Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2022-2023

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} ax+y-2z=0 \\ 3ax+a^2y-2a^2z=3 \\ -ax-y+\left(a^2-1\right)z=a+\sqrt{3}-1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Calcula el valor de a para que la siguiente matriz no sea regular

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & a+3 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

P3) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P\left(-3,-2,3\right)$ y que corta a las rectas r y s, siendo

$$r\equiv\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{cases} \quad y \quad s\equiv\frac{x-3}{-1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z+3}{1}$$

(2.5 puntos)

P4) Halla el plano paralelo a r y s que se encuentra a *3u* de r y *6u* de s siendo

$$r\equiv\begin{cases} 2x-y+2z+7=0 \\ 5x+2y+2z-2=0 \end{cases} \qquad s\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-5}{-1}.$$

(2,5 puntos)

P5) Calcula las derivadas de las siguientes funciones y sus valores en el punto $x = 0$.

a) $f(x) = \ln\left[\cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x}\right]$

(1.25 puntos)

b) $g(x) = \arctan\sqrt{1+2x+e^{2x}}$

(1.25 puntos)

P6) Se considera la función $f(x) = \dfrac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]}{x^2-6x+10}$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo [1, 4]. (0,75 puntos)

b) Comprueba que existen dos valores α y β en el intervalo (1, 4) tales que $f(\alpha) = \dfrac{-1}{2} = f(\beta)$.

Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.75 puntos)

P7) Se considera la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2} - \sin\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)}$.

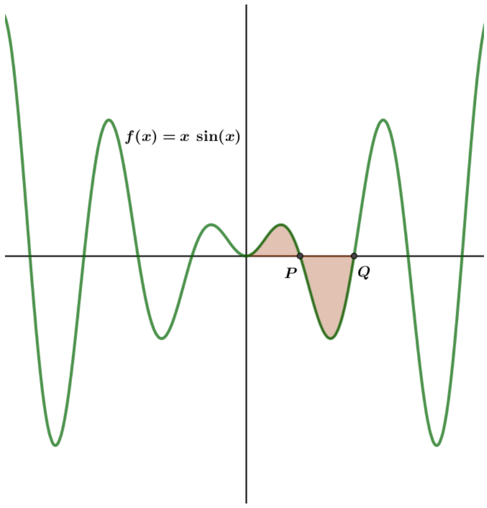
a) Demuestra que la función es continua en el intervalo [7, 11] y derivable en (7, 11).

(1.25 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (7,11)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1,25 puntos)

P8) La curva de la imagen corresponde a la función $f(x) = x \cdot \sin x$. Tal y como se intuye, la curva corta el eje OX en infinitos puntos:



Encuentra los puntos P y Q, y, a continuación, calcula el área de la región del plano sombreada.

(2.5 puntos)

SOLUCIONES

P1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} ax+y-2z=0 \\ 3ax+a^2y-2a^2z=3 \\ -ax-y+\left(a^2-1\right)z=a+\sqrt{3}-1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2.5 puntos)

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 3a & a^2 & -2a^2 \\ -a & -1 & a^2-1 \end{pmatrix}$

La matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} a & 1 & -2 & 1 \\ 3a & a^2 & -2a^2 & 3 \\ -a & -1 & a^2-1 & a+\sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$A/B=\begin{pmatrix} a & 1 & -2 & 1 \\ 3a & a^2 & -2a^2 & 3 \\ -a & -1 & a^2-1 & a+\sqrt{3}-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^{\text{a}} -3 \cdot \text{Fila } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} 3a & a^2 & -2a^2 & 3 \\ -3a & -3 & 6 & -3 \\ \hline 0 & a^2-3 & -2a^2+6 & 0 \end{array} \to \text{Nueva fila } 2^{\text{a}} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^{\text{a}} + \text{Fila } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} -a & -1 & a^2-1 & a+\sqrt{3}-1 \\ a & 1 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & a^2-3 & a+\sqrt{3} \end{array} \to \text{Nueva fila } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & -2 & 1 \\ 0 & a^2-3 & -2a^2+6 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-3 & a+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula la matriz de coeficientes del sistema equivalente obtenido.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ 0 & a^2-3 & -2a^2+6 \\ 0 & 0 & a^2-3 \end{vmatrix} = a\left(a^2-3\right)\left(a^2-3\right)$$

Se anula cuando $\begin{cases} a=0 \\ a^2-3=0 \to a^2=3 \to a=\pm\sqrt{3} \end{cases}$

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a\neq 0, \quad a\neq -\sqrt{3} \quad y \quad a\neq +\sqrt{3}$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es compatible determinado (tiene solución única).

