Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2022-2023

Materia: **Matemáticas II** Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos**. El **estudiante ha de elegir 5 preguntas**. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo se tendrán en cuenta las cinco primeras cuestiones/preguntas respondidas. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el sexto lugar.

Se deben justificar todas las respuestas y soluciones.

PREGUNTAS

1. Encontrar la matriz X que verifica $(A-3I)\cdot X = 2I$, donde

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e I es la matriz identidad de orden 3. (2 puntos)

2. Determinar todos los números $x \in \mathbb{R}$ para los que el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

es mayor o igual que cero. (2 puntos)

3. Estudiar la posición relativa de los siguientes planos en función del parámetro b (2 puntos)

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 2 \\ x+(1+b)y-bz = 2b \\ x+by+(1+b)z = 1 \end{array}\right\}$$

4. Hallar un vector de módulo 5 que sea ortogonal a los vectores $\vec{u}=(1,2,0)$ y $\vec{v}=(-1,0,1)$. (2 puntos)

5. a) Comprobar que hay alguna solución positiva y alguna negativa de la ecuación (1.5 puntos)

$$x\cdot\cos(2x)=x^2-1.$$

b) Aproximar la solución positiva encontrada con un error menor que una décima. (0.5 puntos)

6. Calcular a, b y c para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & si\ 0\le x<1 \\ cx & si\ 1\le x\le 4 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 4]. (2 puntos)

7. Calcula la integral (2 puntos)

$$\int \frac{17-x}{x^2+x-6}\,dx\,.$$

8. Hallar el área encerrada por la gráfica de la función $f(x)=x^3-4x$ y el eje de abscisas. (2 puntos)

9. Al 80% de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40% les gusta el balonmano y al 30% les gustan ambos deportes. Si se elige un alumno al azar,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)? (0.5 puntos)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste solo el fútbol? (0.75 puntos)
c) Si sabemos que no le gusta el fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el balonmano? (0.75 puntos)

10. Durante el día de hoy una persona va a escribir 15 mensajes en Facebook. Cada mensaje que escribe tiene errores ortográficos con una probabilidad de 0.3. Calcular:

a) La probabilidad de que escriba exactamente 5 mensajes con errores ortográficos. (0.75 puntos)
b) La probabilidad de que escriba 4 ó más mensajes con errores. (0.75 puntos)
c) La media y la desviación típica de la distribución. (0.5 puntos)

SOLUCIONES

1. Encontrar la matriz X que verifica $(A-3I)\cdot X = 2I$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e I es la matriz identidad de orden 3. (2 puntos)

Comprobamos si la matriz $(A-3I)$ tiene inversa y, en caso afirmativo, la calculamos.

$$A-3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A-3I| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+0+3+0+0 = 3 \neq 0. \text{Existe la inversa}$$

$$(A-3I)^{-1} = \frac{Adj(A-3I)^T}{|A-3I|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A-3I)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos X de la ecuación y averiguamos su expresión.

$$(A-3I)\cdot X = 2I \Rightarrow X = (A-3I)^{-1}2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

2. Determinar todos los números $x \in \mathbb{R}$ para los que el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

es mayor o igual que cero. (2 puntos)

Calculamos la expresión del determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^2 + 0 + 0 + 4x - 0 - 3 = -x^2 + 4x - 3$$

Comprobamos cuando se anula.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-1)(-3)}}{-2} = \frac{-4 \pm 2}{-2} = \begin{cases} \dfrac{-4+2}{-2} = 1 = x \\ \dfrac{-4-2}{-2} = 3 = x \end{cases}$$

Estudiamos el signo antes, entre y después de estos dos valores que anulan el determinante.

En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y el determinante es $-0^2 + 4 \cdot 0 - 3 = -3 < 0$.
En el intervalo $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y el determinante es $-2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1 > 0$.
En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y el determinante es $-4^2 + 4 \cdot 4 - 3 = -3 < 0$.

El determinante es mayor o igual que cero en el intervalo $[1, 3]$.

3. Estudiar la posición relativa de los siguientes planos en función del parámetro b (2 puntos)

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y - z = 2 \\ x+(1+b)y - bz = 2b \\ x + by + (1+b)z = 1 \end{array}\right\}$$

Estudiamos la compatibilidad del sistema y, a partir de ahí, deducimos la posición relativa de los tres planos.

