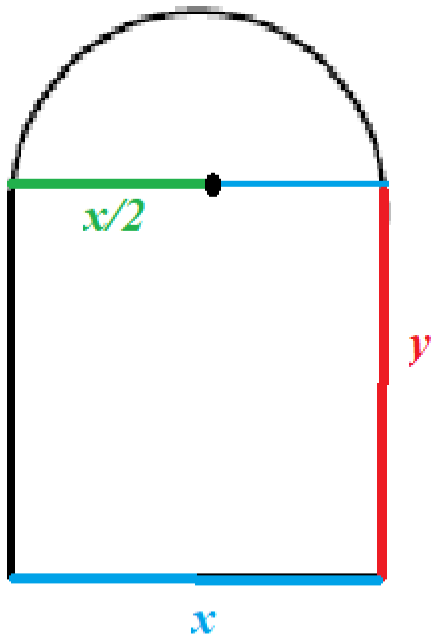
Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 20 metros:

a) Calcular el área de la ventana en función de su anchura $x$. (3 puntos)

b) Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz. (5 puntos)

c) Calcular el valor de dicha área máxima. (2 puntos)

a) Completamos el dibujo de la ventana añadiéndole las longitudes de cada lado.




El perímetro de la ventana es la suma de los tres lados rectos y la longitud de la semicircunferencia.

$$\left.\begin{array}{r} Perímetro = x + 2y + \dfrac{2\pi \frac{x}{2}}{2} = x + 2y + \dfrac{\pi x}{2} \\ Perímetro = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow x + 2y + \frac{\pi x}{2} = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 4y + \pi x = 40 \Rightarrow 4y = 40 - 2x - \pi x \Rightarrow y = \frac{40 - 2x - \pi x}{4} = 10 - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x$$

Buscamos la expresión de la superficie de la ventana. Es la suma del área del rectángulo más el área del semicírculo.

$$\left.\begin{array}{l} A(x,y)=xy+\dfrac{\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{2}=xy+\dfrac{\pi x^2}{8} \\ y=10-\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}x \end{array}\right\} \Rightarrow A(x)=x\left(10-\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}x\right)+\frac{\pi x^2}{8}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x)=10x-\frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{4}x^2+\frac{\pi x^2}{8}=10x-\frac{x^2}{2}-\frac{2\pi}{8}x^2+\frac{\pi x^2}{8}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A(x)=10x-\frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{8}x^2=10x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}\right)x^2}$$

b) Buscamos el máximo de la función área usando la derivada.

$$A(x)=10x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}\right)x^2\Rightarrow A'(x)=10-\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}\right)2x=10-\left(\frac{4+\pi}{8}\right)2x=10-\frac{4+\pi}{4}x$$

$$\left.\begin{array}{r} A'(x)=10-\dfrac{4+\pi}{4}x \\ A'(x)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 10-\frac{4+\pi}{4}x=0\Rightarrow 10=\frac{4+\pi}{4}x\Rightarrow 40=(4+\pi)x\Rightarrow \boxed{x=\frac{40}{4+\pi}\simeq 5.6}$$

Comprobamos si el punto crítico $x=\dfrac{40}{4+\pi}$ es un máximo usando la derivada segunda.

$$A'(x)=10-\frac{4+\pi}{4}x\Rightarrow A''(x)=-\frac{4+\pi}{4}\Rightarrow A''\left(\frac{40}{4+\pi}\right)=-\frac{4+\pi}{4}<0\rightarrow x=\frac{40}{4+\pi}\text{ es máximo}$$

Como la segunda derivada es negativa la función área tiene un máximo para $x=\dfrac{40}{4+\pi}$.

