Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II | Model 1

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos entre 4.

Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

P1.– Considera la matriz M y el vector b,

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ a+1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad b=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Respectivamente.

(a) **[3 puntos]** Indica para que valores de a la matriz M es invertible.
(b) **[3 puntos]** Calcula, para todos los valores de a que sea posible, la inversa de M.
(c) **[4 puntos]** Calcula, para el caso $a = 0$, el vector x tal que $Mx=b$

P2.– Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \; y \; B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sea O la matriz nula de orden 2x2.

(a) **[4 puntos]** Calcula todas las matrices X tales que $AX-X=B$.
(b) **[3 puntos]** Encuentra una matriz Y diferente de O tal que $(A-B)Y=O$
(c) **[3 puntos]** Indica todas las matrices que cumplen la igualdad $AZ=O$

P3.– Considera el plano $\pi: 2x+3y+z-6=0$.

(a) **[3 puntos]** Determina los vértices del triángulo determinado por la intersección del plano con los ejes de coordenadas.
(b) **[3 puntos]** Calcula el área del triángulo anterior.
(c) **[4 puntos]** Sea A el vértice del triángulo sobre el eje de abscisas (eje OX). Calcula la recta perpendicular al plano que pasa por A.

P4.– Sean a y b dos constantes reales no nulas.
Consideremos el plano $\pi: x+ay-2z=3$ y la recta

$$r:\begin{cases} x+bz=1, \\ y=0. \end{cases}$$

(a) **[4 puntos]** ¿Para qué valores de a y b la recta r es perpendicular al plano π? Para estos casos concretos, calcula el punto de corte entre r y π, y calcula o justifica cuál es la distancia de la recta al plano.
(b) **[3 puntos]** ¿Para qué valores de a y b la recta r es paralela al plano π?
(c) **[3 puntos]** ¿Existen algunos valores de a y b para los cuales la recta r está contenida en el plano π?

P5.– La cantidad de agua infectada por una bacteria se espera que siga la función $f(x)=e^{-x}+0.15x+1$ siendo $x\geq 0$ los días de infección y *f(x)* las toneladas de agua infectada.

(a) **[4 puntos]** ¿Cuántas toneladas de agua había inicialmente infectadas por la bacteria? ¿Hacia qué valor tiende la cantidad de agua infectada? Interpreta los resultados.

(b) **[4 puntos]** ¿Em qué momento hay menos cantidad de agua infectada? ¿Cuántas toneladas hay en ese momento?

(c) **[2 puntos]** ¿Hay algún momento en el que el agua no esté infectada? Justifica la respuesta.

P6.– [10 puntos] Representa la región comprendida entre la curva $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = 0$ y $x = 7$. Calcula su área.

P7.– Un espacio muestral contiene dos sucesos A y B. Sabiendo que $P(A\cap B)=0.3$, $P(A/B)=P(B/A)$ y $P(A^C)=0.4$ (siendo A^C el suceso complementario), calcula:

(a) **[2 puntos]** $P(B/A)$.

(b) **[3 puntos]** $P(B)$.

(c) **[3 puntos]** $P(A^C\cap B^C)$.

(d) **[2 puntos]** ¿Son A y B sucesos independientes?

P8.– El peso de los recién nacidos sigue una distribución normal de media $\mu=3.1kg$ y desviación típica σ desconocida. Se sabe que sólo el 30.5% de los recién nacidos pesa más de 3.8 kg. Calcula, redondeando los resultados a 4 decimales,

(a) **[4 puntos]** ¿Cuál es la desviación típica?

(b) **[3 puntos]** Suponiendo que $\sigma=1.3725$, ¿cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2.7 kg?

(c) **[3 puntos]** Suponiendo que $\sigma=1.3725$, ¿cuál es la probabilidad de qué un recién nacido pese entre 2.7 y 3.5 kg?

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.

