Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2022-2023

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x+(2a-1)y+\left(\sqrt{2}-2\right)z=2 \\ -ax+ay+2a^2z=\sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Calcula los valores de t para los que el rango de la matriz $A\cdot B$ es máximo, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & t-1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix} \ y \ B=\begin{pmatrix} t+1 & 1 & t \\ 0 & t & -2t+1 \\ t+1 & t+1 & -t-1 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

P3) Calcula la ecuación continua de la recta perpendicular a r y s que corta a ambas, siendo

$$r\equiv\begin{cases} x-y-z+2=0 \\ x-3y+3z-8=0 \end{cases} \quad y \quad s\equiv\frac{x-2}{3}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-0}{-2}$$

(2.5 puntos)

P4) Sean $P(1,5,-1)$ y la recta $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+4}{2}$.

a) Calcula el punto $Q\in r$ tal que la distancia de P a Q sea mínima.

(1,25 puntos)

b) Halla los puntos Q_1 y Q_2 pertenecientes a r tales que $d(P,Q_1)=d(P,Q_2)=3\sqrt{2}$:

(1,25 puntos)

P5) Calcule las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{2x-5}{x^2+x-2}dx$

(1.25 puntos)

b) $\int x\ln x dx$

(1.25 puntos)

P6) Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos^2(\pi x)-1}{1-x} & x<1 \\ \ln\left(x\cdot e^{x+1}\right)-2x & x\geq 1\end{cases}.$$

(2.5 puntos)

P7) Se considera la función $f(x)=(x+1)\sin(\pi x)$.

a) Demuestra que es continua en $\mathbb{R}$.

(0.5 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha\in(0,1)$ tal que $f(\alpha)=\frac{3}{4}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(2 puntos)

P8) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x)=2-2x^2 \quad \text{y} \quad g(x)=x^4-x^2$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2.5 puntos)

SOLUCIONES

P1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x+(2a-1)y+\left(\sqrt{2}-2\right)z=2 \\ -ax+ay+2a^2z=\sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2a-1 & \sqrt{2}-2 \\ -a & a & 2a^2 \end{pmatrix}$

La matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2a-1 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ -a & a & 2a^2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2a-1 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ -a & a & 2a^2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 2^a \ -2\cdot\text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 2a-1 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 2a+1 & \sqrt{2} & 2 \end{array} \to \text{Nueva fila } 2^a \end{array}\right\}$$

$$\{a\neq 0\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{a}\cdot\text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} -a & a & 2a^2 & \sqrt{2} \\ a & -a & -a & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2a^2-a & \sqrt{2} \end{array} \to \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2a+1 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2a^2-a & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula la matriz de coeficientes del sistema equivalente obtenido.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2a+1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2a^2-a \end{vmatrix} = (2a+1)\left(2a^2-a\right) = a(2a+1)(2a-1)$$

Se anula cuando $\begin{cases} a=0 \\ 2a+1=0 \to a=-\dfrac{1}{2} \\ 2a-1=0 \to a=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 0, \quad a \neq \frac{-1}{2} \quad y \quad a \neq \frac{1}{2}$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es compatible determinado (tiene solución única).

Resolvemos el sistema equivalente obtenido aplicando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2a+1 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2a^2-a & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y-z=0 \\ (2a+1)y+\sqrt{2}z=2 \\ \left(2a^2-a\right)z=\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a \neq 0 \\ a \neq \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y-z=0 \\ (2a+1)y+\sqrt{2}z=2 \\ \boxed{z=\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y-\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a}=0 \\ (2a+1)y+\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a}=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y=\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a} \\ (2a+1)y+\frac{2}{2a^2-a}=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y=\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a} \\ (2a+1)y=2-\frac{2}{2a^2-a}=\frac{4a^2-2a-2}{2a^2-a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y=\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a} \\ (2a+1)y=\frac{2\left(2a^2-a-1\right)}{2a^2-a}=\frac{2\cdot(a-1)(2a+1)}{2a^2-a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=y+\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a} \\ \boxed{y=\frac{2\cdot(a-1)(2a+1)}{\left(2a^2-a\right)(2a+1)}=\frac{2\cdot(a-1)}{2a^2-a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x=\frac{2\cdot(a-1)}{2a^2-a}+\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a}=\frac{2a-2+\sqrt{2}}{2a^2-a}}$$

La solución es $x=\frac{-a^2+a-1}{a-1}, \quad y=\frac{-a+1}{a-2}, \quad z=\frac{-1}{a-1}$

CASO 2. $a=0$

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

y la matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Por el teorema de Rouché el sistema es incompatible.