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+b & -b & 2b \\ 1 & b & 1+b & 1 \end{pmatrix}.$$

Estudiamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{vmatrix} = (1+b)(1+b)-2b-b+(1+b)-2(1+b)+b^2 =$$

$$=1+b^2+2b-2b-b+1+b-2-2b+b^2 = 2b^2-2b$$

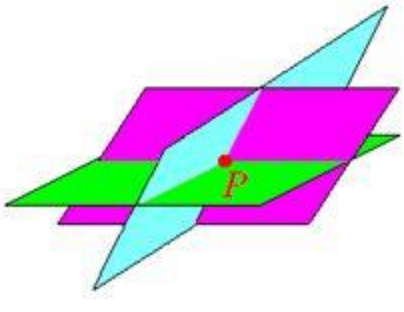
$$|A|=0 \Rightarrow 2b^2-2b=0 \Rightarrow 2b(b-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ b-1=0 \to b=1 \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. Si $b \neq 0$ y $b \neq 1$

El determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

Los tres planos se cortan en un único punto (solución del sistema)



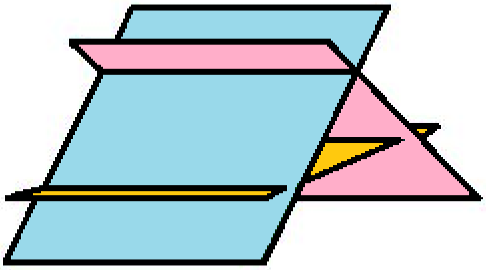
CASO 2. Si $b=0$

El determinante de A es nulo. Vemos como queda el sistema. Intentamos resolverlo.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-z=2 \\ x+y=0 \\ x+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y-z=2 \\ y=-x \\ z=1-x \end{array}\right\} \Rightarrow x+2(-x)-(1-x)=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2x-1+x=2 \Rightarrow -1=2 \text{ ¡Imposible!}$$

El sistema no tiene solución.
Como tienen vectores normales distintos se cortan dos a dos, pero no coinciden los tres en ningún punto.



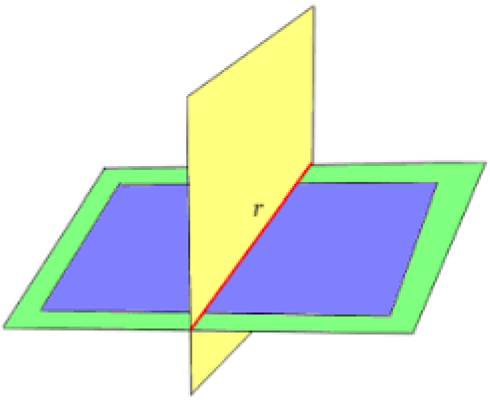
CASO 3. Si $b=1$

El determinante de A es nulo. Vemos como queda el sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=2 \\ x+2y-z=2 \\ x+y+2z=1 \end{array}\right\}$$

El primer y segundo plano son el mismo y se corta con el tercer plano en una recta al tener vectores normales con coordenadas no proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-z=2 \rightarrow \vec{n}=(1,2,-1) \\ x+y+2z=1 \rightarrow \vec{n'}=(1,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{-1}{2}$$



Resumiendo: Si $b \neq 0$ y $b \neq 1$ los tres planos se cortan en un punto, si $b=0$ los planos se cortan dos a dos, pero los tres no coinciden en ningún punto y si $b=1$ dos planos son coincidentes y se cortan con el tercero en una recta.

4. Hallar un vector de módulo 5 que sea ortogonal a los vectores $\vec{u}=(1,2,0)$ y $\vec{v}=(-1,0,1)$. (2 puntos)

Un vector ortogonal a los dos vectores es su producto vectorial.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(1,2,0)\\ \vec{v}=(-1,0,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2i+2k-j=2i-j+2k=(2,-1,2)$$

Si además queremos que su módulo sea 5 dividimos el vector por su módulo (vector unitario) y lo multiplicamos por 5.

$$\vec{w}=(2,-1,2)\Rightarrow \vec{w'}=\frac{(2,-1,2)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{(2,-1,2)}{3}=(2/3,-1/3,2/3)$$

$$\boxed{\overrightarrow{w''}=5(2/3,-1/3,2/3)=(10/3,-5/3,10/3)}$$

El vector pedido es $\overrightarrow{w''}=\left(\frac{10}{3},\frac{-5}{3},\frac{10}{3}\right)$

También cumple los requisitos el vector $\overrightarrow{w'''}=\left(\frac{-10}{3},\frac{5}{3},\frac{-10}{3}\right)$ opuesto al obtenido que tiene el mismo módulo y es ortogonal a los dos vectores $\vec{u}=(1,2,0)$ y $\vec{v}=(-1,0,1)$.

