Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
202o OHIKOA	ORDINARIA 2023
MATEMATIKA II	**MATEMÁTICAS II**

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función del parámetro α:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+\alpha y+z=1 \\ 2x+3y+4z=2 \end{cases}$$

Resuelve el sistema en los casos $\alpha=1$ y $\alpha=2$.

Ejercicio B1

Calcula el rango de la matriz *A* según los valores del parámetro α, siendo

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 3 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sea *r* la recta cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$r\equiv\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y+z=2 \end{cases},$$

a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta *r*.

b) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que corta perpendicularmente a *r* y pasa por el punto *P*(2, 1, 0), que es exterior a *r*.

Ejercicio B2

Sean *r* la recta cuya ecuación continua es: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$, los planos de ecuaciones $\pi_1\equiv x+y+z=1$ y $\pi_2\equiv x+y-z=1$. P_1 el punto de corte de la recta *r* con el plano π_1 y P_2 el punto de corte de la recta *r* con el plano π_2. Calcula:

a) las coordenadas de los puntos P_1 y P_2;

b) la distancia entre los puntos P_1 y P_2;

c) la distancia del punto P_1 al plano π_2.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea la función $f(x)=x^4-2x^3+x^2$. Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y encuentra sus máximos y mínimos relativos. Calcula la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x* = 2.

Ejercicio B3

La función $f(x)=Ax^2+Bx+C$ es creciente en el intervalo $(-\infty,1)$ y decreciente en el intervalo $(1,+\infty)$. Además, la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa *x* = 2 es perpendicular a la recta de ecuación *y* = *x* + 2 y $f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Calcula los valores de los parámetros *A*, *B* y *C*.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado inferiormente por la curva de ecuación $y=\frac{x^2}{4}$ y superiormente por las curvas de ecuaciones $y=\frac{4}{x^2}$ e $y = 4$. Calcula el área de ese recinto.

Ejercicio B4

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2}dx, \quad \int (x+2)\sin(3x)\,dx$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

La producción de una empresa la realizan, a partes iguales, cuatro turnos, de los que tres son diurnos y uno nocturno. El porcentaje de piezas defectuosas producidas en cada turno diurno es el 2 % y en el nocturno es del 10 %. Si se toma una pieza al azar de un turno al azar,

a) calcula la probabilidad de que la pieza sea defectuosa;

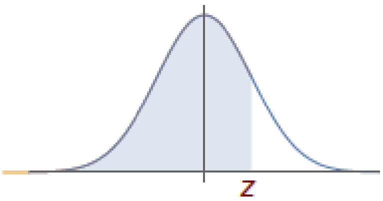
b) si la pieza tomada es defectuosa, calcula la probabilidad de que se haya producido en un turno diurno.

Ejercicio B5

Los resultados obtenidos en una prueba de matemáticas siguen una distribución normal con media 65 puntos y desviación típica 18 puntos. El 15 % del alumnado está en el nivel avanzado, el 65 % en el nivel medio y el 20 % restante en el nivel inicial. Decide, razonando tus respuestas, en qué nivel situaremos a los alumnos o alumnas que han obtenido las siguientes notas:

a) 85,5 puntos,

b) 48 puntos.



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

Soluciones

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función del parámetro α:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+\alpha y+z=1 \\ 2x+3y+4z=2 \end{cases}$$

Resuelve el sistema en los casos $\alpha=1$ y $\alpha=2$.

a) La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=4\alpha+4+9-6\alpha-8-3=-2\alpha+2$$

$$|A|=0\Rightarrow -2\alpha+2=0\Rightarrow 2\alpha=2\Rightarrow \boxed{\alpha=1}$$

Nos planteamos dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\alpha\neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $\alpha=1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente más fácil de estudiar.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} Fila\,2^a-Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \\ \hline 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a-2\cdot Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & -6 & -2 \\ \hline 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} Fila\,3^{a}-Fila\,2^{a} \\ 0 \quad -1 \quad -2 \quad 0 \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^{a} \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}^{A/B} \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $\alpha \neq 1$ el sistema es compatible determinado y si $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos a partir de la matriz triangular equivalente obtenida en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y+3z=1 \\ -y-2z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y+3z=1 \\ \boxed{y=-2z} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x-4z+3z=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=1+z} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2\lambda\,,\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Las soluciones son $x=1+\lambda;\ y=-2\lambda;\ z=\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}$.

