UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2022-2023
Convocatoria:
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.
En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.
Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.- (2 puntos) Sea

$$f(x)=\frac{1+4x^4-x^2}{x}$$

(i) Halla el dominio y asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas) de la función *f* en caso de que existan.
(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

2.- (2 puntos) Dibuja el recinto limitado por las parábolas $y=x^2-8x$ e $y=10-x^2$. Calcula su área.

3.- (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{3}{x^2}}$

(ii) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}$

4.- (2 puntos) Determina para qué valores del parámetro real *a* la matriz A:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para *a = 2*.

5.- (2 puntos)

(i) Determina las matrices cuadradas de dimensión 2×2 de la forma

$$M=\begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

Que satisfagan la siguiente identidad: $MM^T=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde M^T representa la matriz traspuesta de M.

(ii) Resuelve el sistema

$$\begin{cases} AX+BY=C \\ AX\qquad\;\;=Y \end{cases}$$

Sabiendo que

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}15 & 3\\ 7 & 3\end{pmatrix}$$

6.- (2 puntos) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$. Calcular A^{-1} y A^{20}, utilizando necesariamente la siguiente identidad $A^3=-I$, donde I es la matriz identidad de orden tres.

7.- (2 puntos) La proyección ortogonal del punto P(1, 0, –1), sobre el plano π es el punto Q(–3, 2, 5). Halla la ecuación del plano π y las coordenadas del punto simétrico del P respecto a dicho plano π.

8.- (2 puntos) Determina la posición relativa de los tres planos, según los valores del parámetro *m*:

$$\begin{cases} mx+y+z=1\\ x+my+z=m\\ x+y+mz=m^2\end{cases}$$

9.- (2 puntos) La estadística de un equipo de baloncesto en un partido, desvela que el 45 % de los puntos conseguidos por el equipo corresponde al jugador número 23, de los cuales el 65 % son triples, 15 % al jugador número 6 de los cuales el 25 % son triples y el resto de la puntuación, siendo el 10% triples, corresponde a otros jugadores del equipo. Halla la probabilidad de que:
(i) una de las jugadas del equipo haya acabado en un triple.
(ii) sabiendo que la canasta ha sido un triple, haya sido conseguida por el jugador número 23.

10.- (2 puntos) La estatura media de un jugador de fútbol del Real Madrid sigue una distribución normal de media 180 cm y desviación típica 10 cm. Si se elige un jugador al azar, calcula:

(i) la probabilidad de que su altura sea superior o igual a 200 cm;
(ii) la probabilidad de que su altura esté entre 170 y 190 cm.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

1.- (2 puntos) Sea

$$f(x)=\frac{1+4x^4-x^2}{x}$$

(i) Halla el dominio y asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas) de la función *f* en caso de que existan.
(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

(i) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.
Dominio = $\mathbb{R}-\{0\}$

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1+4x^4-x^2}{x}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$.

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+4x^4-x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\frac{4x^4}{x}-\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+4x^3-x=\frac{1}{\infty}+\infty=\boxed{+\infty}$$

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+4x^4-x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+4x^3-x=\frac{1}{\infty}-\infty=\boxed{-\infty}$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1+4x^4-x^2}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+4x^4-x^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+4x^2-1=\frac{1}{\infty}+\infty=\infty$$

No tiene asíntota oblicua.

La función tiene una asíntota vertical: $x=0$ y no tiene ni asíntota horizontal ni oblicua.

(ii) Usamos la función derivada.

$$f(x)=\frac{1+4x^4-x^2}{x}=\frac{1}{x}+4x^3-x \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}+12x^2-1$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+12x^2-1 \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=-\frac{1}{x^2}+12x^2-1 \Rightarrow \frac{1}{x^2}=12x^2-1 \Rightarrow 1=12x^4-x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x^4 - x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(12)(-1)}}{24} = \frac{1 \pm 7}{24} = \begin{cases} \frac{1+7}{24} = \frac{1}{3} = x^2 \to \boxed{x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}} \\ \frac{1-7}{24} = \frac{-1}{4} = x^2 \to \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores. Añadimos el valor excluido del dominio.

