Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2022-2023

Materia: **Matemáticas II** Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos**. El **estudiante ha de elegir 5 preguntas**. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo se tendrán en cuenta las cinco primeras cuestiones/preguntas respondidas. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el sexto lugar.

Se deben justificar todas las respuestas y soluciones.

PREGUNTAS

1. Estudiar el rango de la matriz $A-\lambda\cdot I$ según los valores de $\lambda\in\mathbb{R}$, donde $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden 3. (2 puntos)

2. Discutir el sistema para los distintos valores del parámetro $a\in\mathbb{R}$ (1.5 puntos)

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2a-1\\ 2x+y+az=a\\ x+ay+z=1\end{array}\right\}$$

Resolver el sistema en el caso $a = 1$. (0.5 puntos)

3. Sean los vectores $\vec{u}=(0,0,2)$, $\vec{v}=(1,1,0)$, $\vec{w}=(2,-1,1)$

a) ¿Son $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ linealmente independientes? (0.5 puntos)

b) Calcular el área del triángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (0.75 puntos)

c) Calcular un vector de módulo uno perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$. (0.75 puntos)

4. Dados los puntos $A=(0,0,2)$ y $B=(1,1,0)$ y la recta $r\equiv\begin{cases}x=1\\ y=z\end{cases}$.

a) Hallar el plano que contiene a r y es paralelo al vector $\overrightarrow{AB}$. (1.25 puntos)

b) Hallar la distancia del punto A a la recta r. (0.75 puntos)

5. Calcular los coeficientes a, b, c y d del polinomio $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$, sabiendo que cumple todas las condiciones siguientes: (2 puntos)

- $p(x)$ tiene un máximo relativo en $x=-1$, y
- la gráfica de $p(x)$ tiene un punto de inflexión en (0, 0), y
- la recta tangente a la gráfica de $p(x)$ en $x = 2$ tiene pendiente 3.

6. Encontrar los valores de a y b para que la función $f(x)=\begin{cases}2x^2+ax+b & si\ x\le 1\\ \ln(x) & si\ x>1\end{cases}$ sea continua en $x=1$ y su gráfica pase por el punto (–1, 5) (2 puntos)

7. Determinar la primitiva *F(x)* de la función $f(x)=(x+1)e^{x+1}$ que cumple *F(0) = –1.* (2 puntos)

.

8. Calcular el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=x^3-3x^2+3x$ y $g(x)=x$. (2 puntos)

9. Un club de montaña organiza dos tipos de actividades para sus afiliados. El 70% de ellos se apuntan a escalada, el 60% a barranquismo y el 45% de ellos practica las dos. Si se elige al azar un afiliado,

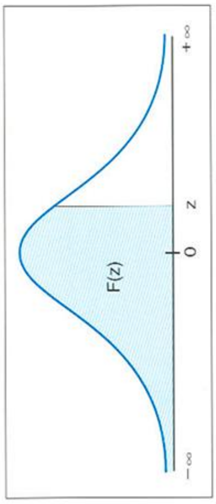
a) Calcular la probabilidad de que practique sólo una de las dos actividades. (0.75 puntos)
b) Calcular la probabilidad de que no practique ninguna. (0.5 puntos)
c) Sabiendo que hace barranquismo, calcular la probabilidad de que no haga escalada. (0.75 puntos)

10. Los relojes de cierta marca tienen una vida útil que se ajusta a una distribución normal de media 10 años y desviación típica de 2 años. Si compramos un reloj de esta marca:

a) Calcular la probabilidad de que dure entre 9 y 12 años. (1 punto)
b) ¿Cuánto tiempo tendrá que durar el reloj si queremos que el 90% de los relojes de esa marca duren menos que el nuestro? (1 punto)