Las dimensiones de la ventana con superficie máxima son $x=\dfrac{40}{4+\pi}\simeq 5.6$ metros en la base, en la parte recta vertical vale $y=10-\dfrac{1}{2}\dfrac{40}{4+\pi}-\dfrac{\pi}{4}\dfrac{40}{4+\pi}=10-\dfrac{20}{4+\pi}-\dfrac{10\pi}{4+\pi}\simeq 2.8$ metros y el semicírculo superior de radio $\dfrac{x}{2}=\dfrac{20}{4+\pi}\simeq 2.8$ metros.

c) Para $x=\dfrac{40}{4+\pi}$ el área tiene un valor de

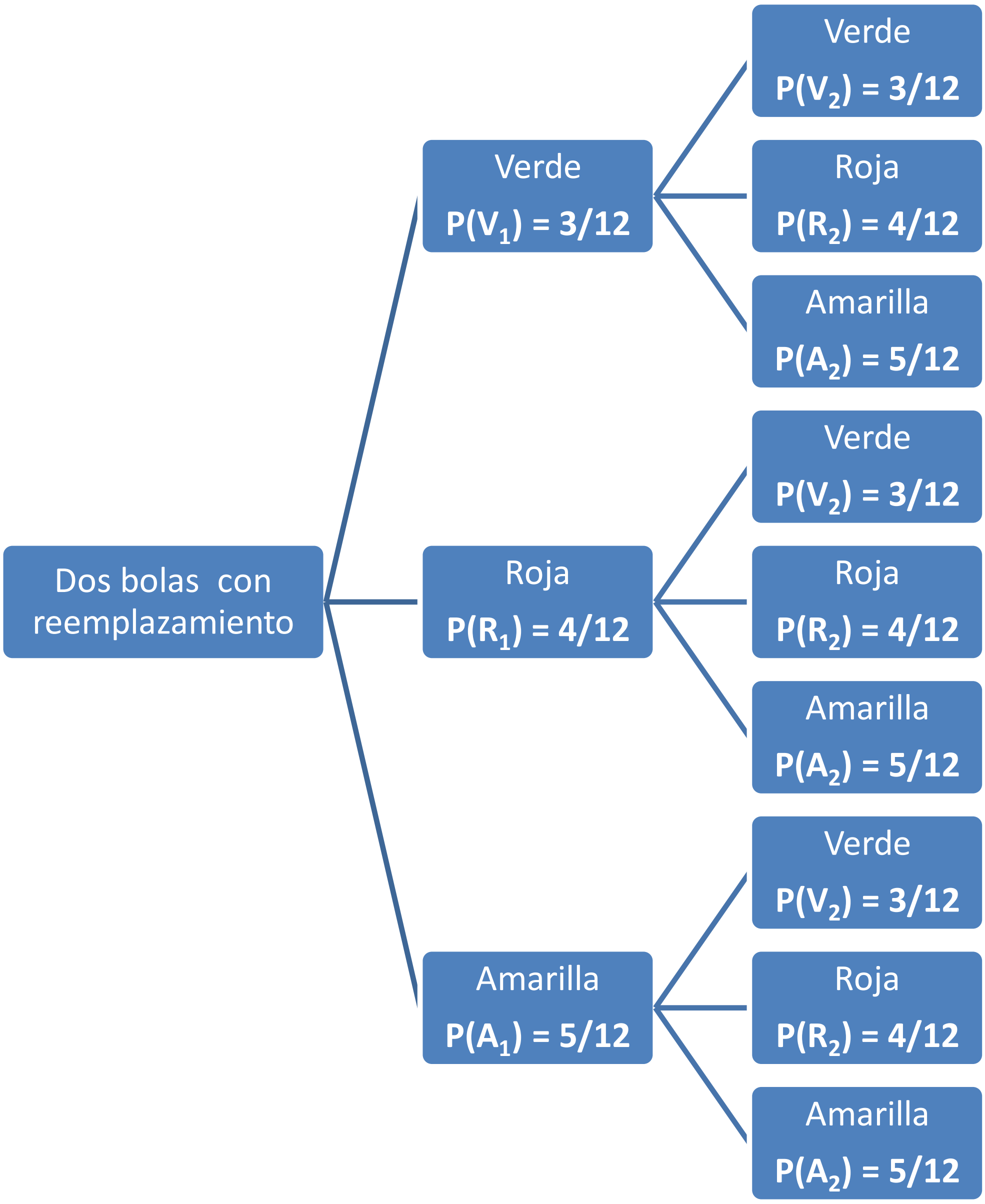
$$A\left(\frac{40}{4+\pi}\right)=10\frac{40}{4+\pi}-\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\left(\frac{40}{4+\pi}\right)^2=\frac{400}{4+\pi}-\frac{4+\pi}{8}\frac{1600}{(4+\pi)^2}=\frac{400}{4+\pi}-\frac{200}{4+\pi}=\frac{200}{4+\pi}\simeq 28.005$$