5. a) Comprobar que hay alguna solución positiva y alguna negativa de la ecuación (1.5 puntos)

$$x\cdot\cos(2x)=x^2-1.$$

b) Aproximar la solución positiva encontrada con un error menor que una décima. (0.5 puntos)

a) Para que $x\cdot\cos(2x)=x^2-1$ debe cumplirse que $x^2-1-x\cdot\cos(2x)=0$

Consideramos la función $f(x)=x^2-1-x\cdot\cos(2x)$.

Buscamos valores de la función positivos y negativos.

$$f(-2)=(-2)^2-1-(-2)\cdot\cos(2(-2))=3+2\cos(-4)\simeq 1.69>0$$

$$f(-1)=(-1)^2-1-(-1)\cdot\cos(2(-1))=\cos(-2)\simeq -0.41<0$$

$$f(0)=0^2-1-0\cdot\cos(2\cdot 0)=-1<0$$

$$f(1)=1^2-1-1\cdot\cos(2)=-\cos(2)\simeq 0.41>0$$

$$f(2)=2^2-1-2\cdot\cos(4)=3-2\cos(4)\simeq 4.3>0$$

En el intervalo $[-2,-1]$ la función toma valores de distinto signo y como es continua podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe $c\in(-2,-1)$ tal que *f(c) = 0*.

En el intervalo $[0,1]$ la función toma valores de distinto signo y como es continua podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe $d\in(0,1)$ tal que *f(d) = 0*.

Ya hemos encontrado una solución negativa de la ecuación: $c\in(-2,-1)$ y una solución positiva: $d\in(0,1)$.

b) La solución positiva encontrada es mayor que 0 y menor que 1. El error es de 1 unidad. Valoramos la función en distintos puntos del intervalo hasta aproximarnos más al cambio de signo.

$$f(0.5)=(0.5)^2-1-(0.5)\cdot\cos(2(0.5))\simeq -1.02<0$$

$$f(0.7)=(0.7)^2-1-(0.7)\cdot\cos(2(0.7))\simeq -0.62<0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(0.8)=(0.8)^2-1-(0.8)\cdot\cos(2(0.8))\simeq -0.34<0 \\ \\ f(0.9)=(0.9)^2-1-(0.9)\cdot\cos(2(0.9))\simeq 0.014>0 \end{array}}$$

En el intervalo $(0.8,0.9)$ la función toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo y como es continua podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe $c\in(0.8,0.9)$ tal que *f(c) = 0*. Esta raíz positiva tiene un error menor de 1 décima → $c=0.8....$

6. Calcular a, b y c para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & si\ 0\le x<1 \\ cx & si\ 1\le x\le 4 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 4]. (2 puntos)

El enunciado del teorema de Rolle es:

Sea *f(x)* una función que
1º es **continua** en [a, b],
2º es **derivable** en (a, b),
3º y cumple que *f(a) = f(b)* .
Entonces existe algún punto $c\in(a,b)$ tal que *f ´(c) = 0*.

En el intervalo [0, 4] la función cambia de definición, luego debes hacer que sea continua y derivable en $x = 1$.

La función *f(x)* continua en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1^2+a\cdot 1+b=1+a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2+ax+b=1+a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} cx=c \\ f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{1+a+b=c}$$

La derivada de la función en $\mathbb{R}-\{1\}$ es $f'(x)=\begin{cases} 2x+a & si\ 0\le x<1 \\ c & si\ 1<x\le 4 \end{cases}$.