SOLUCIONES

P1.– Considera la matriz M y el vector b,

$$M=\begin{pmatrix}2 & 1 & a\\ a+1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad y \quad b=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

Respectivamente.
(a) **[3 puntos]** Indica para que valores de *a* la matriz *M* es invertible.
(b) **[3 puntos]** Calcula, para todos los valores de *a* que sea posible, la inversa de M.
(c) **[4 puntos]** Calcula, para el caso *a* = *0*, el vector *x* tal que $Mx=b$

(a) La matriz M es invertible si su determinante es distinto de 0.

$$|M|=\begin{vmatrix}2 & 1 & a\\ a+1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0+1+a(a+1)-0-(a+1)-2=1+a^2+a-a-1-2=a^2-2$$

$$|M|=0\Rightarrow a^2-2=0\Rightarrow a^2=2\Rightarrow \boxed{a=\pm\sqrt{2}}$$

La matriz M es invertible para cualquier valor de *a* distinto de $-\sqrt{2}$ y de $+\sqrt{2}$.

(b) Si $a\neq\pm\sqrt{2}$ calculamos su inversa.

$$|M|=a^2-2\neq 0$$

$$M^{-1}=\frac{Adj\left(M^T\right)}{|M|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & a+1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}}{a^2-2}=\frac{1}{a^2-2}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ a & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a+1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\ a & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & a+1\\ a & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a+1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & a+1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$M^{-1}=\frac{1}{a^2-2}\begin{pmatrix}-1 & -1+a & 1\\ -a & 2-a & -2+a(a+1)\\ a+1 & -1 & -a-1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{M^{-1}=\frac{1}{a^2-2}\begin{pmatrix}-1 & a-1 & 1\\ -a & 2-a & a^2+a-2\\ a+1 & -1 & -a-1\end{pmatrix}}$$

(c) Para *a* = *0* la matriz M queda $M=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Para este valor la matriz M tiene inversa:

$$M^{-1} = \frac{1}{0^2-2}\begin{pmatrix} -1 & 0-1 & 1 \\ -0 & 2-0 & 0^2+0-2 \\ 0+1 & -1 & -0-1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Despejamos “x” de la ecuación $Mx = b$.

$$Mx = b \Rightarrow x = M^{-1}b$$

Realizamos el producto y obtenemos la expresión de “x”.

$$x = M^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2-1/2 \\ -1+1 \\ 1/2+1/2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

P2.– Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\ y\ B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Y sea O la matriz nula de orden 2x2.

(a) **[4 puntos]** Calcula todas las matrices X tales que $AX-X=B$.

(b) **[3 puntos]** Encuentra una matriz Y diferente de O tal que $(A-B)Y=O$

(c) **[3 puntos]** Indica todas las matrices que cumplen la igualdad $AZ=O$

(a) Despejamos la matriz X de la ecuación matricial.

$$AX-X=B \Rightarrow (A-I)X=B \Rightarrow X=(A-I)^{-1}B$$

Comprobamos que la matriz A – I tiene inversa y la calculamos.

$$A-I=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$|A-I|=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4\neq 0$$

$$(A-I)^{-1}=\frac{Adj(A-I)^T}{|A-I|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}}{4}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/4\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de X.

$$X=(A-I)^{-1}B=\begin{pmatrix}1/2 & 1/4\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\frac{1}{4} & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}\frac{5}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}}$$

(b)

$$A-B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

Como su determinante es nulo no existe su inversa.

La matriz Y es de orden 2x2. La matriz es $Y=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

$$(A-B)Y=O \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ -a+2c & -b+2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-2c=0 \\ b-2d=0 \\ -a+2c=0 \\ -b+2d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2c \\ a=2c \\ \\ b=2d \\ b=2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2c \\ b=2d \end{cases} \Rightarrow \boxed{Y=\begin{pmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{pmatrix}}$$

Una solución no nula del problema puede ser tomando $c = 1$ y $d = 1$ → $Y=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) La matriz Z debe ser de orden 2x2. Consideramos $Z=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$AZ=O \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a-c & 3b-d \\ 3c & 3d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a-c=0 \\ 3b-d=0 \\ 3c=0 \to \boxed{c=0} \\ 3d=0 \to \boxed{d=0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a=0 \to \boxed{a=0} \\ 3b=0 \to \boxed{b=0} \end{cases} \Rightarrow \boxed{Z=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

La única matriz solución de la ecuación es la matriz nula.