- En el intervalo $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale

  $f'(-1) = -\frac{1}{(-1)^2} + 12(-1)^2 - 1 = 10 > 0$. La función crece en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$.

- En el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, 0\right)$ tomamos *x = –0.1* y la derivada vale

  $f'(-0.1) = -\frac{1}{(-0.1)^2} + 12(-0.1)^2 - 1 = -100.88 < 0$. La función decrece en $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, 0\right)$.

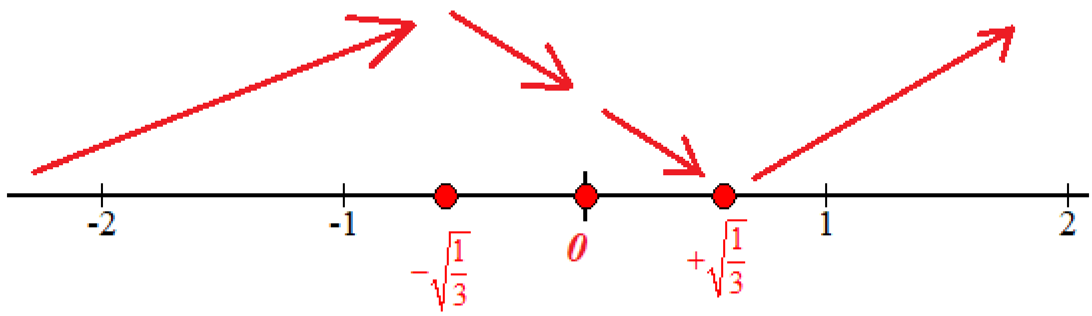
- En el intervalo $\left(0, +\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ tomamos *x = 0.1* y la derivada vale

  $f'(0.1) = -\frac{1}{(0.1)^2} + 12(0.1)^2 - 1 = -100.88 < 0$. La función decrece en $\left(0, +\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$.

- En el intervalo $\left(+\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty\right)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale

  $f'(1) = -\frac{1}{1^2} + 12(1)^2 - 1 = 10 > 0$. La función crece en $\left(+\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty\right)$.

La función decrece en $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, 0\right) \cup \left(0, +\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ y crece en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cup \left(+\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty\right)$.



La función presenta un máximo relativo en $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ y un mínimo relativo en $x = +\sqrt{\frac{1}{3}}$.

2.- (2 puntos) Dibuja el recinto limitado por las parábolas $y = x^2 - 8x$ e $y = 10 - x^2$. Calcula su área.

Determinamos los puntos de corte de ambas gráficas.

