Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II | Model 3

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos entre 4.

Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

P1.– Sea el sistema

$$\begin{cases} mx+y-z=1 \\ 2x+my=1 \\ x+mz=0 \end{cases},$$

(a) **[7 puntos]** Discute el número de soluciones que tiene el sistema según el parámetro *m*.
(b) **[3 puntos]** Resuelve el sistema en el caso $m = 1$.

P2.– Sea A una matriz invertible $n\times n$ con coeficientes reales que satisface la igualdad $A^2+A=I$. Entonces,

(a) **[3 puntos]** ¿Satisface la matriz

$$M=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

las condiciones del enunciado? Es decir, ¿cumple M la igualdad del enunciado y, además, es invertible?

Volviendo a considerar que A es una matriz cualquiera que satisface las condiciones del enunciado,

(b) **[3 puntos]** Calcula la inversa de A
(c) **[4 puntos]** Comprueba que se cumple la igualdad $A(B+A)-I=A(B-I)$, siendo B una matriz cuadrada cualquiera $n\times n$ coeficientes reales.

P3.– Sean los puntos $A=(1,2,0)$, $B=(-1,0,1)$, $C=(0,0,1)$ y $D=(3,1,2)$.

(a) **[4 puntos]** Determina la recta *r* que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene los puntos A, B y C.
(b) **[4 puntos]** Determina si los puntos A, B, C y D son coplanarios.
(c) **[2 puntos]** ¿Es D el punto de corte de la recta con el plano del apartado (a)? Justifica la respuesta.

P4.– Sea el plano $\pi: 3x+y+z=2$ y los puntos P = (0, 1, 1) y Q = (2, –1, –3).

(a) **[2 puntos]** ¿Son P y Q puntos del plano **π**? Justifica la respuesta.
(b) **[4 puntos]** Calcula el punto S situado sobre la recta PQ que se encuentra a 3/4 partes de P y a 1/4 parte de Q
(c) **[4 puntos]** Determina la ecuación implícita (también llamada cartesiana) de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano π.

P5.– La reproducción de un insecto a lo largo del tiempo sigue la función $f(x)=e^{-x}(2x+1)$ siendo $x \geq 0$ el tiempo en meses y *f(x)* el número de insectos en millones.

(a) **[4 puntos]** ¿Cuántos millones de insectos había en el instante inicial? ¿Hacia dónde tiende la cantidad de insectos a lo largo de los años? Interpreta los resultados.

(b) **[4 puntos]** ¿Cuál es el máximo número de insectos que puede llegar a haber? ¿En que instante de tiempo se consigue este valor?

(c) **[2 puntos]** ¿Hay algún momento en el que la población supere los 2 millones de insectos? Justifica la respuesta.

P6.– [10 puntos] Calcula la integral de la función $f(x)=\dfrac{x^4+2x-6}{x^2+x-2}$.

P7.– En una clase donde todos los alumnos practican algún deporte, el 60% de los alumnos juega a fútbol o básquet y el 10% practica los dos. Por otra parte, se sabe que hay un 60% de alumnos que no juega al fútbol.

(a) **[3 puntos]** Sea F = “juega a fútbol” y sea B = “juega a básquet”, escribe, en términos de uniones, intersecciones y complementarios de estos dos sucesos, las tres probabilidades que indica el enunciado.

(b) Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar un alumno de la clase,

(b.1) **[1 punto]** Juegue a fútbol.

(b.2) **[2 puntos]** Juegue a básquet.

(b.3) **[2 puntos]** Juegue a básquet.y no a fútbol (es decir, solo juega a básquet)

(b.4) **[2 puntos]** No juegue ni a fútbol ni a básquet.

P8.– (a) **[5 puntos]** En un examen de tecnología, ¿cuál es la probabilidad de sacar una nota entre 5 y 7 si se sabe que las notas siguen una distribución normal de media 8 y desviación típica 2?

(b) **[5 puntos]** En un examen de filosofía, el 35% de los alumnos presentados obtuvieron una nota mayor que 6 mientras que el 51% la obtuvo menor que 4. Suponiendo que las notas siguen una distribución normal, determina cuál es su media μ y su desviación típica σ.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.

SOLUCIONES

P1.– Sea el sistema

$$\begin{cases} mx+y-z=1 \\ 2x+my=1 \\ x+mz=0 \end{cases},$$

(a) **[7 puntos]** Discute el número de soluciones que tiene el sistema según el parámetro *m*.
(b) **[3 puntos]** Resuelve el sistema en el caso *m = 1*.