Para $\alpha = 2$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+2y+z=1 \\ 2x+3y+4z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2y-3z+1 \\ x+2y+z=1 \\ 2x+3y+4z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y-3z+1+2y+z=1 \\ -4y-6z+2+3y+4z=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2z=0 \Rightarrow \boxed{z=0} \\ -y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow -y-0=0 \Rightarrow \boxed{y=0} \Rightarrow \boxed{x=-0-0+1=1}$$

La solución es $x = 1$; $y = 0$; $z = 0$.

Ejercicio B1

Calcula el rango de la matriz A según los valores del parámetro α, siendo

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 3 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matriz A es de dimensiones 3×4, por lo que el rango de la matriz es 3, 2 o 1.

Tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la 4ª columna. Hallamos su determinante y vemos cuando se anula

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 3 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\alpha^2+0+3\alpha-0-0-0=-\alpha^2+3\alpha$$

$$-\alpha^2+3\alpha=0 \Rightarrow -\alpha(\alpha-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha=0} \\ o \\ \boxed{\alpha=3} \end{cases}$$

Consideramos tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 3$

En este caso el determinante del menor es no nulo y el rango de la matriz A es 3.

CASO 2. $\alpha = 0$

En este caso el determinante del menor es nulo y estudiamos el rango de A.

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Observamos que la primera fila es nula y por tanto el rango de A no es 3.
Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 1ª y las columnas 3ª y 4ª.
Calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

El rango de A es 2.

CASO 3. $\alpha = 3$

En este caso el determinante del menor tomado anteriormente es nulo y estudiamos el rango de A buscando otro menor de orden 3 con determinante no nulo.

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la 1ª columna. Calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0+9+0-0-18-0 = -9 \neq 0$$

El rango de A es 3.

Resumiendo: Si $\alpha \neq 0$ el rango de A es 3 y si $\alpha = 0$ el rango de A es 2.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2
Sea *r* la recta cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y+z=2 \end{cases},$$

a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta *r*.
b) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que corta perpendicularmente a *r* y pasa por el punto *P*(2, 1, 0), que es exterior a *r*.

a)

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y+z+1 \\ 2x+2y+z=2 \end{cases} \Rightarrow -2y+2z+2+2y+z=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3z=0 \Rightarrow \boxed{z=0} \Rightarrow \boxed{x=1-y} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\lambda \qquad ,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}}$$

b) Hallamos la recta *s* que corta perpendicularmente a *r* y pasa por el punto *P*(2, 1, 0), que es exterior a *r* .
Llamamos Q al punto donde *r* y *s* se cortan. Dicho punto pertenece a la recta *r* y por tanto tiene coordenadas $Q(1-\lambda,\lambda,0)$.
Las rectas *r* y *s* se cortan perpendicularmente, por lo que el vector director de la recta *r* y el vector $\overrightarrow{PQ}$ deben ser perpendiculares, es decir, su producto escalar es 0.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\lambda \qquad ,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v}_r=(-1,1,0) \\ z=0 \end{cases} \\ \overrightarrow{PQ}=(1-\lambda,\lambda,0)-(2,1,0)=(-1-\lambda,\lambda-1,0) \\ \vec{v}_r \perp \overrightarrow{PQ} \to \vec{v}_r \cdot \overrightarrow{PQ}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-1,1,0)(-1-\lambda,\lambda-1,0)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\lambda+\lambda-1=0 \Rightarrow 2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \Rightarrow \boxed{Q(1,0,0)} \\ z=0 \end{cases}$$

La recta *s* que corta perpendicularmente a *r* y pasa por el punto *P*(2, 1, 0), que es exterior a *r* es la recta que pasa por el punto P(2, 1, 0) y Q(1, 0, 0).

$$\left.\begin{array}{l} P(2,1,0)\in s \\ Q(1,0,0)\in s \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{u}_s=\overrightarrow{QP}=(2,1,0)-(1,0,0)=(1,1,0) \\ Q(1,0,0)\in s \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s \equiv \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \qquad ,\ \alpha \in \mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}}$$