Tabla de distribución normal *N(0,1)*

F(z)= P(Z ≤ z)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES

1. Estudiar el rango de la matriz $A-\lambda\cdot I$ según los valores de $\lambda\in\mathbb{R}$, donde $A=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&1\\-1&0&3\end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden 3. (2 puntos)

$$A-\lambda\cdot I=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&1\\-1&0&3\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda&0&2\\1&-\lambda&1\\-1&0&3-\lambda\end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene rango 1, 2 o 3.
Veamos cuando se anula el determinante de $A-\lambda\cdot I$.

$$|A-\lambda\cdot I|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&2\\1&-\lambda&1\\-1&0&3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(3-\lambda)+2\lambda=3\lambda^2-\lambda^3-2\lambda$$

$$|A-\lambda\cdot I|=0\Rightarrow-\lambda^3+3\lambda^2-2\lambda=0\Rightarrow\lambda\left(-\lambda^2+3\lambda-2\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ -\lambda^2+3\lambda-2=0\rightarrow\lambda=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-1)(-2)}}{-2}=\dfrac{-3\pm1}{-2}=\begin{cases}\dfrac{-3+1}{-2}=1=\lambda\\ \dfrac{-3-1}{-2}=2=\lambda\end{cases}\end{cases}$$

Distinguimos cuatro situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. Si $\lambda\neq0$, $\lambda\neq1$ y $\lambda\neq2$.
En este caso el determinante de $A-\lambda\cdot I$ es no nulo y por tanto su rango es 3.

CASO 2. Si $\lambda=0$.
En este caso el determinante de $A-\lambda\cdot I$ es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A-0\cdot I=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&1\\-1&0&3\end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera fila y la segunda columna → $\begin{vmatrix}1&1\\-1&3\end{vmatrix}=3+1=4\neq0$.

El rango de la matriz $A-0\cdot I=A$ es el rango de la matriz A y es 2.

CASO 3. Si $\lambda=1$.
En este caso el determinante de $A-\lambda\cdot I$ es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A-1\cdot I=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera fila y la segunda columna → $\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2+1=3\neq 0$.

El rango de la matriz $A-I$ es 2.

CASO 4. Si $\lambda=2$.

En este caso el determinante de $A-\lambda\cdot I$ es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A-2\cdot I=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera fila y la segunda columna → $\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1+1=2\neq 0$.

El rango de la matriz $A-2\cdot I$ es 2.

Resumiendo: Si $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq 1$ y $\lambda\neq 2$ el rango de $A-\lambda\cdot I$ es 3. Si $\lambda=0$, $\lambda=1$ o $\lambda=2$ el rango de $A-\lambda\cdot I$ es 2.

2. Discutir el sistema para los distintos valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ (1.5 puntos)

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{array}\right\}$$

Resolver el sistema en el caso *a = 1.* (0.5 puntos)

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Estudiamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}=1+a+2a-1-2-a^2=-a^2+3a-2$$

$$|A|=0 \Rightarrow -a^2+3a-2=0 \Rightarrow a=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-1)(-2)}}{-2}=\frac{-3\pm 1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-3-1}{-2}=\boxed{2=a} \\ \dfrac{-3+1}{-2}=\boxed{1=a} \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$

El determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $a=1$

El determinante de A es nulo. El rango de A no es 3. Estudiamos su rango utilizando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ \hline 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}_{A} \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array}}^{A/B} \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, al igual que el rango de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3).

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. Si $a=2$

El determinante de A es nulo. El rango de A no es 3. Estudiamos su rango utilizando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\2&1&2&2\\1&2&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{llll}\text{Fila }2^{a}-2\cdot\text{Fila }1^{a}\\2&1&2&2\\-2&-2&-2&-6\\\hline 0&-1&0&-4\rightarrow\text{Nueva Fila }2^{a}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{llll}\text{Fila }3^{a}-\text{Fila }1^{a}\\1&2&1&1\\-1&-1&-1&-3\\\hline 0&1&0&-2\rightarrow\text{Nueva Fila }3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&-1&0&-4\\0&1&0&-2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{llll}\text{Fila }3^{a}+\text{Fila }2^{a}\\0&1&0&-2\\0&-1&0&-4\\\hline 0&0&0&-6\rightarrow\text{Nueva Fila }3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\overbrace{\begin{pmatrix}\underbrace{\begin{matrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&0\end{matrix}}_{A}&\begin{matrix}3\\-4\\-6\end{matrix}\end{pmatrix}}^{A/B}$$