(a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} m & 1 & -1 & 1 \\ 2 & m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m & 0 \end{pmatrix}$.

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix}=m^3+0+0+m-2m-0=m^3-m$$

$$|A|=0 \Rightarrow m^3-m=0 \Rightarrow m\left(m^2-1\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{m=0} \\ m^2-1=0 \to m^2=1 \to \boxed{m=\sqrt{1}=\pm 1} \end{cases}$$

Distinguimos cuatro casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $m \neq 0$ y $m \neq \pm 1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas (3). El sistema tiene una única solución.

CASO 2. $m=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A/B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} \text{Fila } 2^a & - & 2\cdot\text{Fila } 1^a & \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 2^a\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}}^{A/B} \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2 y la ampliada tiene rango 3. Los rangos son distintos y el sistema no tiene solución.

CASO 3. $m=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$$A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a\\ \begin{array}{cccc}1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ \hline 0 & -1 & 2 & -1\end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^a - 2\cdot \text{Fila } 1^a\\ \begin{array}{cccc}2 & 1 & 0 & 1\\ -2 & -2 & 2 & -2\\ \hline 0 & -1 & 2 & -1\end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^a \; - \; \text{Fila } 2^a\\ \begin{array}{cccc}0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\underbrace{\begin{array}{ccc}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{array}}_{A}\begin{array}{c}1\\ -1\\ 0\end{array}}^{A/B}\right)$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la ampliada, siendo menor que el número de incógnitas (3). El sistema tiene infinitas soluciones.

CASO 4. $m=-1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$

$$A/B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a\\ \begin{array}{cccc}1 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ \hline 0 & 1 & -2 & 1\end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^a + 2\cdot \text{Fila } 1^a\\ \begin{array}{cccc}2 & -1 & 0 & 1\\ -2 & 2 & -2 & 2\\ \hline 0 & 1 & -2 & 3\end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad -2 \quad 1 \\ 0 \quad -1 \quad 2 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{cases}\right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{matrix}}^{A/B} \right)$$

(with A the first three columns)

La matriz A tiene rango 2 y la ampliada tiene rango 3. Los rangos son distintos y el sistema no tiene solución.

.

Resumiendo: Si $m \neq 0$ y $m \neq \pm 1$ el sistema tiene una única solución, si $m = 0$ o $m = -1$ tiene cero soluciones y si $m = 1$ el sistema tiene infinitas soluciones.

(b) Para $m = 1$ resolvemos el sistema a partir del sistema equivalente triangular obtenido en el apartado anterior.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y-z=1 \\ -y+2z=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y-z=1 \\ 2z+1=y \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+1+2z-z=1 \Rightarrow x=-z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=-\lambda \\ y=1+2\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}}$$

P2.– Sea A una matriz invertible $n\times n$ con coeficientes reales que satisface la igualdad $A^2+A=I$. Entonces,
(a)**[3 puntos]** ¿Satisface la matriz

$$M=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

las condiciones del enunciado? Es decir, ¿cumple M la igualdad del enunciado y, además, es invertible?
Volviendo a considerar que A es una matriz cualquiera que satisface las condiciones del enunciado,
(b) **[3 puntos]** Calcula la inversa de A
(c) **[4 puntos]** Comprueba que se cumple la igualdad $A(B+A)-I=A(B-I)$, siendo B una matriz cuadrada cualquiera $n\times n$ coeficientes reales.

(a) Comprobamos si se cumple $M^2+M=I$.

$$M^2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+1 & 0+1\\ 0+1 & 1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$M^2+M=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

La matriz M cumple la igualdad del enunciado. Comprobamos si es invertible. Para ello comprobamos que su determinante es no nulo.

$$|M|=\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & -1\end{vmatrix}=0-1=-1\neq 0$$

La matriz M es invertible. Se cumplen las dos condiciones del enunciado.

(b)

$$A^2+A=I\Rightarrow A\cdot A+A\cdot I=I\Rightarrow A(A+I)=I\Rightarrow \text{¡}A+I \text{ es la inversa de A!}$$

(c)

$$A^2+A=I\rightarrow A^2-I=-A$$

$$A(B+A)-I=AB+A^2-I=AB-A=AB-A\cdot I=A(B-I)$$

Quedando demostrada la igualdad.