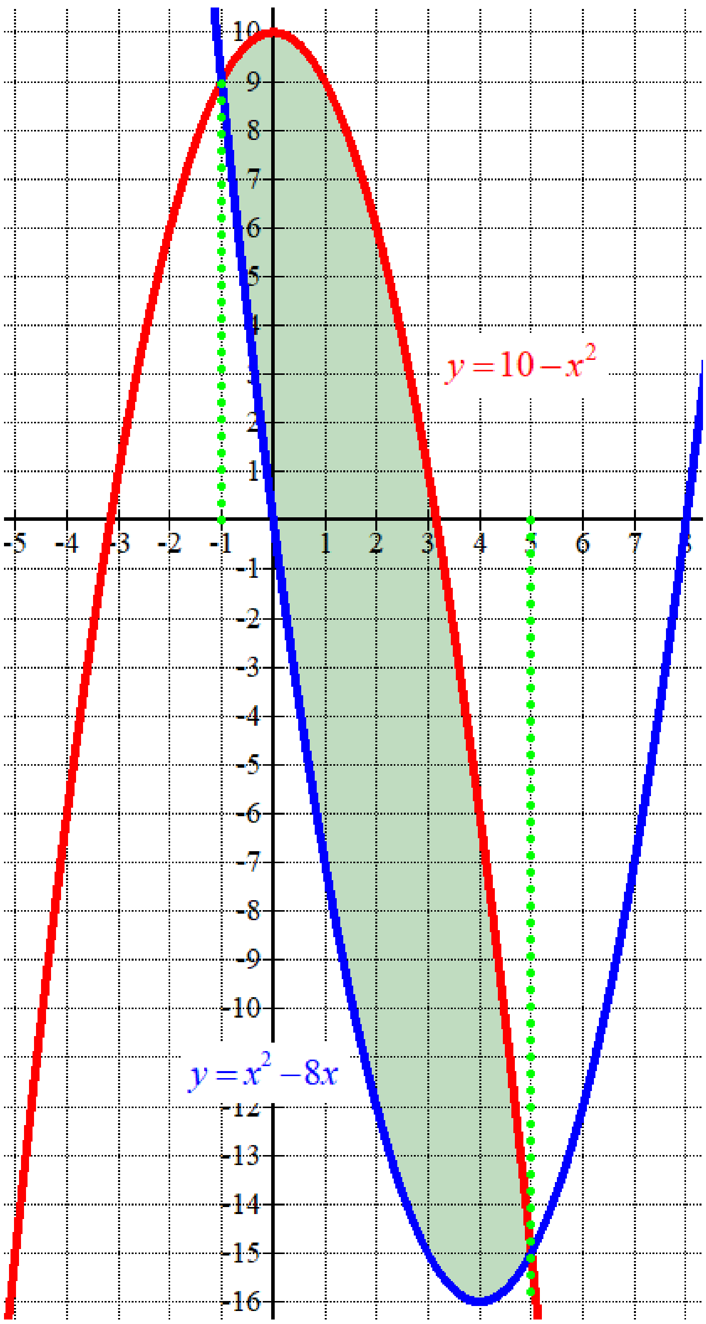
$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 8x \\ y = 10 - x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 8x = 10 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 8x - 10 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-5)}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{4+6}{2} = 5 = x \\ \frac{4-6}{2} = -1 = x \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos las dos parábolas.

x	$y = x^2 - 8x$
-1	9
0	0
1	-7
3	-15
4	-16 *Vértice*
5	-15

x	$y = 10 - x^2$
-1	9
0	10 *Vértice*
1	9
2	6
4	-6
5	-15



El área del recinto será el valor absoluto de la integral definida entre –1 y 5 de la diferencia de las dos funciones.

$$Área = \int_{-1}^{5} 10 - x^2 - \left(x^2 - 8x\right) dx = \int_{-1}^{5} 10 + 8x - 2x^2 dx =$$

$$= \left[10x + 4x^2 - 2\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{5} = \left[10\cdot 5 + 4\cdot 5^2 - 2\frac{5^3}{3}\right] - \left[10(-1) + 4(-1)^2 - 2\frac{(-1)^3}{3}\right] =$$

$$= 50 + 100 - \frac{250}{3} + 10 - 4 - \frac{2}{3} = \boxed{72\ unidades\ cuadradas}$$

El área tiene un valor de 72 unidades cuadradas.

3.- (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$

(ii) $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

(i)

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = (1)^{\frac{3}{0}} = 1^{\infty} = \text{Indeterminación (nº e)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^2}(\cos 2x-1)} = \ldots$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^2}(\cos 2x-1) = \lim_{x\to 0}\frac{3\cos 2x-3}{x^2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación(L´Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-6sen2x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-3sen2x}{x} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación(L´Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-6\cos 2x}{1} = -6$$

$$\ldots = e^{-6} = \boxed{\frac{1}{e^6}}$$

(ii)

$$\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \infty^0 = Indeterminación = L \Rightarrow \ln L = \ln\left(\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} = Indeterminación(L´Hôpital) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \ln L = 0 \Rightarrow L = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = L = 1}$$

4.- (2 puntos) Determina para qué valores del parámetro real a la matriz A:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $a = 2$.

Para que la matriz tenga inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+(a+1)^3+1-a-1-a-1-a-1=(a+1)^3-3a-1=$$

$$=a^3+3a^2+3a+1-3a-1=a^3+3a^2$$

$$|A|=0 \Rightarrow a^3+3a^2=0 \Rightarrow a^2(a+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a+3=0 \to a=-3 \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa cuando $a \neq 0 \ y \ a \neq -3$.