Para que sea derivable en $x=1$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2x+a=2+a \\ f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} c=c \\ f'(1^-)=f'(1^+) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{2+a=c}$$

También debe cumplirse que *f(0) = f(4)*.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0^2+a\cdot 0+b=b \\ f(4)=4c \\ f(0)=f(4) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b=4c}$$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 1+a+b=c \\ 2+a=c \\ b=4c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1+a+b=c \\ a=c-2 \\ b=4c \end{array}\right\} \Rightarrow 1+c-2+4c=c \Rightarrow 4c=1 \Rightarrow \boxed{c=\frac{1}{4}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=\frac{1}{4}-2=\frac{-7}{4}} \\ \boxed{b=4\frac{1}{4}=1} \end{cases}$$

Los valores buscados son $a=\frac{-7}{4};\ b=1;\ c=\frac{1}{4}$.

6. Calcula la integral (2 puntos)

$$\int \frac{17-x}{x^2+x-6}\,dx\,.$$

Calculamos la integral usando la descomposición en fracciones simples del integrando.

$$x^2+x-6=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-6)}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\begin{cases}\dfrac{-1+5}{2}=2=x\\[2mm] \dfrac{-1-5}{2}=-3=x\end{cases}$$

$$\frac{17-x}{x^2+x-6}=\frac{17-x}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17-x=A(x+3)+B(x-2)\Rightarrow\begin{cases}x=2\rightarrow 17-2=A(5)+B(0)\rightarrow 15=5A\rightarrow A=3\\ x=-3\rightarrow 17+3=A(0)+B(-5)\rightarrow 20=-5B\rightarrow B=-4\end{cases}$$

$$\frac{17-x}{x^2+x-6}=\frac{3}{x-2}-\frac{4}{x+3}$$

Lo aplicamos al cálculo de la integral.

$$\int\frac{17-x}{x^2+x-6}dx=\int\frac{3}{x-2}-\frac{4}{x+3}dx=\int\frac{3}{x-2}dx-\int\frac{4}{x+3}dx=3\int\frac{1}{x-2}dx-4\int\frac{1}{x+3}dx$$

$$\boxed{\int\frac{17-x}{x^2+x-6}dx==3\ln|x-2|-4\ln|x+3|+K}$$

8. Hallar el área encerrada por la gráfica de la función $f(x)=x^3-4x$ y el eje de abscisas. (2 puntos)

Hallamos los puntos de corte de la gráfica de $f(x)=x^3-4x$ y el eje de abscisas ($y=0$ **).**

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-4x \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-4x=0 \Rightarrow x\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-4=0 \to x^2=4 \to x=\sqrt{4}=\pm 2 \end{cases}$$

Existen tres puntos de corte con el eje de abscisas. El recinto del que queremos calcular el área lo dividimos en dos partes y el área de cada una de ellas la determinamos calculando la integral definida correspondiente.

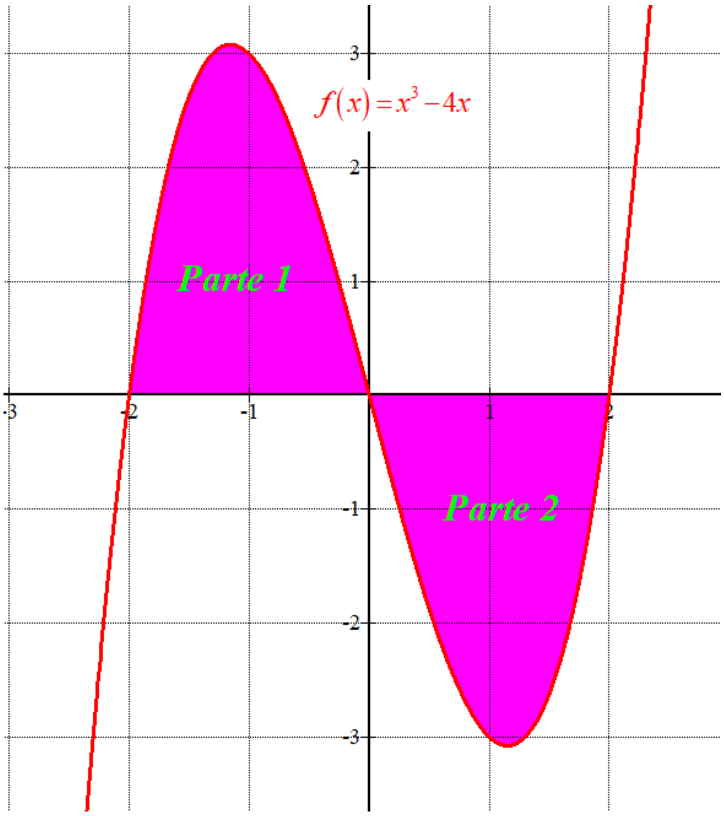
$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx=\int_{-2}^{0} x^3-4x\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}=\left[\frac{0^4}{4}-2\cdot 0^2\right]-\left[\frac{(-2)^4}{4}-2(-2)^2\right]=-4+8=4$$