El rango de A es 2, pero el rango de A/B es 3. Tienen rangos distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

Resumiendo: Si $a\neq 1\ y\ a\neq 2$ el sistema es compatible determinado, si $a=1$ el sistema es compatible indeterminado y si $a=2$ el sistema es incompatible.

Resolvemos el sistema para *a = 1*. Sabemos que el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos a partir del sistema triangular equivalente obtenido en el estudio anterior.

$$A/B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+z=1\\-y-z=-1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y+z=1\\y=1-z\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+1-z+z=1\Rightarrow x=0\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x=0\\y=1-\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}\\z=\lambda\end{cases}}$$

3. Sean los vectores $\vec{u}=(0,0,2)$, $\vec{v}=(1,1,0)$, $\vec{w}=(2,-1,1)$

a) ¿Son $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ linealmente independientes? (0.5 puntos)

b) Calcular el área del triángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (0.75 puntos)

c) Calcular un vector de módulo uno perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$. (0.75 puntos)

a) Los vectores son linealmente independientes si su producto mixto $\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right]$ es no nulo.

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right]=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0+0-2-4+0+0=-6\neq 0$$

Los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes.

b) El área del triángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\dfrac{\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=(0,0,2) \\ \vec{v}=(1,1,0) \end{array}\right\}\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2j-2i=(-2,2,0)$$

$$\acute{A}rea=\frac{\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|}{2}=\frac{\sqrt{(-2)^2+2^2+0^2}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\boxed{\sqrt{2}\ unidades\ cuadradas}$$

c) Un vector perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es su producto vectorial. Este vector lo dividimos por su módulo y obtenemos el vector unitario $\vec{t}$ pedido.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}=(1,1,0) \\ \vec{w}=(2,-1,1) \end{array}\right\}\Rightarrow \vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=i-k-2k-j=i-j-3k=(1,-1,-3)$$

$$\left|\vec{v}\times\vec{w}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{11}$$

$$\boxed{\vec{t}=\frac{\vec{v}\times\vec{w}}{\left|\vec{v}\times\vec{w}\right|}=\frac{(1,-1,-3)}{\sqrt{11}}=\left(\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{-1}{\sqrt{11}},\frac{-3}{\sqrt{11}}\right)}$$

$$\boxed{\vec{t'}=\frac{-\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)}{\left|\vec{v}\times\vec{w}\right|}=\frac{(-1,1,3)}{\sqrt{11}}=\left(\frac{-1}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{11}}\right)}$$

4. Dados los puntos $A=(0,0,2)$ y $B=(1,1,0)$ y la recta $r\equiv\begin{cases}x=1\\ y=z\end{cases}$.

a) Hallar el plano que contiene a r y es paralelo al vector $\overrightarrow{AB}$. (1.25 puntos)

b) Hallar la distancia del punto A a la recta r. (0.75 puntos)

a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r.

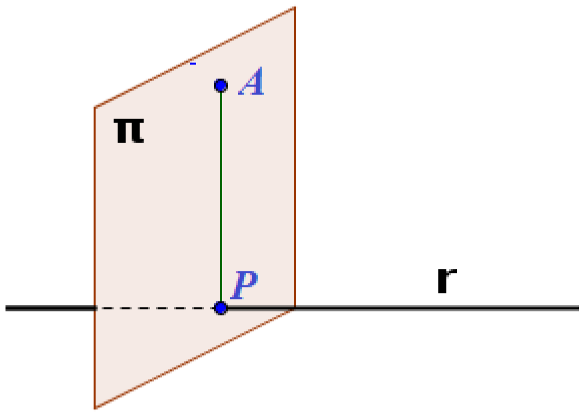
$$r\equiv\begin{cases}x=1\\ y=z\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=1\\ y=\lambda\\ z=\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(0,1,1)\\ P_r(1,0,0)\end{cases}$$