Para $a = 2$ existe la inversa por lo visto anteriormente. La calculamos.

La matriz queda $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$|A|=2^3+3\cdot 2^2=20\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}{20}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 8 \\ 8 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/10 & -1/10 & 2/5 \\ 2/5 & -1/10 & -1/10 \\ -1/10 & 2/5 & -1/10 \end{pmatrix}}$$

5.- (2 puntos)

(i) Determina las matrices cuadradas de dimensión 2×2 de la forma

$$M=\begin{pmatrix}2 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}$$

Que satisfagan la siguiente identidad: $MM^T=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, donde M^T representa la matriz traspuesta de M.

(ii) Resuelve el sistema

$$\begin{cases}AX+BY=C\\ AX\qquad\quad =Y\end{cases}$$

Sabiendo que

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}15 & 3\\ 7 & 3\end{pmatrix}$$

(i)

$$MM^T=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}4+x^2 & xy\\ xy & y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4+x^2=5\rightarrow x^2=1\Rightarrow\boxed{x=\pm 1}\\ xy=1\rightarrow x=\dfrac{1}{y}\\ y^2=1\rightarrow\boxed{y=\pm 1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}o\ \begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}\Rightarrow M=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ o\ \ M=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

(ii) Hallamos primero la solución del sistema.

$$\begin{cases}AX+BY=C\\ AX\qquad\quad =Y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AX+BY=C\\ AX-\ Y\ \ =0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AX+BY=C\\ -AX+Y=0\end{cases}$$

$$BY+Y=C\Rightarrow(B+I)Y=C$$

$$B+I=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$Sea\ Y=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 3\\ 7 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}3a & 3b\\ a+2c & b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 3\\ 7 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3a=15\rightarrow a=5\\ 3b=3\rightarrow b=1\\ a+2c=7\\ b+2d=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5+2c=7\rightarrow 2c=2\rightarrow c=1\\ 1+2d=3\rightarrow 2d=2\rightarrow d=1\end{cases}\Rightarrow\boxed{Y=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{cases}AX=Y\\ X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\end{cases}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2x+z & 2y+t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+z=5 \\ 2y+t=1 \\ \boxed{z=1} \\ \boxed{t=1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+1=5 \rightarrow 2x=4 \rightarrow \boxed{x=2} \\ 2y+1=1 \rightarrow 2y=0 \rightarrow \boxed{y=0} \end{cases} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

6.- (2 puntos) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$. Calcular A^{-1} y A^{20}, utilizando necesariamente la siguiente identidad $A^3=-I$, donde I es la matriz identidad de orden tres.

Para que tenga inversa la matriz debe tener determinante no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{vmatrix}=0+15+12-16-12-0=-1\neq 0$$

La matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & -4 & 3\\ 4 & -5 & 4\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-4 & 3\\ -5 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 3\\ 4 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & -4\\ 4 & -5\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & -1\\ -5 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & -1\\ 4 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 4 & -5\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & -1\\ -4 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & -1\\ 3 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & -4\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=-\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & -4 & -4\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}}$$

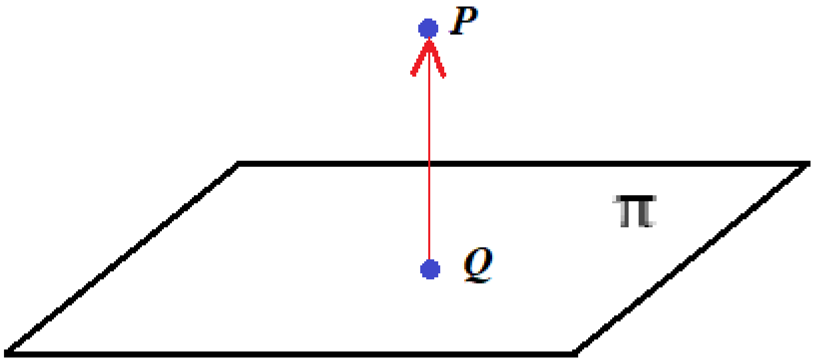
Si se cumple que $A^3=-I$ entonces**:**

$$A^{20}=A^{3\cdot 6+2}=\left(A^3\right)^6\cdot A^2=(-I)^6\cdot A^2=I\cdot A^2=A^2=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{20}=\begin{pmatrix}3-4 & -12+12 & -15+16\\ -4+5 & 3+16-15 & 4+20-20\\ 3-4 & -3-12+12 & -4-15+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\end{pmatrix}}$$