Ejercicio B2

Sean r la recta cuya ecuación continua es: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$, los planos de ecuaciones $\pi_1 \equiv x+y+z=1$ y $\pi_2 \equiv x+y-z=1$. P_1 el punto de corte de la recta r con el plano π_1 y P_2 el punto de corte de la recta r con el plano π_2. Calcula:

a) las coordenadas de los puntos P_1 y P_2;
b) la distancia entre los puntos P_1 y P_2;
c) la distancia del punto P_1 al plano π_2.

a) Hallamos la ecuación de la recta r en paramétricas.

$$r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1,-1,2) \\ P_r(1,1,1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=1+2\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto P_1.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv x+y+z=1 \\ r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=1+2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 1+\lambda+1-\lambda+1+2\lambda=1 \Rightarrow 2\lambda=-2 \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1-1=0 \\ y=1+1=2 \\ z=1-2=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P_1(0,2,-1)}$$

Hallamos el punto P_2.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_2 \equiv x+y-z=1 \\ r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=1+2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 1+\lambda+1-\lambda-1-2\lambda=1 \Rightarrow -2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow \boxed{P_2(1,1,1)}$$

b) La distancia entre los puntos P_1 y P_2 es el módulo del vector que los une.

$$\left.\begin{array}{l} P_1(0,2,-1) \\ P_2(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2}=(1,1,1)-(0,2,-1)=(1,-1,2)$$

$$d(P_1,P_2)=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\boxed{\sqrt{6} \ unidades}$$

c) Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_2 \equiv x+y-z-1=0 \\ P_1(0,2,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow d(P_1,\pi_2)=\frac{|0+2+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3} \ unidades}$$

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea la función $f(x)=x^4-2x^3+x^2$. Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y encuentra sus máximos y mínimos relativos. Calcula la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x* = 2.

Hallamos la derivada de la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

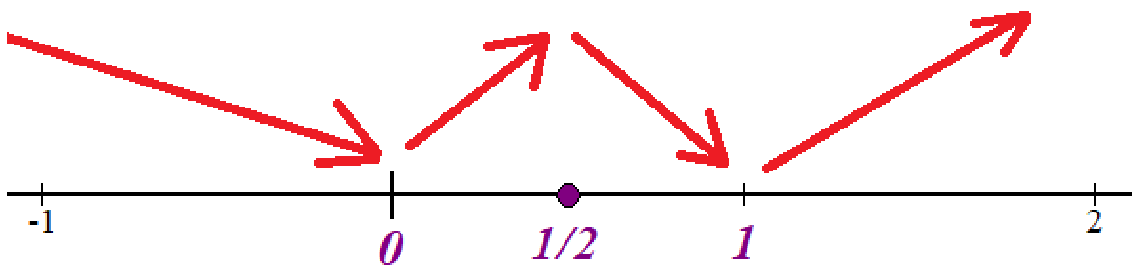
$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=4x^3-6x^2+2x \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x^3-6x^2+2x=0 \Rightarrow 2x\left(2x^2-3x+1\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ 2x^2-3x+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(2)(1)}}{4}=\dfrac{3\pm 1}{4}=\begin{cases} \dfrac{3+1}{4}=\boxed{1=x} \\ \dfrac{3-1}{4}=\boxed{\dfrac{1}{2}=x} \end{cases} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos tres valores obtenidos.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale $f'(-1)=4(-1)^3-6(-1)^2+2(-1)=-12<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.
- En el intervalo $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ tomamos *x = 0.25* y la derivada vale $f'(0.25)=4(0.25)^3-6(0.25)^2+2(0.25)=0.1875>0$. La función crece en $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{1}{2},1\right)$ tomamos *x = 0.75* y la derivada vale $f'(0.75)=4(0.75)^3-6(0.75)^2+2(0.75)=-0.1875<0$. La función decrece en $\left(\frac{1}{2},1\right)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=4(2)^3-6(2)^2+2(2)=32-24+4=12>0$. La función crece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$ y crece en $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = 1/2$ y dos mínimos relativos: uno en $x = 0$ y otro en $x = 1$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene ecuación $y-f(2)=f'(2)(x-2)$.