P3.– Sean los puntos $A=(1,2,0)$, $B=(-1,0,1)$, $C=(0,0,1)$ y $D=(3,1,2)$.

(a) **[4 puntos]** Determina la recta *r* que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene los puntos A, B y C.

(b) **[4 puntos]** Determina si los puntos A, B, C y D son coplanarios.

(c) **[2 puntos]** ¿Es D el punto de corte de la recta con el plano del apartado (a)? Justifica la respuesta.

(a) Hallamos la ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C.

$$\left.\begin{array}{l} A=(1,2,0)\in\pi \\ B=(-1,0,1)\in\pi \\ C=(0,0,1)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-1,0,1)-(1,2,0)=(-2,-2,1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(0,0,1)-(1,2,0)=(-1,-2,1) \\ C=(0,0,1)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x-y+4(z-1)-2(z-1)+2y+2x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x-y+4z-4-2z+2+2y+2x=0\Rightarrow \boxed{\pi: y+2z-2=0}$$

La recta *r* que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene los puntos A, B y C tiene como vector director el vector normal del plano π.

$$\pi: y+2z-2=0\Rightarrow \vec{n}=(0,1,2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r}=\vec{n}=(0,1,2) \\ D=(3,1,2)\in r \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r:\begin{cases} x=3 \\ y=1+\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases}, \lambda\in r}$$

(b) Para que los puntos A, B, C y D sean coplanarios el punto D debe pertenecer al plano $\pi: y+2z-2=0$ que contiene los puntos A, B y C.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: y+2z-2=0 \\ ¿D=(3,1,2)\in\pi? \end{array}\right\} \Rightarrow ¿1+2\cdot 2-2=0?\Rightarrow ¿3=0?$$

El punto D no pertenece al plano que contiene los puntos A, B y C. Los puntos A, B, C y D no son coplanarios.

(c) El punto D pertenece a la recta *r*, pues así está definida, pero este punto no pertenece al plano, lo hemos visto en el apartado (b), por lo que no es el punto de corte de recta y plano.

Para comprobarlo hallamos las coordenadas del punto de corte de *r* y π.

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} x=3 \\ y=1+\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases} \\ \pi: y+2z-2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1+\lambda+4+4\lambda-2=0\Rightarrow 5\lambda=-3\Rightarrow \lambda=\frac{-3}{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \\ z = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \boxed{P\left(3, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)}$$

El punto de corte de recta y plano es $P\left(3, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ diferente al punto $D = (3, 1, 2)$.

P4.– Sea el plano $\pi: 3x+y+z=2$ y los puntos P = (0, 1, 1) y Q = (2, –1, –3).
(a) **[2 puntos]** ¿Son P y Q puntos del plano **π**? Justifica la respuesta.
(b) **[4 puntos]** Calcula el punto S situado sobre la recta PQ que se encuentra a 3/4 partes de P y a 1/4 parte de Q
(c) **[4 puntos]** Determina la ecuación implícita (también llamada cartesiana) de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano π.

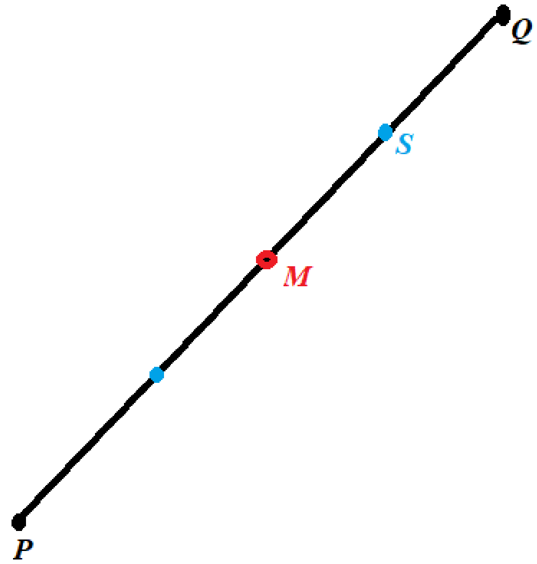
(a) Los puntos P y Q pertenecen al plano **π** si satisfacen su ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} ¿P(0,\ 1,\ 1)\in\pi? \\ \pi: 3x+y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow ¿3\cdot 0+1+1=2? \rightarrow ¡Cierto!\ P\in\pi$$

$$\left.\begin{array}{l} ¿Q(2,\ -1,\ -3)\in\pi? \\ \pi: 3x+y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow ¿3\cdot 2-1-3=2? \rightarrow ¡Cierto!\ Q\in\pi$$

Los puntos P y Q pertenecen al plano **π.**

(b) El punto S es un punto de la recta PQ tal que d(P, S) = 3d(Q, S).