P3.– Considera el plano $\pi: 2x+3y+z-6=0$.

(a) **[3 puntos]** Determina los vértices del triángulo determinado por la intersección del plano con los ejes de coordenadas.

(b) **[3 puntos]** Calcula el área del triángulo anterior.

(c) **[4 puntos]** Sea A el vértice del triángulo sobre el eje de abscisas (eje OX). Calcula la recta perpendicular al plano que pasa por A.

(a) Hallamos los puntos de corte con cada uno de los ejes de coordenadas.

$$A \rightarrow \begin{cases} \pi: 2x+3y+z-6=0 \\ OX: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 2x-6=0 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3 \Rightarrow \boxed{A(3,0,0)}$$

$$B \rightarrow \begin{cases} \pi: 2x+3y+z-6=0 \\ OY: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 3y-6=0 \Rightarrow 3y=6 \Rightarrow y=2 \Rightarrow \boxed{B(0,2,0)}$$

$$C \rightarrow \begin{cases} \pi: 2x+3y+z-6=0 \\ OZ: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow z-6=0 \Rightarrow z=6 \Rightarrow \boxed{C(0,0,6)}$$

(b) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0,2,0)-(3,0,0) = (-3,2,0) \\ \overrightarrow{AC} = (0,0,6)-(3,0,0) = (-3,0,6) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12i + 6k + 18j = (12,18,6)$$

$$Área = \frac{\sqrt{12^2+18^2+6^2}}{2} = \boxed{3\sqrt{14} \simeq 11.22 \text{ unidades cuadradas}}$$

(c) La recta perpendicular al plano tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: 2x+3y+z-6=0 \Rightarrow \vec{n} = (2,3,1)$$

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = \vec{n} = (2,3,1) \\ A(3,0,0) \in r \end{cases} \Rightarrow \boxed{r: \begin{cases} x = 3+2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

P4.– Sean a y b dos constantes reales no nulas.
Consideremos el plano $\pi: x+ay-2z=3$ y la recta

$$r:\begin{cases} x+bz=1, \\ y=0. \end{cases}$$

(a) **[4 puntos]** ¿Para qué valores de a y b la recta r es perpendicular al plano π? Para estos casos concretos, calcula el punto de corte entre r y π, y calcula o justifica cuál es la distancia de la recta al plano.
(b) **[3 puntos]** ¿Para qué valores de a y b la recta r es paralela al plano π?
(c) **[3 puntos]** ¿Existen algunos valores de a y b para los cuales la recta r está contenida en el plano π?

(a) La recta r es perpendicular al plano π cuando las coordenadas del vector director de la recta son proporcionales a las coordenadas del vector normal del plano.

$$r:\begin{cases} x+bz=1, \\ y=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-bz \\ y=0. \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=1-b\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,0,0) \\ \overrightarrow{v_r}=(-b,0,1) \end{cases}$$

$$\pi: x+ay-2z=3 \Rightarrow \vec{n}=(1,a,-2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(-b,0,1) \\ \vec{n}=(1,a,-2) \\ r\perp\pi \to \overrightarrow{v_r} \parallel \vec{n} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-b}{1}=\frac{0}{a}=\frac{1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-b}{1}=\dfrac{1}{-2} \to 2b=1 \to \boxed{b=\dfrac{1}{2}} \\ \dfrac{0}{a}=\dfrac{1}{-2} \to \boxed{0=a} \end{cases}$$

Con los valores $a=0;\ b=\dfrac{1}{2}$ recta y plano son perpendiculares.