El plano que contiene a r y es paralelo al vector $\overrightarrow{AB}$ tiene como vectores directores el vector director de la recta r y el vector $\overrightarrow{AB}$ y contiene el punto P_r de la recta r.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1,1,0)-(0,0,2)=(1,1,-2)\\ \vec{v}=\overrightarrow{v_r}=(0,1,1)\\ P_r(1,0,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\pi:\begin{vmatrix}x-1 & y & z\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1+z-y+2x-2=0\Rightarrow\boxed{\pi:3x-y+z-3=0}$$

b) Seguimos el esquema del dibujo para obtener el valor de la distancia pedida.



Hallamos la ecuación del plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\overrightarrow{v_r}=(0,1,1)\\ A(0,0,2)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi:y+z+D=0\\ A(0,0,2)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 0+2+D=0\Rightarrow D=-2\Rightarrow\boxed{\pi:y+z-2=0}$$

Hallamos el punto P de intersección de plano y recta.

$$\left.\begin{array}{l}\pi:y+z-2=0\\ r\equiv\begin{cases}x=1\\ y=z\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow z+z-2=0\Rightarrow 2z=2\Rightarrow z=1\Rightarrow y=1\Rightarrow\boxed{P(1,1,1)}$$

La distancia del punto A a la recta es la distancia del punto A al punto P, es decir, el módulo del vector $\overrightarrow{AP}$.

$$\overrightarrow{AP} = (1,1,1) - (0,0,2) = (1,1,-1)$$

$$D(A,r) = D(A,P) = \left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \boxed{\sqrt{3}\ unidades}$$

5. Calcular los coeficientes *a*, *b*, *c* y *d* del polinomio $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$, sabiendo que cumple todas las condiciones siguientes: (2 puntos)

- $p(x)$ tiene un máximo relativo en $x=-1$, y
- la gráfica de $p(x)$ tiene un punto de inflexión en (0, 0), y
- la recta tangente a la gráfica de $p(x)$ en $x=2$ tiene pendiente 3.

Si $p(x)$ tiene un máximo relativo en $x=-1 \rightarrow p'(-1)=0$ y $p''(-1)<0$

Si la gráfica de $p(x)$ tiene un punto de inflexión en (0, 0) $\rightarrow p(0)=0$; $p''(0)=0$

Si la recta tangente a la gráfica de $p(x)$ en $x=2$ tiene pendiente 3 $\rightarrow p'(2)=3$

Aplicamos todas estas condiciones a nuestra función.

$$\left.\begin{array}{l} p(x)=a+bx+cx^2+dx^3 \\ p(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a+0=0 \Rightarrow \boxed{a=0}$$

$$p(x)=bx+cx^2+dx^3 \Rightarrow p'(x)=b+2cx+3dx^2 \Rightarrow p''(x)=2c+6dx$$

$$\left.\begin{array}{l} p''(x)=2c+6dx \\ p''(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2c+0=0 \Rightarrow \boxed{c=0} \Rightarrow p'(x)=b+3dx^2$$

$$\left.\begin{array}{l} p'(x)=b+3dx^2 \\ p'(-1)=0 \\ p'(2)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} b+3d=0 \\ b+12d=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-3d \\ b+12d=3 \end{cases} \Rightarrow -3d+12d=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9d=3 \Rightarrow \boxed{d=\frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{b=-3\frac{1}{3}=-1}$$

Los valores buscados son $a=0$, $b=-1$, $c=0$, $d=\frac{1}{3}$.