Hallamos el punto medio M del segmento PQ.

$$\left.\begin{array}{l} P(0,1,1) \\ Q(2,-1,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow M=\frac{(0,1,1)+(2,-1,-3)}{2}=\frac{(2,0,-2)}{2}=(1,0,-1)$$

El punto S buscado es el punto medio del segmento MQ.

$$\left.\begin{array}{l} M(1,0,-1) \\ Q(2,-1,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow S=\frac{(1,0,-1)+(2,-1,-3)}{2}=\frac{(3,-1,-4)}{2}=\left(\frac{3}{2},\frac{-1}{2},-2\right)$$

El punto S buscado es $S\left(\frac{3}{2},\frac{-1}{2},-2\right)$.

OTRA FORMA DE HACERLO

Hallamos la ecuación de la recta PQ.

$$\left.\begin{array}{l} P(0,1,1)\in r \\ Q(2,-1,-3)\in r \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}=(2,-1,-3)-(0,1,1)=(2,-2,-4)\to \vec{v}_r=(1,-1,-2) \\ P(0,1,1)\in r \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \quad ,\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=1-2\lambda \end{cases}}$$

El punto S pertenece a la recta *r* y tiene coordenadas $S(\lambda,1-\lambda,1-2\lambda)$

Aplicamos la igualdad d(P, S) = 3d(Q, S).

$$\left.\begin{array}{l} S(\lambda,1-\lambda,1-2\lambda) \\ P(0,1,1) \\ Q(2,-1,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PS}=(\lambda,1-\lambda,1-2\lambda)-(0,1,1)=(\lambda,-\lambda,-2\lambda) \\ \overrightarrow{QS}=(\lambda,1-\lambda,1-2\lambda)-(2,-1,-3)=(\lambda-2,2-\lambda,4-2\lambda) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PS}=(\lambda,-\lambda,-2\lambda) \\ \overrightarrow{QS}=(\lambda-2,2-\lambda,4-2\lambda) \\ d(P,\ S)\ =\ 3d(Q,\ S) \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{PS}\right|=3\left|\overrightarrow{QS}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(\lambda)^2+(-\lambda)^2+(-2\lambda)^2}=3\sqrt{(\lambda-2)^2+(2-\lambda)^2+(4-2\lambda)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda^2+\lambda^2+4\lambda^2}=3\sqrt{\lambda^2+4-4\lambda+\lambda^2+4-4\lambda+16+4\lambda^2-16\lambda} \Rightarrow$$

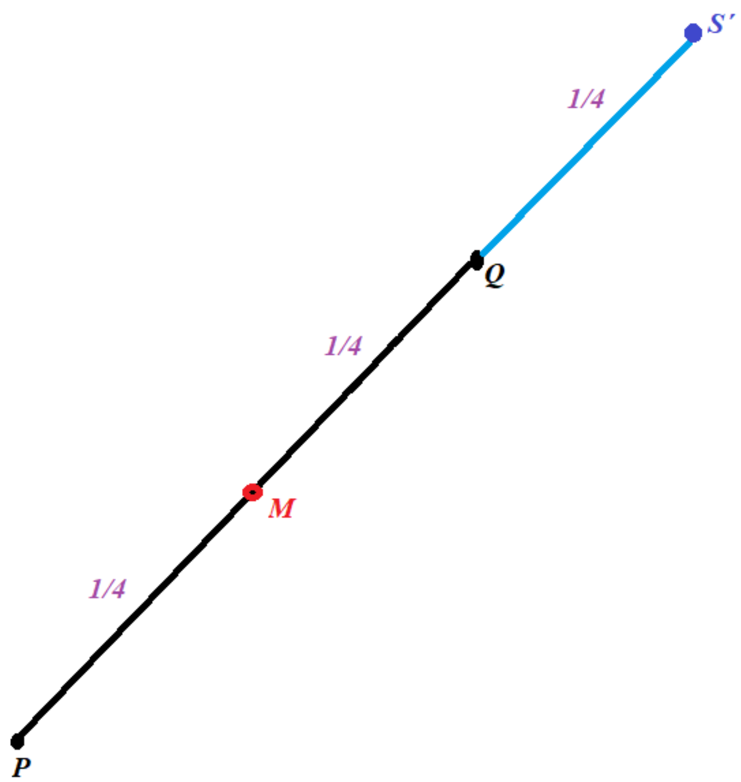
$$\Rightarrow \sqrt{6\lambda^2}=3\sqrt{6\lambda^2-24\lambda+24} \Rightarrow 6\lambda^2=9\left(6\lambda^2-24\lambda+24\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda^2=54\lambda^2-216\lambda+216 \Rightarrow 48\lambda^2-216\lambda+216=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\lambda^2-9\lambda+9=0 \Rightarrow \lambda=\frac{9\pm\sqrt{(-9)^2-4(2)(9)}}{4}=\frac{9\pm 3}{4}=\begin{cases} \dfrac{9+3}{4}=3=\lambda \\ \dfrac{9-3}{4}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}=\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} S(\lambda,1-\lambda,1-2\lambda) \\ \lambda=3 \end{array}\right\} \to \boxed{S'(3,-2,-5)} \\ \left.\begin{array}{l} S(\lambda,1-\lambda,1-2\lambda) \\ \lambda=\dfrac{3}{2} \end{array}\right\} \to S\left(\dfrac{3}{2},1-\dfrac{3}{2},1-3\right) \to \boxed{S\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{-1}{2},-2\right)} \end{cases}$$