OTRA FORMA DE RAZONAR LA INCOMPATIBLIDAD DEL SISTEMA
El sistema equivalente triangular queda:

$$\left.\begin{array}{r}x-y-z=0\\ y+\sqrt{2}z=2\\ 0=\sqrt{2}\end{array}\right\}\ \text{¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es incompatible (no tiene solución)

CASO 3. $a=\dfrac{-1}{2}$

La matriz ampliada queda:

$$A/B=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2\\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2\cdot\text{Fila }3^{a}-\sqrt{2}\cdot\text{ Fila }2^{a}\\ \begin{array}{cccc}0 & 0 & 2 & 2\sqrt{2}\\ 0 & 0 & -2 & -2\sqrt{2}\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\rightarrow\text{Nueva Fila }3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}\overbrace{\begin{matrix}1 & -1 & -1 & 0\end{matrix}}^{A/B}\\ \begin{matrix}0 & 0 & \sqrt{2} & 2\end{matrix}\\ \underbrace{\begin{matrix}0 & 0 & 0\end{matrix}}_{A}\ \ 0\end{pmatrix}$$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada A/B es 2. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas. Por el teorema de Rouché el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\left.\begin{array}{r}x-y-z=0\\ \sqrt{2}z=2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x-y-z=0\\ \boxed{z=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}}\end{array}\right\}\Rightarrow x-y-\sqrt{2}=0\Rightarrow x=y+\sqrt{2}\Rightarrow$$

$$Soluciones:\begin{cases}x=\sqrt{2}+\lambda\\ y=\lambda & ;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=\sqrt{2}\end{cases}$$

CASO 4. $a=\dfrac{1}{2}$

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & \sqrt{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$

y la matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & \sqrt{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Por el teorema de Rouché el sistema es incompatible.

OTRA FORMA DE RAZONAR LA INCOMPATIBLIDAD DEL SISTEMA
El sistema equivalente triangular queda:

$$\left.\begin{array}{r} x-y-z=0\\ 2y+\sqrt{2}z=2\\ 0=\sqrt{2}\end{array}\right\}\text{ ¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es incompatible (no tiene solución)

Resumiendo: Si $a\neq 0,\quad a\neq\frac{-1}{2}\quad y\quad a\neq\frac{1}{2}$ el sistema es compatible determinado siendo su solución $x=\frac{-a^2+a-1}{a-1},\quad y=\frac{-a+1}{a-2},\quad z=\frac{-1}{a-1}$. Si $a=\frac{1}{2}$ o $a=0$ el sistema es incompatible. Si $a=\frac{-1}{2}$ el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones $\begin{cases}x=\sqrt{2}+\lambda\\ y=\lambda\\ z=\sqrt{2}\end{cases}$; $\lambda\in\mathbb{R}$.

P2) Calcula los valores de t para los que el rango de la matriz $A\cdot B$ es máximo, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & t-1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix} \ y \ B=\begin{pmatrix} t+1 & 1 & t \\ 0 & t & -2t+1 \\ t+1 & t+1 & -t-1 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

La matriz A · B es una matriz de dimensiones 3×3, por lo que su rango máximo posible es 3.

Para que su rango sea máximo su determinante debe ser no nulo.
Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & t-1 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix}=1$$

$$|B|=\begin{vmatrix} t+1 & 1 & t \\ 0 & t & -2t+1 \\ t+1 & t+1 & -t-1 \end{vmatrix}=(t+1)\begin{vmatrix} t+1 & 1 & t \\ 0 & t & -2t+1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=(t+1)\left[-t(t+1)-2t+1-t^2-(t+1)(-2t+1)\right]=$$

$$=(t+1)\left[\cancel{-t^2}-t-\cancel{2t}+1\cancel{-t^2}+\cancel{2t^2}-t+\cancel{2t}-1\right]=$$

$$=(t+1)[-2t]$$

$$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|=(1)(t+1)(-2t)=-2t(t+1)$$

$$|A\cdot B|=0\Rightarrow -2t(t+1)=0\Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=-1 \end{cases}$$

El rango de A · B es máximo cuando el valor de t es distinto de 0 y de –1.