$$f(x)=x^4-2x^3+x^2 \Rightarrow f(2)=2^4-2\cdot 2^3+2^2=4$$

$$f'(x)=4x^3-6x^2+2x \Rightarrow f'(2)=4\cdot 2^3-6\cdot 2^2+2\cdot 2=32-24+4=12$$

$$y-f(2)=f'(2)(x-2) \Rightarrow y-4=12(x-2) \Rightarrow y-4=12x-24 \Rightarrow \boxed{y=12x-20}$$

Ejercicio B3

La función $f(x)=Ax^2+Bx+C$ es creciente en el intervalo $(-\infty,1)$ y decreciente en el intervalo $(1,+\infty)$. Además, la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 2$ es perpendicular a la recta de ecuación $y = x + 2$ y $f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Calcula los valores de los parámetros *A*, *B* y *C*.

Si la función crece antes de $x = 1$ y decrece después de dicho valor hay un máximo relativo en $x = 1$, por lo que se anula la derivada en $x = 1 \rightarrow f'(1) = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=2Ax+B \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2A+B=0 \Rightarrow \boxed{B=-2A}$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x = 2$ es $f'(2)$ y como es perpendicular a la recta de ecuación $y = x + 2$, que tiene pendiente $m = 1$ entonces la pendiente de la recta tangente es $\frac{-1}{1}=-1 \rightarrow f'(2)=-1$.

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=2Ax+B \\ f'(2)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 4A+B=-1 \Rightarrow \boxed{B=-1-4A}$$

Y por último tenemos que $f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L'Hôpital)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{\cos 0}{1}=1$$

Por lo tanto, tenemos que $f(0) = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=Ax^2+Bx+C \\ f(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A\cdot 0^2+B\cdot 0+C=1 \Rightarrow \boxed{C=1}$$

Reunimos las dos primeras ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} B=-2A \\ B=-1-4A \end{array}\right\} \Rightarrow -2A=-1-4A \Rightarrow 2A=-1 \Rightarrow \boxed{A=\frac{-1}{2}} \Rightarrow \boxed{B=-2\frac{-1}{2}=1}$$

Los valores buscados son $A=\frac{-1}{2},\ B=1,\ C=1$.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado inferiormente por la curva de ecuación $y=\frac{x^2}{4}$ y superiormente por las curvas de ecuaciones $y=\frac{4}{x^2}$ e $y = 4$. Calcula el área de ese recinto.

Averiguamos donde se cortan sus gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{x^2}{4} \\ y=\frac{4}{x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{4}=\frac{4}{x^2} \Rightarrow x^4=16 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt[4]{16}=\pm 2}$$

Como es la región del primer cuadrante solo tomamos $x = 2$.

La función $y=\frac{x^2}{4}$ es una parábola.

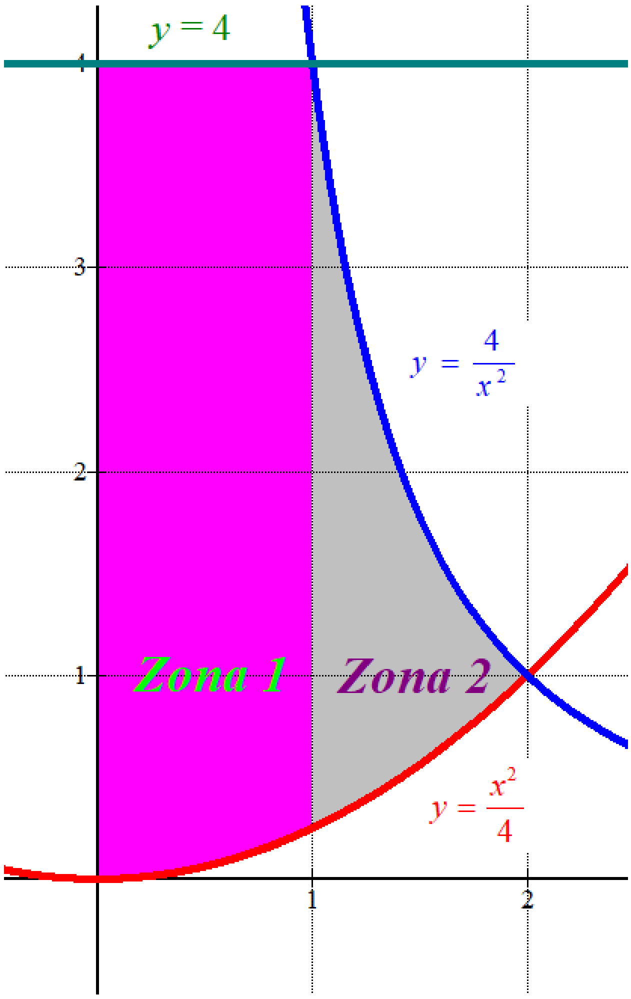
La función $y=\frac{4}{x^2}$ tiene dominio $\mathbb{R}-\{0\}$, presenta una asíntota vertical en $x = 0$.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos las gráficas de las funciones.