Resolvemos el sistema equivalente obtenido aplicando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & -2 & 1 \\ 0 & a^2-3 & -2a^2+6 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-3 & a+\sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} ax+y-2z=1 \\ (a^2-3)y+\left(-2a^2+6\right)z=0 \\ \left(a^2-3\right)z=a+\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{a \neq \pm\sqrt{3}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} ax+y-2z=1 \\ (a^2-3)y-2\left(a^2-3\right)z=0 \\ \boxed{z=\dfrac{a+\sqrt{3}}{a^2-3}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} ax+y-2\dfrac{a+\sqrt{3}}{a^2-3}=1 \\ (a^2-3)y-2\cancel{\left(a^2-3\right)}\dfrac{a+\sqrt{3}}{\cancel{a^2-3}}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} ax+y=1+\dfrac{2\left(a+\sqrt{3}\right)}{a^2-3} \\ (a^2-3)y-2\left(a+\sqrt{3}\right)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} ax+y=1+\dfrac{2\left(a+\sqrt{3}\right)}{a^2-3} \\ (a^2-3)y=2\left(a+\sqrt{3}\right) \to \boxed{y=\dfrac{2\left(a+\sqrt{3}\right)}{a^2-3}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax+\frac{2\left(a+\sqrt{3}\right)}{a^2-3}=1+\frac{2\left(a+\sqrt{3}\right)}{a^2-3} \Rightarrow ax=1 \Rightarrow \{a \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{a}}$$

Simplificamos las soluciones.

$$z=\frac{a+\sqrt{3}}{a^2-3}=\frac{a+\sqrt{3}}{\left(a+\sqrt{3}\right)\left(a-\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{a-\sqrt{3}}$$

$$y=\frac{2\left(a+\sqrt{3}\right)}{a^2-3}=\frac{2}{a-\sqrt{3}}$$

La solución es $x=\dfrac{1}{a}$, $y=\dfrac{2}{a-\sqrt{3}}$, $z=\dfrac{1}{a-\sqrt{3}}$

CASO 2. $a=0$

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

y la matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

El rango de A es 2 pues tiene la primera columna nula. Comprobamos que el rango de A/B es 3 tomando el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª..

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 6\sqrt{3}+9+6\sqrt{3} \neq 0$$

El rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Por el teorema de Rouché el sistema es incompatible.

CASO 3. $a=\sqrt{3}$

La matriz ampliada queda:

$$A/B = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \sqrt{3} & 1 & -2 \end{matrix}}^{} & 1 \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}^{A/B}$$

Por lo que el rango de A es 1 y el de la ampliada A/B es 2. Los rangos son distintos. Por el teorema de Rouché el sistema es incompatible (sin solución).

CASO 4. $a=-\sqrt{3}$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

y la matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por lo que el rango de A es 1 y el de la ampliada también es 1, pero es menor que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Lo resolvemos.

$$-\sqrt{3}x+y-2z=1 \Rightarrow y=\sqrt{3}x+2z+1 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=\alpha \\ y=\sqrt{3}\alpha+2\beta+1, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R} \\ z=\beta \end{cases}}$$

Resumiendo: Si $a\neq 0$, $a\neq -\sqrt{3}$ *y* $a\neq +\sqrt{3}$ el sistema es compatible determinado siendo su solución $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{2}{a-\sqrt{3}}$, $z=\frac{1}{a-\sqrt{3}}$. Si $a=\sqrt{3}$ o $a=0$ el sistema es incompatible. Si $a=-\sqrt{3}$ el sistema es compatible indeterminado con soluciones $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\sqrt{3}\alpha+2\beta+1, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R} \\ z=\beta \end{cases}$.

P2) Calcula el valor de *a* para que la siguiente matriz no sea regular

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & a+3 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

Para que la matriz sea no regular su determinante debe ser nulo.
Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & a+3 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}=\left\{\begin{array}{l} \text{Columna } 4^{\text{a}} \; - \; \text{Columna } 3^{\text{a}} \\ \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ a+3 & -1 & a+2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Columna } 4^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$|A|=\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & a+2 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=\left\{\text{Desarrollo por la } 4^{\text{a}} \text{ columna}\right\}=$$

$$=(a+2)\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=(a+2)(-6-8+0-2+12-0)=-4(a+2)$$

$$|A|=0 \Rightarrow -4(a+2)=0 \Rightarrow a+2=0 \Rightarrow \boxed{a=-2}$$

La matriz A es no regular cuando $a=-2$.