6. Encontrar los valores de a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} 2x^2+ax+b & si \ x\leq 1 \\ \ln(x) & si \ x>1 \end{cases}$ sea continua en $x=1$ y su gráfica pase por el punto (–1, 5) (2 puntos)

La función $f(x)$ continua en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=2\cdot 1^2+a\cdot 1+b=2+a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2x^2+ax+b=2+a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x)=\ln 1=0 \\ f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{2+a+b=0}$$

La función pasa por el punto (–1, 5) → $f(-1) = 5$.

$$f(-1)=5 \Rightarrow 2(-1)^2+a(-1)+b=5 \Rightarrow 2-a+b=5 \Rightarrow \boxed{b=a+3}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 2+a+b=0 \\ b=a+3 \end{array}\right\} \Rightarrow 2+a+a+3=0 \Rightarrow 2a=-5 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-5}{2}} \Rightarrow \boxed{b=\frac{-5}{2}+3=\frac{1}{2}}$$

Los valores buscados son $a=\frac{-5}{2};\ b=\frac{1}{2}$.

7. Determinar la primitiva *F(x)* de la función $f(x)=(x+1)e^{x+1}$ que cumple *F(0) = –1*. (2 puntos)

Calculamos la integral usando el método de integración por partes.

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int (x+1)e^{x+1}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x+1\rightarrow du=dx\\ dv=e^{x+1}dx\rightarrow v=\int e^{x+1}dx=e^{x+1}\end{array}\right\}=$$

$$=(x+1)e^{x+1}-\int e^{x+1}dx=(x+1)e^{x+1}-e^{x+1}=(x+1-1)e^{x+1}=xe^{x+1}+K$$

De todas las primitivas de la función debemos encontrar la que cumple *F(0) = –1*.

$$\left.\begin{array}{l}F(x)=xe^{x+1}+K\\ F(0)=-1\end{array}\right\}\Rightarrow -1=0\cdot e^{0+1}+K\Rightarrow K=-1\Rightarrow \boxed{F(x)=xe^{x+1}-1}$$

8. Calcular el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=x^3-3x^2+3x$ y $g(x)=x$. (2 puntos)

Hallamos los puntos de corte de las gráficas de $f(x)=x^3-3x^2+3x$ y $g(x)=x$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-3x^2+3x \\ g(x)=x \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-3x^2+3x=x \Rightarrow x^3-3x^2+2x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(x^2-3x+2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x^2-3x+2=0 \rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(2)}}{2}=\dfrac{3\pm 1}{2}=\begin{cases} \dfrac{3+1}{2}=\boxed{2=x} \\ \dfrac{3-1}{2}=\boxed{1=x} \end{cases} \end{cases}$$

Existen tres puntos de corte con el eje de abscisas. El recinto del que queremos calcular el área lo dividimos en dos partes y el área de cada una de ellas la determinamos calculando la integral definida correspondiente.

$$\int_0^1 f(x)-g(x)\,dx=\int_0^1 x^3-3x^2+3x-x\,dx=\int_0^1 x^3-3x^2+2x\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1=\left[\frac{1^4}{4}-1^3+1^2\right]-\left[\frac{0^4}{4}-0^3+0^2\right]=\boxed{\frac{1}{4}}$$