7.- (2 puntos) La proyección ortogonal del punto P(1, 0, –1), sobre el plano π es el punto Q(–3, 2, 5). Halla la ecuación del plano π y las coordenadas del punto simétrico del P respecto a dicho plano π.

El plano π contiene al punto Q(–3, 2, 5). Además, el vector normal del plano es el vector $\overrightarrow{PQ}$.



Obtenemos la ecuación del plano.

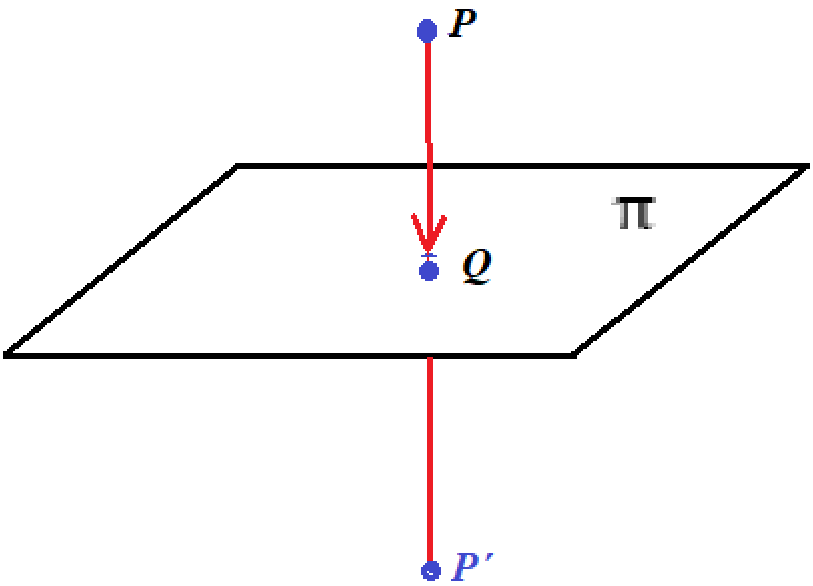
$$\overrightarrow{PQ}=(-3,2,5)-(1,0,-1)=(-4,2,6)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\overrightarrow{PQ}=(-4,2,6)\\ Q(-3,2,5)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi:-4x+2y+6z+D=0\\ Q(-3,2,5)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow -4(-3)+2(2)+6(5)+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12+4+30+D=0\Rightarrow D=-46\Rightarrow \pi:-4x+2y+6z-46=0\Rightarrow \boxed{\pi:-2x+y+3z-23=0}$$

Para hallar el punto P´ simétrico de P respecto del plano π basta con sumar al punto Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$P´=Q+\overrightarrow{PQ}=(-3,2,5)+(-4,2,6)=(-7,4,11)$$



El punto simétrico de P respecto del plano π es el punto $P´=(-7,4,11)$

8.- (2 puntos) Determina la posición relativa de los tres planos, según los valores del parámetro m:

$$\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=m^2 \end{cases}$$

Consideramos la matriz de coeficientes A asociada al sistema $A=\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$. Y la matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{pmatrix}$.