P3) Calcula la ecuación continua de la recta perpendicular a r y s que corta a ambas, siendo

$$r \equiv \begin{cases} x-y-z+2=0 \\ x-3y+3z-8=0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-2}{3}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-0}{-2}$$

(2.5 puntos)

Estudiamos previamente la posición relativa de las dos rectas.

$$r \equiv \begin{cases} x-y-z+2=0 \\ x-3y+3z-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y+z-2 \\ x-3y+3z-8=0 \end{cases} \Rightarrow y+z-2-3y+3z-8=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2y+4z-10=0 \Rightarrow y-2z+5=0 \Rightarrow \boxed{y=-5+2z} \Rightarrow \boxed{x=-5+2z+z-2=-7+3z} \Rightarrow$$

$$r \equiv \begin{cases} x=-7+3\lambda \\ y=-5+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(3,2,1) \\ P_r(-7,-5,0) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-2}{3}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-0}{-2} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_s}=(3,-4,-2) \\ Q_s(2,-5,0) \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores de las rectas no son proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(3,2,1) \\ \overrightarrow{v_s}=(3,-4,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{3} \neq \frac{2}{-4}=\frac{1}{-2}$$

Las rectas son secantes o se cruzan. Realizamos el producto mixto de los vectores directores $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y el vector $\overrightarrow{P_rQ_s}$.

$$\overrightarrow{P_rQ_s}=(2,-5,0)-(-7,-5,0)=(9,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(3,2,1) \\ \overrightarrow{v_s}=(3,-4,-2) \\ \overrightarrow{P_rQ_s}=(9,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 9 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0-36+0+36=0$$

Como el producto mixto es nulo las rectas se cortan.

La recta t que nos piden que hallemos pasa por el punto de corte de las rectas y tendrá como vector director el producto vectorial de los vectores directores de la recta r y s.

Hallamos el punto C de corte de las rectas.

$$s \equiv \frac{x-2}{3}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-0}{-2} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_s}=(3,-4,-2) \\ Q_s(2,-5,0) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=2+3\alpha \\ y=-5-4\alpha \\ z=-2\alpha \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} r\equiv\begin{cases} x=-7+3\lambda \\ y=-5+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \\ s\equiv\begin{cases} x=2+3\alpha \\ y=-5-4\alpha \\ z=-2\alpha \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -7+3\lambda=2+3\alpha \\ -5+2\lambda=-5-4\alpha \\ \lambda=-2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7+3(-2\alpha)=2+3\alpha \\ -5+2(-2\alpha)=-5-4\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7-6\alpha=2+3\alpha \\ -5-4\alpha=-5-4\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9=9\alpha \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=2-3=-1 \\ y=-5+4=-1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(-1,-1,2)}$$

Hallamos el vector director de la recta *t*.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(3,2,1) \\ \overrightarrow{v_s}=(3,-4,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{w_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix}=$$

$$=-4i+3j-12k-6k+6j+4i=9j-18k=(0,9,-18)$$

Escribimos la ecuación continua de la recta *t*.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{w_t}=(0,9,-18)\to\overrightarrow{v_t}=(0,1,-2) \\ M(-1,-1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{t\equiv\frac{x+1}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-2}}$$

P4) Sean $P(1,5,-1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{2}$.

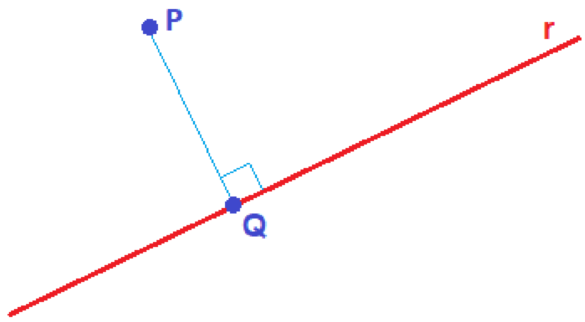
a) Calcula el punto $Q \in r$ tal que la distancia de P a Q sea mínima.

(1,25 puntos)

b) Halla los puntos Q_1 y Q_2 pertenecientes a r tales que $d(P,Q_1) = d(P,Q_2) = 3\sqrt{2}$:

(1,25 puntos)

a) El punto Q buscado es la proyección ortogonal del punto P en la recta *r*.