metros cuadrados.

**Problema 7.** Una urna tiene tres bolas verdes, cuatro rojas y cinco amarillas. Todas de igual tamaño.
a) Se extrae una bola de la urna, se mira su color y se devuelve a la urna. Se repite de nuevo, una vez más, esta operación. ¿Cuál es la probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo? ¿Y la probabilidad de que sean distintos? (5 puntos)
b) Se extraen al mismo tiempo tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean de distinto color? (5 puntos)

*Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.*

Llamamos $V_1$, $V_2$ a sacar bola verde en primera o segunda extracción. Análogamente con las bolas de color rojo o amarillo → $R_1$, $R_2$, $A_1$, $A_2$.
Las probabilidades en la segunda extracción son las mismas que en la primera extracción ya que las extracciones son con reemplazamiento. Además el resultado de la segunda extracción es independiente de lo que haya ocurrido en la primera.
Hacemos un diagrama de árbol.




a) Nos piden calcular $P\left[\left(V_1 \cap V_2\right) \cup \left(R_1 \cap R_2\right) \cup \left(A_1 \cap A_2\right)\right]$.

$$P\left[\left(V_1\cap V_2\right)\cup\left(R_1\cap R_2\right)\cup\left(A_1\cap A_2\right)\right]=P\left(V_1\cap V_2\right)+P\left(R_1\cap R_2\right)+P\left(A_1\cap A_2\right)=$$

$$=P\left(V_1\right)P\left(V_2\right)+P\left(R_1\right)P\left(R_2\right)+P\left(A_1\right)P\left(A_2\right)=\frac{3}{12}\cdot\frac{3}{12}+\frac{4}{12}\cdot\frac{4}{12}+\frac{5}{12}\cdot\frac{5}{12}=\boxed{\frac{25}{72}\simeq 0.3472}$$

Que las dos bolas sean de distinto color es el suceso contrario del que sean del mismo color.

$$P\left(\text{Distinto color}\right)=1-P\left(\text{Mismo color}\right)=1-\frac{25}{72}=\boxed{\frac{47}{72}\simeq 0.6528}$$

b) En este nuevo experimento se puede considerar que se extraen tres bolas sucesivas, pero sin reemplazamiento.
Para que las tres bolas sean de distinto color debe ser una verde, otra roja y otra amarilla.
Existen distintas formas de que esto ocurra
Calculamos la probabilidad de este suceso teniendo en cuenta que en la segunda extracción quedan 11 bolas y en la tercera solo quedan 10 bolas.

$$P\left(\text{Tres bolas de distinto color}\right)=P\left(V_1\cap R_2\cap A_3\right)+P\left(R_1\cap V_2\cap A_3\right)+P\left(V_1\cap A_2\cap R_3\right)+$$

$$+P\left(A_1\cap R_2\cap V_3\right)+P\left(A_1\cap V_2\cap R_3\right)+P\left(R_1\cap A_2\cap V_3\right)=$$

$$=\frac{3}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{5}{10}+\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{5}{10}+\frac{3}{12}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}+\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}+\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{4}{10}+\frac{4}{12}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{3}{10}=$$

$$=6\cdot\left(\frac{3}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{5}{10}\right)=\boxed{\frac{3}{11}\simeq 0.2727}$$