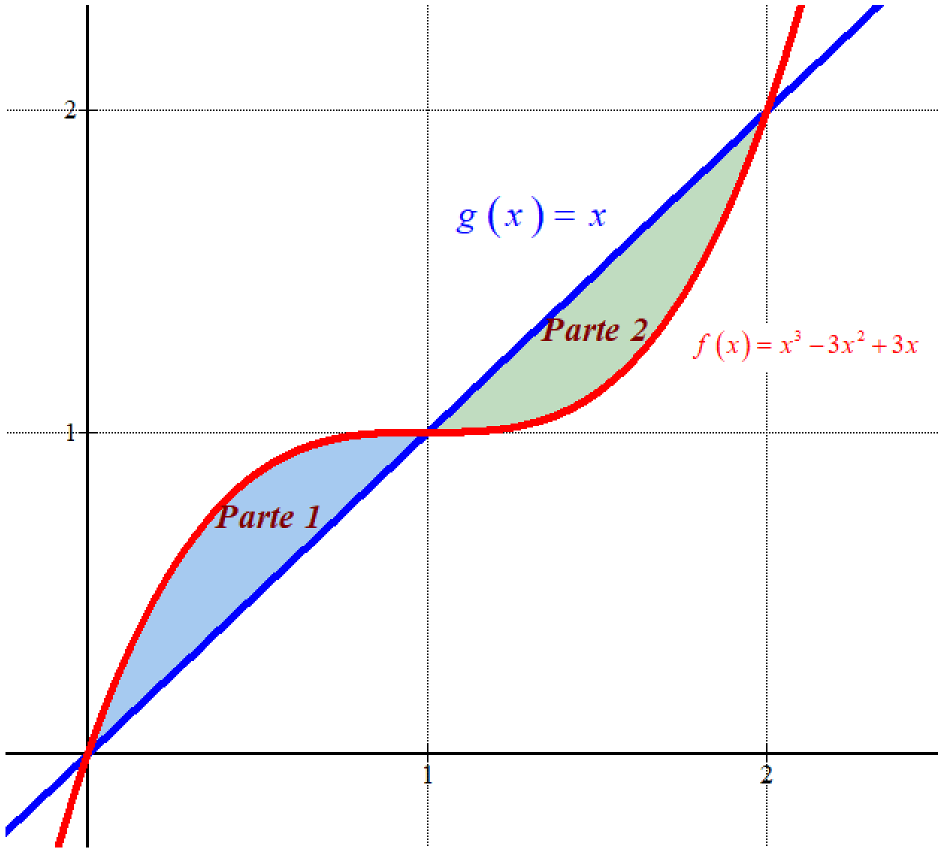
Área parte 1 = $\int_0^1 f(x)-g(x)\,dx=\dfrac{1}{4}$ unidades cuadradas

$$\int_1^2 f(x)-g(x)\,dx=\int_1^2 x^3-3x^2+3x-x\,dx=\int_1^2 x^3-3x^2+2x\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_1^2=\left[\frac{2^4}{4}-2^3+2^2\right]-\left[\frac{1^4}{4}-1^3+1^2\right]=4-8+4-\frac{1}{4}=\boxed{-\frac{1}{4}}$$

Área parte 2 = $\left|\int_1^2 f(x)-g(x)\,dx\right|=\left|-\dfrac{1}{4}\right|=\dfrac{1}{4}$ unidades cuadradas

El área pedida es la suma del área de las dos partes, es decir, $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}=0.5$ unidades cuadradas.


2
1
1
2
$g(x) = x$
Parte 1
Parte 2
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

9. Un club de montaña organiza dos tipos de actividades para sus afiliados. El 70% de ellos se apuntan a escalada, el 60% a barranquismo y el 45% de ellos practica las dos. Si se elige al azar un afiliado,
a) Calcular la probabilidad de que practique sólo una de las dos actividades. (0.75 puntos)
b) Calcular la probabilidad de que no practique ninguna. (0.5 puntos)
c) Sabiendo que hace barranquismo, calcular la probabilidad de que no haga escalada. (0.75 puntos)

Realizamos una tabla de contingencia.

	Barranquismo (B)	No barranquismo (B^C)	
Escalada (A)	45		70
No escalada (A^C)			
	60		100

Completamos la tabla.