Para determinar el punto Q determinamos el plano π perpendicular a la recta que pasa por P. Dicho plano tiene como vector normal el director de la recta.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,1,2) \\ A_r(1,2,-4) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \vec{n} = \overrightarrow{u_r} = (2,1,2) \\ P(1,5,-1) \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \pi: 2x + y + 2z + D = 0 \\ P(1,5,-1) \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2+5-2+D=0 \Rightarrow D=-5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: 2x + y + 2z - 5 = 0$$

El punto Q es el punto de corte del plano π y la recta *r*.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,1,2) \\ A_r(1,2,-4) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = -4+2\lambda \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \pi: 2x + y + 2z - 5 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = -4+2\lambda \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2(1+2\lambda) + 2 + \lambda + 2(-4+2\lambda) - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 4\lambda + 2 + \lambda - 8 + 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow 9\lambda = 9 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1+2 = 3 \\ y = 2+1 = 3 \\ z = -4+2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(3,3,-2)}$$

b) La recta tiene ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = -4+2\lambda \end{cases}$

Los puntos están en la recta y tienen coordenadas $Q_1(1+2a, 2+a, -4+2a)$.

$$\overrightarrow{PQ_1} = (1+2a, 2+a, -4+2a) - (1,5,-1) = (2a, a-3, 2a-3)$$

$$d(P,Q_1) = 3\sqrt{2} \Rightarrow \left|\overrightarrow{PQ_1}\right| = 3\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{(2a)^2 + (a-3)^2 + (2a-3)^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{4a^2 + a^2 + 9 - 6a + 4a^2 + 9 - 12a} = 3\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{9a^2 - 18a + 18} = \sqrt{18} \Rightarrow \begin{cases} 9a^2 - 18a + 18 = 18 \to 9a^2 - 18a = 0 \to a^2 - 2a = 0 \to \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases} \\ o \\ -(9a^2 - 18a + 18) = 18 \to 9a^2 - 18a + 36 = 0 \to \\ \to a^2 - 2a + 4 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(4)}}{2} = \nexists \end{cases}$$

Obtenemos dos valores que sustituimos en las ecuaciones de la recta obteniendo los puntos Q_1 y Q_2.

$$a = 0 \Rightarrow Q_1(1+0, 2+0, -4+0) = (1,2,-4)$$

$$a = 2 \Rightarrow Q_2(1+4, 2+2, -4+4) = (5,4,0)$$

Los puntos buscados son $Q_1(1,2,-4)$ y $Q_2(5,4,0)$

P5) Calcule las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{2x-5}{x^2+x-2}dx$

(1.25 puntos)

b) $\int x\ln x dx$

(1.25 puntos)

a) Aplicamos el método de descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{2x-5}{x^2+x-2}dx = \ldots$$

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-2)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{-1+3}{2}=1=x\\ \frac{-1-3}{2}=-2=x\end{cases}$$

$$\frac{2x-5}{x^2+x-2}=\frac{2x-5}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}\Rightarrow \frac{2x-5}{(x-1)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-5=A(x+2)+B(x-1)\Rightarrow\begin{cases}x=-2\to -9=B(-3)\to B=3\\ x=1\to -3=3A\to A=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x-5}{x^2+x-2}=\frac{-1}{x-1}+\frac{3}{x+2}$$

$$\ldots=\int \frac{-1}{x-1}+\frac{3}{x+2}dx=\int\frac{-1}{x-1}dx+\int\frac{3}{x+2}dx=\boxed{-\ln|x-1|+3\ln|x+2|+K}$$

b)

$$\int x\ln x dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln x\to du=\frac{1}{x}dx\\ dv=xdx\to v=\int xdx=\frac{x^2}{2}\end{array}\right\}=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{x^2\ln x}{2}-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}=\boxed{\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+K}$$

P6) Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos^2(\pi x)-1}{1-x} & x<1\\ \ln\left(x\cdot e^{x+1}\right)-2x & x\geq 1\end{cases}.$$

(2.5 puntos)

En el intervalo $(-\infty,1)$ la función es composición de funciones continuas, el único problema es cuando se anula el denominador y si eso ocurre en el intervalo $(-\infty,1)$.

$$1-x=0\Rightarrow x=1\notin(-\infty,1)$$

En el intervalo $[1,+\infty)$ la función es composición de funciones continuas, el único problema es comprobar que existe el logaritmo neperiano, para ello la expresión $x\cdot e^{x+1}$ debe ser positiva, como la función exponencial siempre es positiva, debe ser positivo el valor de *x*, lo cual se cumple, pues son valores mayores que 1.