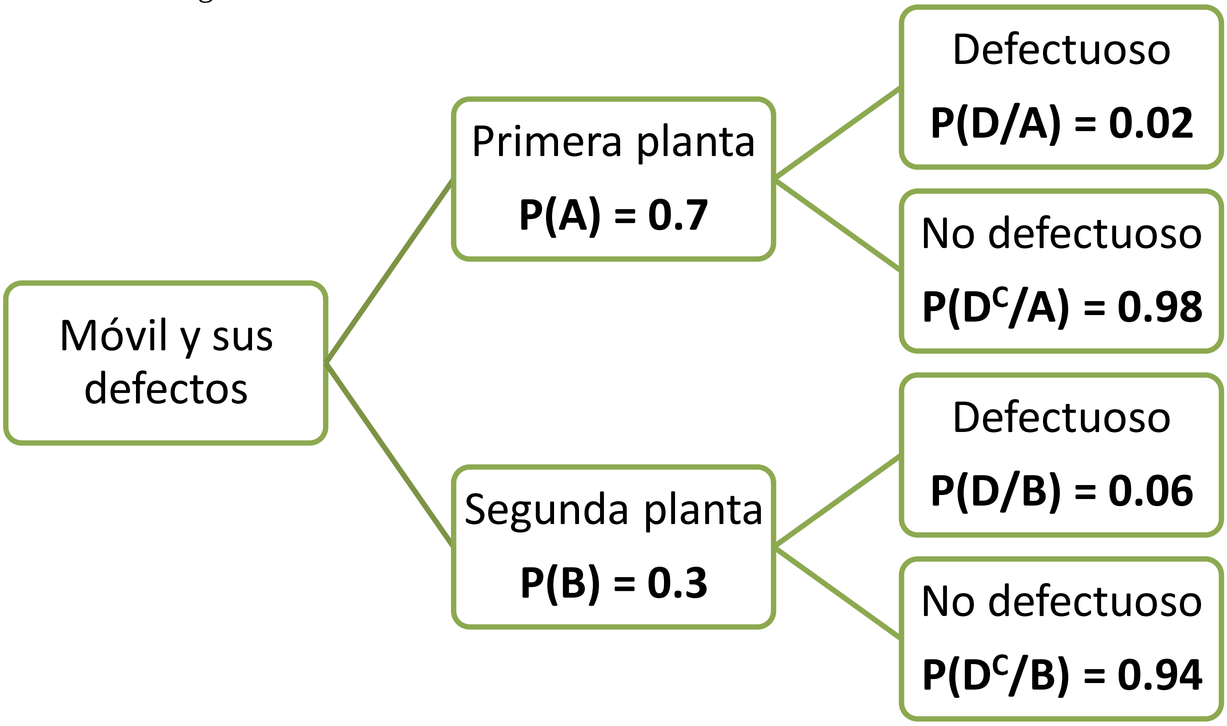
**Problema 8.** Una empresa tiene dos plantas de producción de teléfonos móviles. La primera planta produce móviles defectuosos con probabilidad 0,02 y la segunda planta con probabilidad 0,06. Al comprar un móvil de esa empresa, la probabilidad de que sea de la primera planta es de 0,7. Compramos un móvil. Se pide determinar**:**

a) La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso. (4 puntos)

b) Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción. (6 puntos)

*Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.*

Realizamos un diagrama de árbol.




a) Nos piden calcular $P(B \cap D)$.

$$P(B \cap D) = P(B)P(D/B) = 0.3 \cdot 0.06 = \boxed{0.018}$$

b) Nos piden calcular $P(A/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D/A)}{P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)} =$$

$$= \frac{0.7 \cdot 0.02}{0.7 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.06} = \boxed{\frac{7}{16} = 0.4375}$$