P3) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(-3,-2,3)$ y que corta a las rectas r y s, siendo

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-3}{-1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z+3}{1}$$

(2.5 puntos)

Estudiamos previamente la posición relativa de las dos rectas.

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y+z+1 \\ x-y+2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow -y+z+1-y+2z+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2y+3z+2=0 \Rightarrow -2y=-3z-2 \Rightarrow \boxed{y=\frac{3}{2}z+1} \Rightarrow x=-\frac{3}{2}z-1+z+1 \Rightarrow \boxed{x=\frac{-1}{2}z} \Rightarrow$$

$$r \equiv \begin{cases} x=\dfrac{-1}{2}\alpha \\ y=1+\dfrac{3}{2}\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},1\right) \to \overrightarrow{w_r}=(-1,3,2) \\ P_r(0,1,0) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-3}{-1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z+3}{1} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_s}=(-1,2,1) \\ Q_s(3,-5,-3) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=3-\lambda \\ y=-5+2\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=-3+\lambda \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores de las rectas no son proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

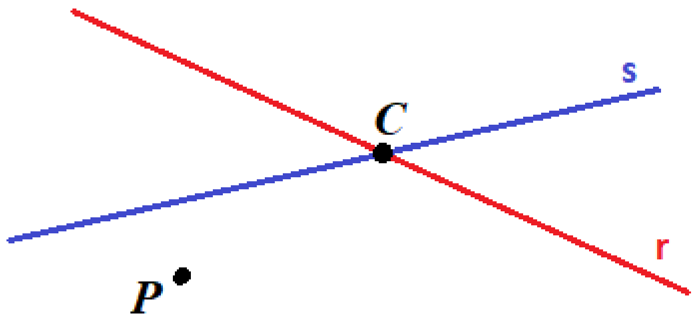
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{w_r}=(-1,3,2) \\ \overrightarrow{v_s}=(-1,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-1}{-1} \neq \frac{3}{2} \neq \frac{2}{1}$$

Las rectas son secantes o se cruzan. Realizamos el producto mixto de los vectores directores $\overrightarrow{w_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y el vector $\overrightarrow{P_rQ_s}$.

$$\overrightarrow{P_rQ_s}=(3,-5,-3)-(0,1,0)=(3,-6,-3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{w_r}=(-1,3,2) \\ \overrightarrow{v_s}=(-1,2,1) \\ \overrightarrow{P_rQ_s}=(3,-6,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{w_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & -3 \end{vmatrix}=6+9+12-12-9-6=0$$

Como el producto mixto es nulo las rectas se cortan.



La recta t que nos piden que hallemos pasa por el punto de corte de las rectas y por el punto $P(-3,-2,3)$.

Hallamos el punto C de corte de las rectas.

$$\left. \begin{array}{l} s \equiv \begin{cases} x = 3-\lambda \\ y = -5+2\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -3+\lambda \end{cases} \\ r \equiv \begin{cases} x = \frac{-1}{2}\alpha \\ y = 1+\frac{3}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 3-\lambda = \frac{-1}{2}\alpha \\ -5+2\lambda = 1+\frac{3}{2}\alpha \\ -3+\lambda = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3-\lambda = \frac{-1}{2}(\lambda-3) \\ -5+2\lambda = 1+\frac{3}{2}(\lambda-3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6-2\lambda = -\lambda+3 \\ -10+4\lambda = 2+3\lambda-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = \lambda \\ \lambda = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3-3 = 0 \\ y = -5+6 = 1 \Rightarrow C(0,1,0) \\ z = -3+3 = 0 \end{cases}$$

Escribimos la ecuación continua de la recta t.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PC} = (0,1,0)-(-3,-2,3) = (3,3,-3) \to \vec{v}_t = (1,1,-1) \\ P(-3,-2,3) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{t \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}}$$

P4) Halla el plano paralelo a r y s que se encuentra a $3u$ de r y $6u$ de s siendo

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z + 7 = 0 \\ 5x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-5}{-1}.$$

(2,5 puntos)

Estudiamos previamente la posición relativa de las dos rectas.