El punto S´ obtenido es el punto del dibujo siguiente.



(c) La recta s que pasa por P y es perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: 3x + y + z = 2 \Rightarrow \vec{n} = (3,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_s} = \vec{n} = (3,1,1) \\ P(0,\ 1,\ 1) \in s\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z - 1 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3(z-1) = 3z - 3 \\ y = 1 + z - 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{s: \begin{cases} x - 3z + 3 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}}$$

P5.– La reproducción de un insecto a lo largo del tiempo sigue la función $f(x)=e^{-x}(2x+1)$ siendo $x\geq 0$ el tiempo en meses y *f(x)* el número de insectos en millones.
(a)**[4 puntos]** ¿Cuántos millones de insectos había en el instante inicial? ¿Hacia dónde tiende la cantidad de insectos a lo largo de los años? Interpreta los resultados.
(b)**[4 puntos]** ¿Cuál es el máximo número de insectos que puede llegar a haber? ¿En que instante de tiempo se consigue este valor?
(c)**[2 puntos]** ¿Hay algún momento en el que la población supere los 2 millones de insectos? Justifica la respuesta.

(a) Nos piden hallar *f(0)* → $f(0)=e^{-0}(2\cdot 0+1)=1$. Inicialmente hay 1 millón de insectos.

Nos piden calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(2x+1)=e^{-\infty}(+\infty+1)=0(+\infty)=Indeterminación=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=Indeterminación(L'Hôpital)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=0$$

Significa que inicialmente había un millón de insectos y con el paso del tiempo acaban despareciendo todos los insectos.

(b) Buscamos los puntos críticos de la función *f(x)*.

$$f(x)=e^{-x}(2x+1)\to f'(x)=-e^{-x}(2x+1)+e^{-x}(2)=e^{-x}(-2x+1)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=e^{-x}(-2x+1) \\ f'(x)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow e^{-x}(-2x+1)=0\Rightarrow\left\{e^{-x}\neq 0\right\}\Rightarrow -2x+1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x=1\Rightarrow\boxed{x=\frac{1}{2}}$$

Sustituimos este valor en la derivada segunda para determinar si es máximo o mínimo.

$$f'(x)=e^{-x}(-2x+1)\Rightarrow f''(x)=-e^{-x}(-2x+1)+e^{-x}(-2)=e^{-x}(2x-3)\Rightarrow$$