Calculamos el determinante de A y comprobamos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}=m^3+1+1-m-m-m=m^3-3m+2$$

$$|A|=0 \Rightarrow m^3-3m+2=0 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow m=1 \ es\ raiz \Rightarrow m^3-3m+2=(m-1)(m^2+m-2)$$

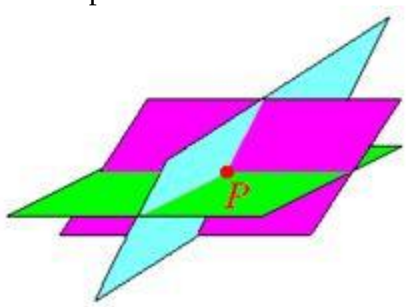
$$m^2+m-2=0 \Rightarrow m=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-2)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases} \frac{-1+3}{2}=\boxed{1=m} \\ \frac{-1-3}{2}=\boxed{-2=m} \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $m\neq 1;\ m\neq -2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3 al igual que el de la matriz ampliada A/B e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

Los tres planos se cortan en un único punto.

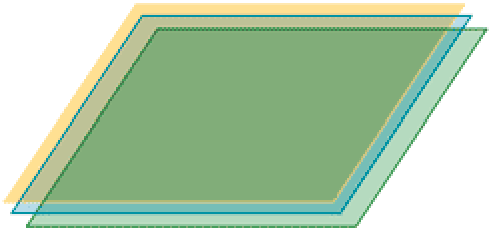


CASO 2. $m=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
El sistema queda tan sencillo que lo analizamos directamente.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

Los tres planos son coincidentes (son el mismo plano)



CASO 3. $m=-2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Utilizamos el método de Gauss para estudiar la compatibilidad del sistema.

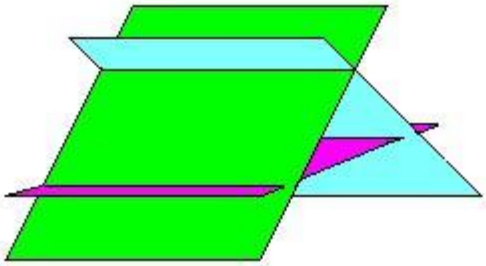
$$A/B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3ª} - \text{Fila 2ª} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 3 & -3 & 6 \end{array} \to \text{Nueva Fila 3ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 1ª} + 2\cdot\text{Fila 2ª} \\ \begin{array}{cccc} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & -4 \\ \hline 0 & -3 & 3 & -3 \end{array} \to \text{Nueva Fila 2ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3ª} + \text{Fila 2ª} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \to \text{Nueva Fila 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

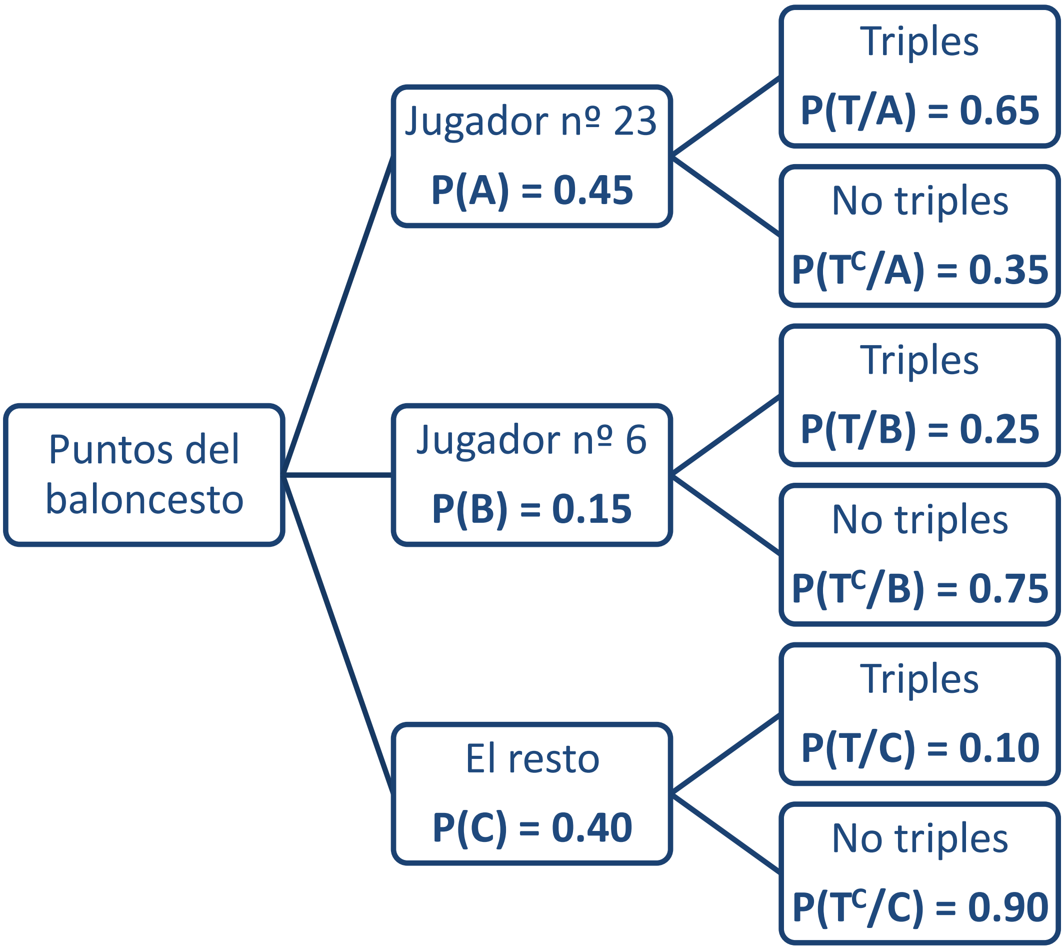
El sistema es incompatible (no tiene solución). Los planos no coinciden en ningún punto.