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z + 7 = 0 \\ 5x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2z + 7 = y \\ 5x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x + 2(2x + 2z + 7) + 2z - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x + 4x + 4z + 14 + 2z - 2 = 0 \Rightarrow 9x + 6z + 12 = 0 \Rightarrow 3x + 2z + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = -4 - 2z \Rightarrow \boxed{x = \frac{-4}{3} - \frac{2}{3}z} \Rightarrow y = 2\left(\frac{-4}{3} - \frac{2}{3}z\right) + 2z + 7 = \frac{-8}{3} - \frac{4}{3}z + 2z + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{13}{3} + \frac{2}{3}z} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \dfrac{-4}{3} - \dfrac{2}{3}\alpha \\ y = \dfrac{13}{3} + \dfrac{2}{3}\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, 1\right) \to \overrightarrow{w_r} = (-2, 2, 3) \\ \alpha = 1 \to P_r(-2, 5, 1) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-5}{-1} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (2, 0, -1) \\ Q_s(1, -3, 5) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -3 \\ z = 5 - \lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Las coordenadas de los vectores directores de las rectas no son proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{w_r} = (-2, 2, 3) \\ \overrightarrow{v_s} = (2, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-2}{2} \neq \frac{2}{0} \neq \frac{3}{-1}$$

Las rectas son secantes o se cruzan. Realizamos el producto mixto de los vectores directores $\overrightarrow{w_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y el vector $\overrightarrow{P_rQ_s}$.

$$\overrightarrow{P_rQ_s} = (1, -3, 5) - (-2, 5, 1) = (3, -8, 4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{w_r} = (-2, 2, 3) \\ \overrightarrow{v_s} = (2, 0, -1) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (3, -8, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{w_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -8 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 6 - 48 - 0 - 16 + 16 = -54 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

El plano paralelo a *r* y *s* tiene como vector normal el producto vectorial de los vectores directores de las rectas.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{w_r}=(-2,2,3)\\ \overrightarrow{v_s}=(2,0,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{n}=\overrightarrow{w_r}\times\overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -2 & 2 & 3\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=-2i+6j-4k-2j=-2i+4j-4k=(-2,4,-4)$$

Hallamos la ecuación de los planos paralelos a las rectas *r* y *s*. Tomaremos como vector normal del plano el obtenido con el producto vectorial pero dividido por 2.

$$\vec{n'}=(-1,2,-2)\Rightarrow \pi:-x+2y-2z+D=0$$

Le aplicamos que se encuentra a *3u* de *r* y *6u* de *s*. También sabemos que las rectas y el plano son paralelos, por lo que la distancia de cualquiera de las rectas al plano es la distancia de uno de sus puntos al plano.

$$\left.\begin{array}{l}\pi:-x+2y-2z+D=0\\ P_r(-2,5,1)\end{array}\right\}\Rightarrow d(r,\pi)=d(P_r,\pi)=\frac{|2+10-2+D|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|10+D|}{3}$$

$$d(r,\pi)=3\Rightarrow\frac{|10+D|}{3}=3\Rightarrow\begin{cases}\frac{10+D}{3}=3\rightarrow 10+D=9\rightarrow\boxed{D=-1}\\ \frac{10+D}{3}=-3\rightarrow 10+D=-9\rightarrow D=-19\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi:-x+2y-2z+D=0\\ Q_s(1,-3,5)\end{array}\right\}\Rightarrow d(s,\pi)=d(Q_s,\pi)=\frac{|-1-6-10+D|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|-17+D|}{3}$$

$$d(s,\pi)=6\Rightarrow\frac{|-17+D|}{3}=6\Rightarrow\begin{cases}\frac{-17+D}{3}=6\rightarrow -17+D=18\rightarrow D=35\\ \frac{-17+D}{3}=-6\rightarrow -17+D=-18\rightarrow\boxed{D=-1}\end{cases}$$

Las dos condiciones se cumplen simultáneamente para *D = –1*, por lo que el plano buscado tiene ecuación $\pi:-x+2y-2z-1=0$.