Hallamos el punto P de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x-2z=3 \\ r:\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}z=1, \\ \boxed{y=0}. \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=3+2z \\ 2x+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(3+2z)+z=2 \Rightarrow 6+4z+z=2 \Rightarrow 5z=-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z=\frac{-4}{5}} \Rightarrow \boxed{x=3+2\frac{-4}{5}=\frac{15-8}{5}=\frac{7}{5}} \Rightarrow \boxed{P\left(\frac{7}{5},0,\frac{-4}{5}\right)}$$

El punto de corte es $P\left(\dfrac{7}{5},0,\dfrac{-4}{5}\right)$.

No tiene sentido hablar de distancia entre recta y plano pues la recta corta al plano en el punto P.

(b) La recta r es paralela al plano π cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares y si un punto cualquiera de la recta no pertenece al plano.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=(-b,0,1)\\ \vec{n}=(1,a,-2)\\ r\parallel\pi\rightarrow\vec{v_r}\perp\vec{n}\rightarrow\vec{v_r}\cdot\vec{n}=0\end{array}\right\}\Rightarrow(-b,0,1)(1,a,-2)=0\Rightarrow -b+0-2=0\Rightarrow\boxed{b=-2}$$

Recta y plano son paralelos o la recta está contenida en el plano.

$$\left.\begin{array}{l}¿P_r(1,0,0)\in\pi?\\ \pi: x+ay-2z=3\end{array}\right\}\Rightarrow ¿1=3?\ \text{¡No es cierto!}$$

El punto de la recta no pertenece al plano y la recta es paralela al plano.

La recta y el plano son paralelos cuando $b=-2$. El valor de a puede ser cualquier valor real.

(c) El plano debe contener a todos los puntos de la recta. En particular debe contener al punto $P_r(1,0,0)$ que pertenece a la recta.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+ay-2z=3\\ ¿P_r(1,0,0)\in\pi?\end{array}\right\}\Rightarrow 1=3\ \text{¡Imposible!}$$

No existen valores que hagan que la recta esté contenida en el plano.

P5.– La cantidad de agua infectada por una bacteria se espera que siga la función $f(x)=e^{-x}+0.15x+1$ siendo $x\geq 0$ los días de infección y *f(x)* las toneladas de agua infectada.

(a)**[4 puntos]** ¿Cuántas toneladas de agua había inicialmente infectadas por la bacteria? ¿Hacia qué valor tiende la cantidad de agua infectada? Interpreta los resultados.
(b)**[4 puntos]** ¿Em qué momento hay menos cantidad de agua infectada? ¿Cuántas toneladas hay en ese momento?
(c)**[2 puntos]** ¿Hay algún momento en el que el agua no esté infectada? Justifica la respuesta.

(a) Nos piden hallar *f(0)* → $f(0)=e^{-0}+0.15\cdot 0+1=2$. Inicialmente hay infectadas 2 toneladas de agua.
Calculamos $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}+0.15x+1=e^{-\infty}+0.15\cdot(+\infty)+1=0+\infty+1=+\infty$$

Significa que con el paso del tiempo acaba infectándose toda el agua.

(b) Buscamos el mínimo de la función *f(x)*.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=-e^{-x}+0.15 \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -e^{-x}+0.15=0 \Rightarrow e^{-x}=0.15 \Rightarrow -x=\ln 0.15 \Rightarrow x=-\ln 0.15 \simeq 1.9$$

$$f''(x)=e^{-x} \Rightarrow f''(-\ln 0.15)=e^{\ln 0.15}=0.15>0$$

La función presenta un mínimo relativo en $x = 1.9$.

$$f(-\ln 0.15)=e^{\ln 0.15}+0.15(-\ln(0.15))+1=0.15-0.15\ln 0.15+1=1.15-0.15\ln(0.15)\simeq 1.43$$

En el momento de mínima cantidad de agua infectada hay, aproximadamente, 1.43 toneladas de agua infectada.