Las ecuaciones de los planos son $\begin{cases} -2x+y+z=1 \\ x-2y+z=-2 \\ x+y-2z=4 \end{cases}$ y los vectores normales de los planos no tienen coordenadas proporcionales y por tanto no son paralelos entre sí. Se cortan dos a dos en rectas que son paralelas entre sí.



9.- (2 puntos) La estadística de un equipo de baloncesto en un partido, desvela que el 45 % de los puntos conseguidos por el equipo corresponde al jugador número 23, de los cuales el 65 % son triples, 15 % al jugador número 6 de los cuales el 25 % son triples y el resto de la puntuación, siendo el 10% triples, corresponde a otros jugadores del equipo. Halla la probabilidad de que:
(i) una de las jugadas del equipo haya acabado en un triple.
(ii) sabiendo que la canasta ha sido un triple, haya sido conseguida por el jugador número 23.

Hacemos un diagrama de árbol.



(i) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T) = P(A \cap T) + P(B \cap T) + P(C \cap T) =$$

$$= P(A)P(T/A) + P(B)P(T/B) + P(C)P(T/C) =$$

$$= 0.45 \cdot 0.65 + 0.15 \cdot 0.25 + 0.40 \cdot 0.10 = \boxed{0.37}$$

(ii) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/T) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{P(A)P(T/A)}{P(T)} = \frac{0.45 \cdot 0.65}{0.37} = \boxed{\frac{117}{148} \simeq 0.791}$$

10.- (2 puntos) La estatura media de un jugador de fútbol del Real Madrid sigue una distribución normal de media 180 cm y desviación típica 10 cm. Si se elige un jugador al azar, calcula:

(i) la probabilidad de que su altura sea superior o igual a 200 cm;
(ii) la probabilidad de que su altura esté entre 170 y 190 cm.

X = Estatura media de un jugador de fútbol del Real Madrid en centímetros.
X = N(180, 10)

(i) Nos piden $P(X \geq 200)$.

$$P(X \geq 200) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{200-180}{10}\right) = P(Z \geq 2) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2) = \left\{\begin{array}{l}\text{Buscamos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\} = 1 - 0.9772 = \boxed{0.0228}$$

(ii) Nos piden $P(170 \leq X \leq 190)$.

$$P(170 \leq X \leq 190) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{170-180}{10} \leq Z \leq \frac{190-180}{10}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) =$$

$$= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq 1) = P(Z \leq 1) - \left[1 - P(Z \leq 1)\right] =$$

$$= 2P(Z \leq 1) - 1 = \left\{\begin{array}{l}\text{Buscamos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\} = 2 \cdot 0.8413 - 1 = \boxed{0.6826}$$