P5) Calcula las derivadas de las siguientes funciones y sus valores en el punto $x = 0$.

a) $f(x)=\ln\left[\cos(\pi x)\cdot e^{x^2+2x}\right]$

(1.25 puntos)

b) $g(x)=\arctan\sqrt{1+2x+e^{2x}}$

(1.25 puntos)

a)

$$f'(x)=\frac{\left[\cos(\pi x)\cdot e^{x^2+2x}\right]'}{\cos(\pi x)\cdot e^{x^2+2x}}=\frac{-\pi sen(\pi x)e^{x^2+2x}+\cos(\pi x)(2x+2)e^{x^2+2x}}{\cos(\pi x)\cdot e^{x^2+2x}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-\pi sen(\pi x)e^{x^2+2x}+(2x+2)\cos(\pi x)e^{x^2+2x}}{\cos(\pi x)\cdot e^{x^2+2x}}}$$

$$\boxed{f'(0)=\frac{-\pi sen(0)e^{0^2+0}+(0+2)\cos(0)e^{0^2+0}}{\cos(0)\cdot e^{0^2+0}}=\frac{0+2}{1}=2}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

$$f(x)=\ln\left[\cos(\pi x)\cdot e^{x^2+2x}\right]=\ln\left[\cos(\pi x)\right]+\ln\left[e^{x^2+2x}\right]=\ln\left[\cos(\pi x)\right]+x^2+2x$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-\pi sen(\pi x)}{\cos(\pi x)}+2x+2=2x+2-\pi tg(\pi x)}$$

$$\boxed{f'(0)=2\cdot 0+2-\pi tg(\pi\cdot 0)=0+2-\pi\cdot 0=2}$$

a)

$$g'(x)=\frac{\left(\sqrt{1+2x+e^{2x}}\right)'}{1+\left(\sqrt{1+2x+e^{2x}}\right)^2}=\frac{\frac{2+2e^{2x}}{2\sqrt{1+2x+e^{2x}}}}{1+1+2x+e^{2x}}=\frac{2+2e^{2x}}{2\left(2+2x+e^{2x}\right)\sqrt{1+2x+e^{2x}}}$$

$$\boxed{g'(x)=\frac{1+e^{2x}}{\left(2+2x+e^{2x}\right)\sqrt{1+2x+e^{2x}}}}$$

$$\boxed{g'(0)=\frac{1+e^0}{\left(2+0+e^0\right)\sqrt{1+0+e^0}}=\frac{2}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

P6) Se considera la función $f(x)=\dfrac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]}{x^2-6x+10}$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[1,4]$. (0,75 puntos)

b) Comprueba que existen dos valores α y β en el intervalo (1, 4) tales que $f(\alpha)=\dfrac{-1}{2}=f(\beta)$.

Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.75 puntos)

La función $\cos\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]$ es composición de funciones continuas, el único problema es cuando se anula el denominador y si eso ocurre en el intervalo $[1,4]$.

$$x^2-6x+10=0 \Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4(1)(10)}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-4}}{2}=\nexists$$

El denominador nunca se anula y por tanto la función es continua.

b) Usaremos el teorema de Darboux:
Sea *f* continua en $[a,b]$ y sea *m* tal que $f(a)<m<f(b)$ entonces existe un valor $c\in[a,b]$ tal que *f(c) = m*.
En el intervalo $[1,4]$ buscamos valores de la función con distinto signo.

$$f(1)=\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(1-1)\right]}{1^2-6+10}=\frac{1}{5} \qquad f(2)=\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(2-1)\right]}{2^2-12+10}=\frac{0}{2}=0$$

$$f(3)=\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(3-1)\right]}{3^2-18+10}=\frac{-1}{1}=-1 \qquad f(4)=\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(4-1)\right]}{4^2-24+10}=\frac{0}{2}=0$$

Consideramos la función $g(x)=-f(x)$. Así g(2) = 0 y g(3) = 1.

La función *g(x)* es continua en el intervalo $[2,3]$ y se cumple que $g(2)=0<\frac{1}{2}<1=g(3)$

aplicando el teorema de Darboux existe $\alpha\in(2,3)$ tal que $g(\alpha)=\frac{1}{2}$.

Esto implica que existe $\alpha\in(2,3)$ tal que $f(\alpha)=-\frac{1}{2}$.

Como la función *f(x)* es continua en el intervalo $[3,4]$ y se cumple que $f(3)<-\frac{1}{2}<f(4)$

aplicando el teorema de Darboux existe $\beta\in(3,4)$ tal que $f(\beta)=-\frac{1}{2}$.

Como los valores α y β pertenecen a intervalos distintos son valores diferentes y pertenecientes al intervalo $(1,4)$.

Existen $\alpha,\ \beta\in(1,4)$ tales que $f(\alpha)=\frac{-1}{2}=f(\beta)$.

P7) Se considera la función $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}-\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[7,11]$ y derivable en (7, 11).