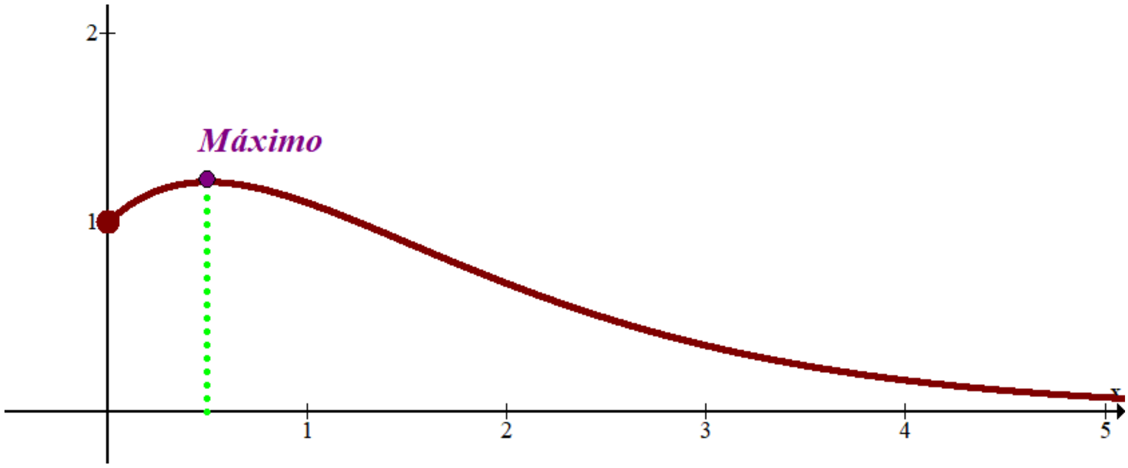
$$\Rightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right)=e^{-1/2}\left(2\left(\frac{1}{2}\right)-3\right)=-2e^{-1/2}<0\to x=\frac{1}{2}\text{ es máximo}$$

La función presenta un máximo relativo en *x = 1/2*. Es decir, al cabo de medio mes se obtiene la máxima cantidad de insectos, siendo esta cantidad de $f\left(\frac{1}{2}\right)=e^{-1/2}(1+1)\simeq 1.213061$.

Este máximo relativo es máximo absoluto de la función, pues empieza en *x = 0* con 1 millón de insectos, sube a 1.2 millones al cabo de medio mes y desciende continuamente hasta acercarse a 0. La función es continua y por tanto no pasa por valores superiores a 1.2 millones de insectos.

El máximo número de insectos es de 1.213.061 insectos y se produce a mitad del primer mes.

(c) La población de insectos no supera en ningún momento los 2 millones, pues el máximo absoluto es de 1.2 millones.



P6.– [10 puntos] Calcula la integral de la función $f(x)=\dfrac{x^4+2x-6}{x^2+x-2}$.

$$\int f(x)\,dx=\int \frac{x^4+2x-6}{x^2+x-2}\,dx=\dots$$

$$\begin{array}{rl|l}
x^4 & \qquad\qquad +2x+6 & x^2+x-2 \\ \hline
-x^4-x^3+2x^2 & & x^2-x+3 \\
\hline
-x^3+2x^2+2x-6 & & \\
x^3+x^2-2x & & \\
\hline
3x^2\qquad -6 & & \\
-3x^2-3x+6 & & \\
\hline
-3x & &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^4+2x-6}{x^2+x-2}=x^2-x+3+\frac{-3x}{x^2+x-2}$$

$$\dots=\int x^2-x+3+\frac{-3x}{x^2+x-2}\,dx=\int x^2-x+3dx-\int\frac{3x}{x^2+x-2}\,dx=\dots$$

$$x^2+x-2=0\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-2)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}\dfrac{-1+3}{2}=1=x\\[2mm] \dfrac{-1-3}{2}=-2=x\end{cases}$$

$$\frac{3x}{x^2+x-2}=\frac{3x}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x=A(x+2)+B(x-1)\Rightarrow\begin{cases}x=1\to 3=3A\to A=1\\ x=-2\to -6=-3B\to B=2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{x^2+x-2}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+2}$$

$$\dots=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x-\int\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+2}\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x-\int\frac{1}{x-1}\,dx-\int\frac{2}{x+2}\,dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x-\int\frac{1}{x-1}\,dx-2\int\frac{1}{x+2}\,dx=\boxed{\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x-\ln|x-1|-2\ln|x+2|+K}$$

P7.– En una clase donde todos los alumnos practican algún deporte, el 60% de los alumnos juega a fútbol o básquet y el 10% practica los dos. Por otra parte, se sabe que hay un 60% de alumnos que no juega al fútbol.
(a) **[3 puntos]** Sea F = "juega a fútbol" y sea B = "juega a básquet", escribe, en términos de uniones, intersecciones y complementarios de estos dos sucesos, las tres probabilidades que indica el enunciado.
(b) Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar un alumno de la clase,
(b.1) **[1 punto]** Juegue a fútbol.
(b.2) **[2 puntos]** Juegue a básquet.
(b.3) **[2 puntos]** Juegue a básquet.y no a fútbol (es decir, solo juega a básquet)
(b.4) **[2 puntos]**No juegue ni a fútbol ni a básquet.