Área parte 1 = $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$ = 4 unidades cuadradas

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx=\int_{0}^{2} x^3-4x\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{0}^{2}=\left[\frac{2^4}{4}-2\cdot 2^2\right]-\left[\frac{0^4}{4}-2(0)^2\right]=4-8=-4$$

Área parte 2 = $\left|\int_{0}^{2} f(x)\,dx\right|=\left|-4\right|$ = 4 unidades cuadradas

El área pedida es la suma del área de las dos partes, es decir, 8 unidades cuadradas.



9. Al 80% de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40% les gusta el balonmano y al 30% les gustan ambos deportes. Si se elige un alumno al azar,
a) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)? (0.5 puntos)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste solo el fútbol? (0.75 puntos)
c) Si sabemos que no le gusta el fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el balonmano? (0.75 puntos)

Realizamos una tabla de contingencia para aclarar los porcentajes.

	Gusta el balonmano	No le gusta el balonmano	TOTALES
Gusta el fútbol	**30**		**80**
No le gusta el fútbol			
TOTALES	**40**		**100**

Completamos la tabla.

	Gusta el balonmano	No le gusta el balonmano	TOTALES
Gusta el fútbol	**30**	**50**	**80**
No le gusta el fútbol	**10**	**10**	**20**
TOTALES	**40**	**60**	**100**

a)

$$P(le\ guste\ alguno\ de\ los\ dos\ deportes) = \frac{30+50+10}{100} = \boxed{0.9}$$

b)

$$P(le\ guste\ solo\ el\ fútbol) = P(le\ guste\ el\ fútbol\ y\ no\ le\ guste\ el\ balonmano) = \frac{50}{100} = \boxed{0.5}$$

c) Al 20 % no le gusta el fútbol y al 10 % no le gusta el fútbol y si le gusta el balonmano.

$$P(\text{Le guste el balonmano/No le gusta el fútbol}) =$$

$$= \frac{P(\text{Le guste el balonmano y no le gusta el fútbol})}{P(\text{No le gusta el balonmano})} = \frac{10}{20} = \boxed{0.5}$$

10. Durante el día de hoy una persona va a escribir 15 mensajes en Facebook. Cada mensaje que escribe tiene errores ortográficos con una probabilidad de 0.3. Calcular:
a) La probabilidad de que escriba exactamente 5 mensajes con errores ortográficos. (0.75 puntos)
b) La probabilidad de que escriba 4 ó más mensajes con errores. (0.75 puntos)
c) La media y la desviación típica de la distribución. (0.5 puntos)

X = Número de mensajes con errores ortográficos de 15.

Es una variable binomial pues son 15 repeticiones independientes entre sí y cada mensaje es con error o sin error (dicotomía). Como $n = 15$ y p = P(mensaje con error) = 0.3 tenemos que $X = B(15, 0.3)$.

a) Nos piden calcular $P(X=5)$.

$$P(X=5)=\binom{15}{5}\cdot 0.3^5\cdot 0.7^{10}\simeq \boxed{0.2061}$$

b) Nos piden calcular $P(X\geq 4)$.

$$P(X\geq 4)=1-P(X<4)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\right]=$$

$$=1-\left[\binom{15}{0}\cdot 0.3^0\cdot 0.7^{15}+\binom{15}{1}\cdot 0.3^1\cdot 0.7^{14}+\binom{15}{2}\cdot 0.3^2\cdot 0.7^{13}+\binom{15}{3}\cdot 0.3^3\cdot 0.7^{12}\right]\simeq \boxed{0.7031}$$

c) Es una distribución binomial y su media es $\mu=np=15\cdot 0.3=4.5$ y la desviación típica es $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{15\cdot 0.3\cdot 0.7}\simeq 1.7748$