(1.25 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha\in(7,11)$ tal que $f´(\alpha)=0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1,25 puntos)

a) La función es suma y composición de funciones continuas.
Solo falta comprobar que el radicando es positivo en el intervalo $[7,11]$.

$$x\in[7,11]\Rightarrow 7\le x\le 11\Rightarrow \frac{7\pi}{6}\le\frac{\pi x}{6}\le\frac{11\pi}{6}\Rightarrow \pi\le\frac{7\pi}{6}\le\frac{\pi x}{6}\le\frac{11\pi}{6}\le 2\pi\Rightarrow$$

$$\frac{\pi x}{6}\in(\pi,2\pi)\Rightarrow\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)<0\Rightarrow-\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)>0\Rightarrow\boxed{\frac{1}{2}-\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)>\frac{1}{2}>0}$$

La función es continua en $[7,11]$.

La derivada de la función es $f´(x)=\dfrac{0-\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)}{2\sqrt{\frac{1}{2}-\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)}}=\dfrac{-\pi\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)}{12\sqrt{\frac{1}{2}-\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)}}$

Esta derivada existe en el intervalo $[7,11]$ pues hemos comprobado que el denominador nunca se anula.
La función es derivable en $(7,11)$

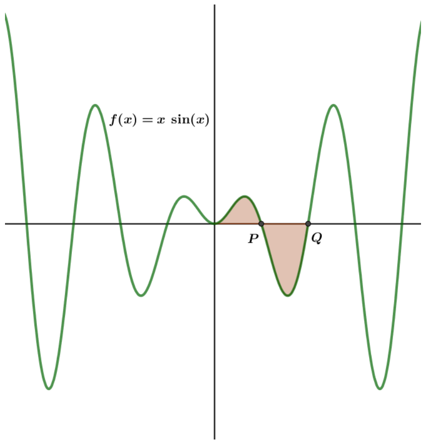
b) Utilizamos el teorema de Rolle:
Sea *f* continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) siendo $f(a)=f(b)$ entonces existe $\alpha\in(a,b)$ tal que $f´(\alpha)=0$.

Consideramos la función $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}-\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)}$, que es continua en $[7,11]$ y derivable en $(7,11)$

, como $\left.\begin{array}{l} f(7)=\sqrt{\frac{1}{2}-\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)}=1 \\ f(11)=\sqrt{\frac{1}{2}-\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow f(7)=f(11)=1.$

Aplicando el teorema de Rolle existe $\alpha\in(7,11)$ tal que $f´(\alpha)=0$.

P8) La curva de la imagen corresponde a la función $f(x)=x\cdot\sin x$. Tal y como se intuye, la curva corta el eje OX en infinitos puntos:



Encuentra los puntos P y Q, y, a continuación, calcula el área de la región del plano sombreada. (2.5 puntos)

Hallamos los puntos de corte de la gráfica con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x\cdot\sin x \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x\cdot\sin x=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ \sin x=0 \Rightarrow x=0;\ x=\pi;\ x=2\pi;\ldots \end{array}\right. \Rightarrow P(\pi,0);\ Q(2\pi,0)$$

El área la calculamos en dos partes que luego sumaremos.

El área entre $x=0$ y $x=\pi$.

Calculamos primero la primitiva de la función.

$$\int f(x)dx=\int x\cdot\sin x dx=\left\{\begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u=x\rightarrow du=dx \\ dv=\sin x dx\rightarrow v=\int \sin x dx=-\cos x \end{array}\right\}=$$

$$=-x\cos x-\int -\cos x dx=-x\cos x+\int \cos x dx=-x\cos x+\sin x+K$$

Calculamos el área como la integral definida de la función entre $x=0$ y $x=\pi$.

$$Área\,1=\int_0^{\pi} x\sin x dx=\left[-x\cos x+\sin x\right]_0^{\pi}=\left[-\pi\cos\pi+\sin\pi\right]-\left[-0\cdot\cos 0+\sin 0\right]=\pi\ u^2$$

El área entre $x=\pi$ y $x=2\pi$.

Calculamos el área como la integral definida de la función entre $x=\pi$ y $x=2\pi$.

$$Área\ 2=\left|\int_{\pi}^{2\pi} x\sin x dx\right|=\left|\left[-x\cos x+\sin x\right]_{\pi}^{2\pi}\right|=$$

$$=\left|\left[-2\pi\cos 2\pi+\sin 2\pi\right]-\left[-\pi\cos\pi+\sin\pi\right]\right|=\left|-3\pi\right|=3\pi\ u^2$$

El área total es la suma del área 1 y el área 2, es decir, $\pi+3\pi=4\pi\ u^2$.