	Barranquismo (B)	No barranquismo (B^C)	
Escalada (A)	45	**25**	70
No escalada (A^C)	**15**	**15**	**30**
	60	**40**	100

a) Sabemos que hay un 15 por ciento de afiliados que practica barranquismo y no escalada y un 25 % de afiliados que practica escalada y no barranquismo.
Aplicamos la regla de Laplace

$$P(\text{practique solo una de las dos actividades}) = \frac{25+15}{100} = \boxed{0.4}$$

b) Hay un 15 % de afiliados que no practica ninguna de las dos actividades.

$$P(\text{No pracica ni escalada ni barranquismo}) = \frac{15}{100} = \boxed{0.15}$$

c) El 60 % practica barranquismo y sólo el 15 % practica barranquismo y no escalada.
Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{No practique escalada/practica barranquismo}) =$$

$$= \frac{P(\text{Practica barranquismo y no practica escalada})}{P(\text{Practica barranquismo})} = \frac{15}{60} = \boxed{0.25}$$

10. Los relojes de cierta marca tienen una vida útil que se ajusta a una distribución normal de media 10 años y desviación típica de 2 años. Si compramos un reloj de esta marca:
a) Calcular la probabilidad de que dure entre 9 y 12 años. (1 punto)
b) ¿Cuánto tiempo tendrá que durar el reloj si queremos que el 90% de los relojes de esa marca duren menos que el nuestro? (1 punto)

X = Vida útil de un reloj de cierta marca en años.
X = N(10, 2)

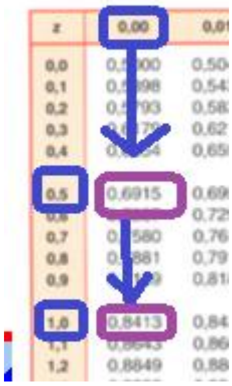
a) Nos piden calcular $P(9 \leq X \leq 12)$.

$$P(9 \leq X \leq 12) = P(X \leq 12) - P(X \leq 9) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{12-10}{2}\right) - P\left(Z \leq \frac{9-10}{2}\right) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -0.5) =$$

$$= P(Z \leq 1) - P(Z \geq 0.5) = P(Z \leq 1) - \left[1 - P(Z \leq 0.5)\right] =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 0.8413 - [1 - 0.6915] = \boxed{0.5328}$$

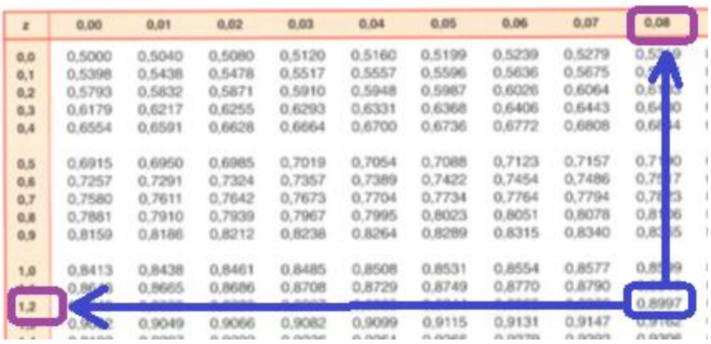


z	0,00	0,01
0,0	[illegible]	[illegible]
0,1	[illegible]	[illegible]
0,2	[illegible]	[illegible]
0,3	[illegible]	[illegible]
0,4	[illegible]	[illegible]
0,5	0,6915	[illegible]
0,6	[illegible]	[illegible]
0,7	[illegible]	[illegible]
0,8	[illegible]	[illegible]
0,9	[illegible]	[illegible]
1,0	0,8413	[illegible]
1,1	[illegible]	[illegible]
1,2	0,8849	[illegible]

b) Nos piden hallar el valor de "a" para qué $P(X \leq a) = 0.9$.

$$P(X \leq a) = 0.9 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-10}{2}\right) = 0.9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{a-10}{2} = 1.28 \Rightarrow a = 1.28 \cdot 2 + 10 = \boxed{12.56\ años}$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	[illegible]
[illegible]	[illegible]	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	[illegible]
1,2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,8997
[illegible]	[illegible]	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	[illegible]