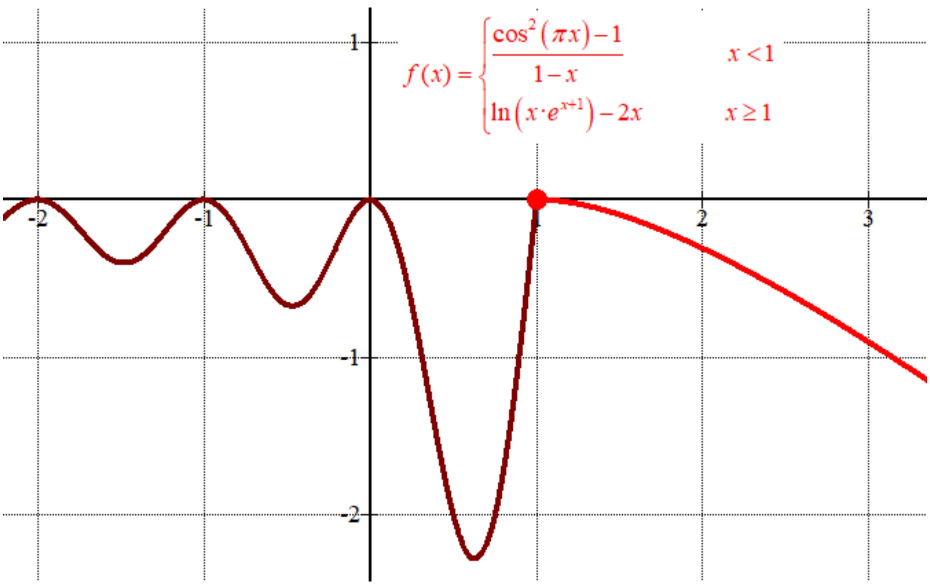
Falta comprobar la continuidad en el cambio de definición *x = 1*

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cos^2(\pi x)-1}{1-x}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{2\cos(\pi x)(-sen(\pi x)\pi)}{-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-2\pi\cos(\pi x)sen(\pi x)}{-1}=2\pi\cos(\pi)sen(\pi)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\ln\left(1\cdot e^{1+1}\right)-2\cdot 1=\ln\left(e^2\right)-2=2-2=0\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\ln\left(x\cdot e^{x+1}\right)-2x=0\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=0$$

La función es continua en *x = 1*. La función es continua en $\mathbb{R}$.



P7) Se considera la función $f(x)=(x+1)\sin(\pi x)$.

a) Demuestra que es continua en $\mathbb{R}$. (0.5 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (0,1)$ tal que $f(\alpha)=\frac{3}{4}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (2 puntos)

a) La función es producto y composición de funciones continuas.
La función es continua en $\mathbb{R}$.

b) Utilizamos el teorema de los valores intermedios (Teorema de Darboux):
Sea *f* continua en $[a,b]$ y sea *m* tal que $f(a)<m<f(b)$ entonces existe un valor $c\in[a,b]$ tal que *f(c) = m*.

Consideramos la función $f(x)=(x+1)\sin(\pi x)$, que es continua en $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

Como $f(0)=(0+1)\sin(\pi\cdot 0)=0$ y $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+1\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{2}$.

Tenemos que $f(0)=0<\frac{3}{4}<f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$.

Aplicando el teorema de los valores intermedios existe $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ tal que $f(\alpha)=\frac{3}{4}$. Este valor α obtenido también está incluido en el intervalo (0, 1).

P8) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x)=2-2x^2 \quad \text{y} \quad g(x)=x^4-x^2$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.
(2.5 puntos)

Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow 2-2x^2=x^4-x^2 \Rightarrow x^4+x^2-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-2)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}\dfrac{-1+3}{2}=1=x^2 \to x=\sqrt{1}=\pm 1\\ \dfrac{-1-3}{2}=-2=x^2 \to x=\sqrt{-2}=\nexists\end{cases}$$

El área se encuentra entre *x = –1* y *x = 1*.
Tomando un valor *x = 0* entre –1 y 1 tenemos que $f(0)=2-2\cdot 0^2=2$ y $g(0)=0^4-0^2=0$.
Tenemos que *f(x) > g(x)* en el intervalo (–1, 1).
El valor del área es la integral definida entre –1 y 1 de *f(x) – g(x)*.

$$Área=\int_{-1}^{1} f(x)-g(x)\,dx=\int_{-1}^{1} 2-2x^2-(x^4-x^2)\,dx=\int_{-1}^{1} 2-2x^2-x^4+x^2dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}-x^4-x^2+2dx=\left[-\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-1}^{1}=\left[-\frac{1^5}{5}-\frac{1^3}{3}+2\cdot 1\right]-\left[-\frac{(-1)^5}{5}-\frac{(-1)^3}{3}+2(-1)\right]=$$

$$=-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+2-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+2=\boxed{\frac{44}{15}\simeq 2.93\ u^2}$$