(c) Estudiamos si la función se anula.

$f(x)=e^{-x}+0.15x+1=\dfrac{1}{e^x}+0.15x+1$. Esta función para $x\geq 0$ siempre es positiva. Nunca se anula.

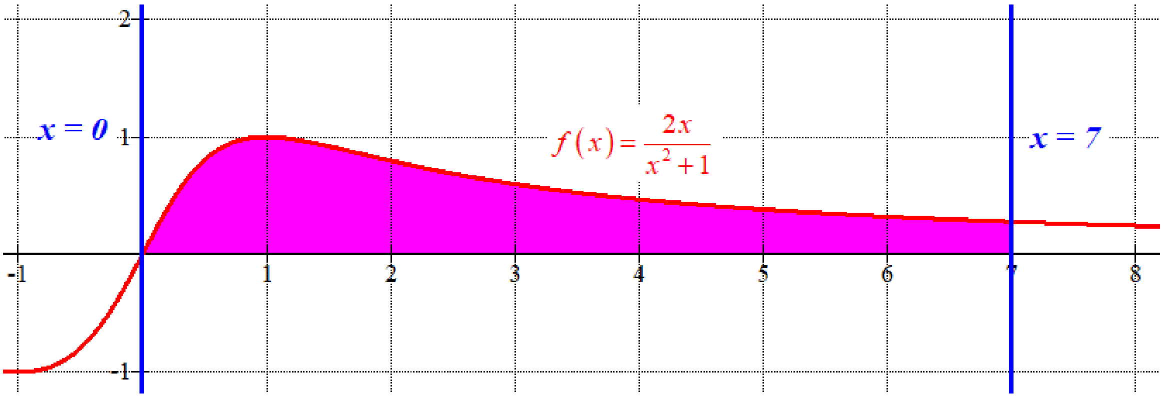
OTRA FORMA DE RAZONARLO.

La función es continua. En $x = 0$ vale 2, disminuye hasta su valor mínimo 1.43 y vuelve a crecer hasta $+\infty$. Nunca alcanza el valor 0.

P6.– [10 puntos] Representa la región comprendida entre la curva $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, el eje de abscisas (eje OX) y las rectas *x = 0* y *x = 7*. Calcula su área.

La función es continua. Hacemos una tabla de valores y la representamos en el intervalo [0, 7].

x	$f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$
0	0
1	1
2	$4/5=0.8$
3	0.6
4	$8/17\simeq 0.47$
5	$10/26\simeq 0.38$
6	$12/37\simeq 0.43$
7	$14/50=0.28$



El área se calcula con la integral definida de la función entre 0 y 7.

$$\acute{A}rea=\int_0^7 f(x)\,dx=\int_0^7 \frac{2x}{x^2+1}dx=\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^7=$$

$$=\left[\ln\left(7^2+1\right)\right]-\left[\ln\left(0^2+1\right)\right]=\boxed{\ln 50\simeq 3.91\ unidades\,cuadradas}$$

P7.– Un espacio muestral contiene dos sucesos A y B. Sabiendo que $P(A\cap B)=0.3$, $P(A/B)=P(B/A)$ y $P(A^C)=0.4$ (siendo A^C el suceso complementario), calcula:

(a) **[2 puntos]** $P(B/A)$.

(b) **[3 puntos]** $P(B)$.

(c) **[3 puntos]** $P(A^C\cap B^C)$.

(d) **[2 puntos]** ¿Son A y B sucesos independientes?