(a) El 60% de los alumnos juega a fútbol o básquet → $P(F \cup B) = 0.60$

El 10% practica los dos → $P(F \cap B) = 0.10$

Hay un 60% de alumnos que no juega al fútbol → $P(F^C) = 0.60$

(b)

(b.1) $P(F) = 1 - P(F^C) = 1 - 0.60 = \boxed{0.4}$

(b.2) Nos piden calcular P(B).

$$\left.\begin{array}{l} P(F \cup B) = 0.60 \\ P(F \cap B) = 0.10 \\ P(F) = 0.40 \\ P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow 0.6 = 0.4 + P(B) - 0.1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B) = 0.6 - 0.4 + 0.1 = \boxed{0.3}$$

(b.3) Nos piden calcular $P(B \cap F^C)$.

$$P(B) = P(B \cap F) + P(B \cap F^C) \Rightarrow 0.3 = 0.1 + P(B \cap F^C) \Rightarrow \boxed{P(B \cap F^C) = 0.3 - 0.1 = 0.2}$$

(b.4) Nos piden calcular $P(B^C \cap F^C)$

$$P(B^C \cap F^C) = \{Leyes\,de\,Morgan\} = P\left((B \cup F)^C\right) = 1 - P(B \cup F) = 1 - 0.6 = \boxed{0.4}$$

P8.– (a) **[5 puntos]** En un examen de tecnología, ¿cuál es la probabilidad de sacar una nota entre 5 y 7 si se sabe que las notas siguen una distribución normal de media 8 y desviación típica 2?
(b) **[5 puntos]** En un examen de filosofía, el 35% de los alumnos presentados obtuvieron una nota mayor que 6 mientras que el 51% la obtuvo menor que 4. Suponiendo que las notas siguen una distribución normal, determina cuál es su media μ y su desviación típica σ.

(a) X = Nota en un examen de tecnología. X = N(8, 2).

$$P(5 \le X \le 7) = P(X \le 7) - P(X \le 5) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(Z \le \frac{7-6}{2}\right) - P\left(Z \le \frac{5-6}{2}\right) = P(Z \le 0.5) - P(Z \le -0.5) =$$

$$= P(Z \le 0.5) - P(Z \ge 0.5) = P(Z \le 0.5) - \left[1 - P(Z \le 0.5)\right] =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 0.6915 - [1 - 0.6915] = \boxed{0.383}$$

	0	1
0.0	[illegible]	0.5040
0.1	[illegible]	0.5438
0.2	[illegible]	0.5832
0.3	[illegible]	0.6217
0.4	[illegible]	0.6591
0.5	0.6915	0.6950
0.6	0.7257	0.7291
0.7	0.7580	0.7611

(b) X = Nota en un examen de filosofía. X = N(μ, σ).
Sabemos que $P(X \ge 6) = 0.35$ y que $P(X \le 4) = 0.51$.

$$P(X \ge 6) = 0.35 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z \ge \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 0.35 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \le \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 0.35 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 1 - 0.35 = 0.65 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{6-\mu}{\sigma} = 0.385 \Rightarrow 6 - \mu = 0.385\sigma \Rightarrow \boxed{6 - 0.385\sigma = \mu}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	[illegible]	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	[illegible]	[illegible]
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	[illegible]	[illegible]
0.3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879

$$P(X \leq 4) = 0.51 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = 0.51 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{4-\mu}{\sigma} = 0.025 \Rightarrow \boxed{4-\mu = 0.025\sigma}$$

	0	1	2	3	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{matrix} 6-0.385\sigma = \mu \\ 4-\mu = 0.025\sigma \end{matrix} \right\} \Rightarrow 4-6+0.385\sigma = 0.025\sigma \Rightarrow 0.385\sigma - 0.025\sigma = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.360\sigma = 2 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{2}{0.36} = \frac{50}{9} \simeq 5.5556} \Rightarrow \mu = 6 - 0.385 \cdot \frac{50}{9} = \boxed{\frac{139}{36} \simeq 3.8611}$$

La media de notas es 3.86 puntos y la desviación típica es 5.5 puntos.