(a)

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B)}{1-P(A^C)}=\frac{0.3}{1-0.4}=\boxed{0.5}$$

(b)

$$P(A)=1-P(A^C)=1-0.4=0.6$$

$$P(A/B)=P(B/A)\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow P(A)=P(B)\Rightarrow\boxed{P(B)=0.6}$$

(c)

$$P(A^C\cap B^C)=P\left((A\cup B)^C\right)=1-P(A\cup B)=$$

$$=1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]=1-[0.6+0.6-0.3]=\boxed{0.1}$$

(d) Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap B)=0.3\\ P(A)P(B)=0.6\cdot 0.6=0.36\end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)=0.3\neq 0.36=P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

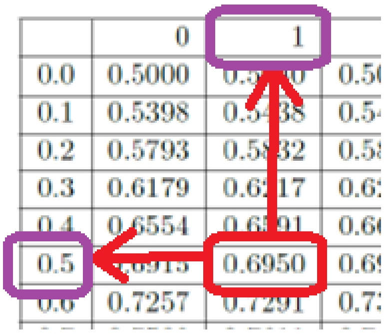
P8.– El peso de los recién nacidos sigue una distribución normal de media $\mu = 3.1kg$ y desviación típica σ desconocida. Se sabe que sólo el 30.5% de los recién nacidos pesa más de 3.8 kg. Calcula, redondeando los resultados a 4 decimales,
(a)**[4 puntos]** ¿Cuál es la desviación típica?
(b)**[3 puntos]** Suponiendo que $\sigma = 1.3725$, ¿cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2.7 kg?
(c)**[3 puntos]** Suponiendo que $\sigma = 1.3725$, ¿cuál es la probabilidad de qué un recién nacido pese entre 2.7 y 3.5 kg?

X = El peso de un recién nacido. X = N(3.1, σ).

(a) Sabemos que $P(X \geq 3.8) = 0.305$.

$$P(X \geq 3.8) = 0.305 \Rightarrow P(X \leq 3.8) = 1 - 0.305 = 0.695 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{3.8-3.1}{\sigma}\right) = 0.695 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Buscamos en} \\ \text{la tabla N(0, 1)}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{0.7}{\sigma} = 0.51 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{0.7}{0.51} \simeq 1{,}3725}$$



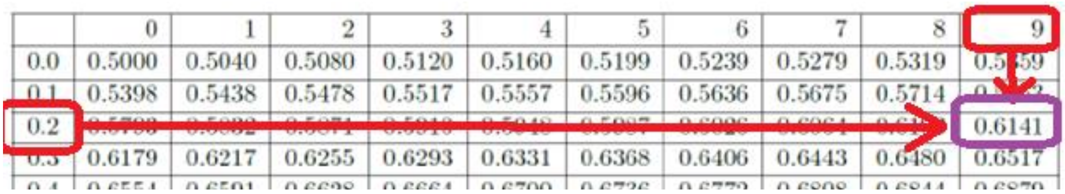
	0	1	
0.0	0.5000	[illegible]	0.50
0.1	0.5398	[illegible]	0.5
0.2	0.5793	[illegible]	0.5
0.3	0.6179	[illegible]	0.6
0.4	0.6554	[illegible]	0.6
0.5	[illegible]	0.6950	0.6
0.6	0.7257	0.7291	0.7

La desviación típica es, aproximadamente, $\sigma = 1.3725$.

(b) X = El peso de un recién nacido. X = N(3.1, 1.3725).

$$P(X \leq 2.7) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \leq \frac{2.7-3.1}{1.3725}\right) = P(Z \leq -0.29) = P(Z \geq 0.29) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.29) = \left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\} = 1 - 0.6141 = \boxed{0.3859}$$



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	[illegible]
0.2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517

(c) X = El peso de un recién nacido. X = N(3.1, 1.3725).

$$P(2.7 \le X \le 3.5) = P(X \le 3.5) - P(X \le 2.7) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(Z \le \frac{3.5 - 3.1}{1.3725}\right) - 0.3859 = P(Z \le 0.29) - 0.3859 = \left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\} =$$

$$= 0.6141 - 0.3859 = \boxed{0.2282}$$