x	$y=\frac{x^2}{4}$
0	0
1	0.25
2	1
3	9/4

x	$y=\frac{4}{x^2}$
1	4
2	1
3	4/9

x	$y=4$
0	4
1	4



Hallamos el valor del área de la zona 1.

$$Área1=\int_0^1 4-\frac{x^2}{4}dx=\left[4x-\frac{x^3}{12}\right]_0^1=\left[4(1)-\frac{1^3}{12}\right]-\left[4(0)-\frac{0^3}{12}\right]=4-\frac{1}{12}=\boxed{\frac{47}{12}\simeq 3.916\ u^2}$$

Hallamos el valor del área de la zona 2.

$$Área\,2=\int_1^2 \frac{4}{x^2}-\frac{x^2}{4}dx=\int_1^2 4x^{-2}-\frac{1}{4}x^2dx=\left[4\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{1}{4}\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\left[-\frac{4}{x}-\frac{x^3}{12}\right]_1^2=$$

$$=\left[-\frac{4}{2}-\frac{2^3}{12}\right]-\left[-\frac{4}{1}-\frac{1^3}{12}\right]=-2-\frac{8}{12}+4+\frac{1}{12}=\boxed{\frac{17}{12}\simeq 1.416\ u^2}$$

El área total es la suma de las áreas obtenidas → $\frac{47}{12}+\frac{17}{12}=\frac{64}{12}=\frac{16}{3}\simeq 5.33u^2$

Ejercicio B4

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2}dx, \quad \int (x+2)\sin(3x)dx$$

Resolvemos la primera integral.

$$\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2}dx = \int \frac{x^2+4}{x^2+4+4x}dx = \int \frac{x^2+4+4x-4x}{x^2+4+4x}dx =$$

$$= \int \frac{x^2+4+4x}{x^2+4+4x}dx - \int \frac{4x}{x^2+4+4x}dx = \int dx - \int \frac{4x}{x^2+4+4x}dx = x - \int \frac{4x}{x^2+4+4x}dx = \dots$$

$$\frac{4x}{x^2+4+4x} = \frac{4x}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2}$$

$$4x = A(x+2)+B \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \to -8=B \\ x=0 \to 0=2A+B \to 0=2A-8 \to 2A=8 \to A=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4x}{x^2+4+4x} = \frac{4x}{(x+2)^2} = \frac{4}{x+2} - \frac{8}{(x+2)^2}$$

$$\dots = x - \int \frac{4}{x+2} - \frac{8}{(x+2)^2}dx = x - \int \frac{4}{x+2}dx + \int \frac{8}{(x+2)^2}dx =$$

$$= x - 4\int \frac{1}{x+2}dx + 8\int (x+2)^{-2}dx = x - 4\ln(x+2) + 8\frac{(x+2)^{-1}}{-1} = \boxed{x - \ln(x+2)^4 - \frac{8}{x+2} + K}$$

Resolvemos la segunda integral

$$\int (x+2)\sin(3x)dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x+2 \to du = dx \\ dv = \sin(3x) \to v = \int \sin(3x)dx = \frac{-1}{3}\cos(3x) \end{array} \right\} =$$

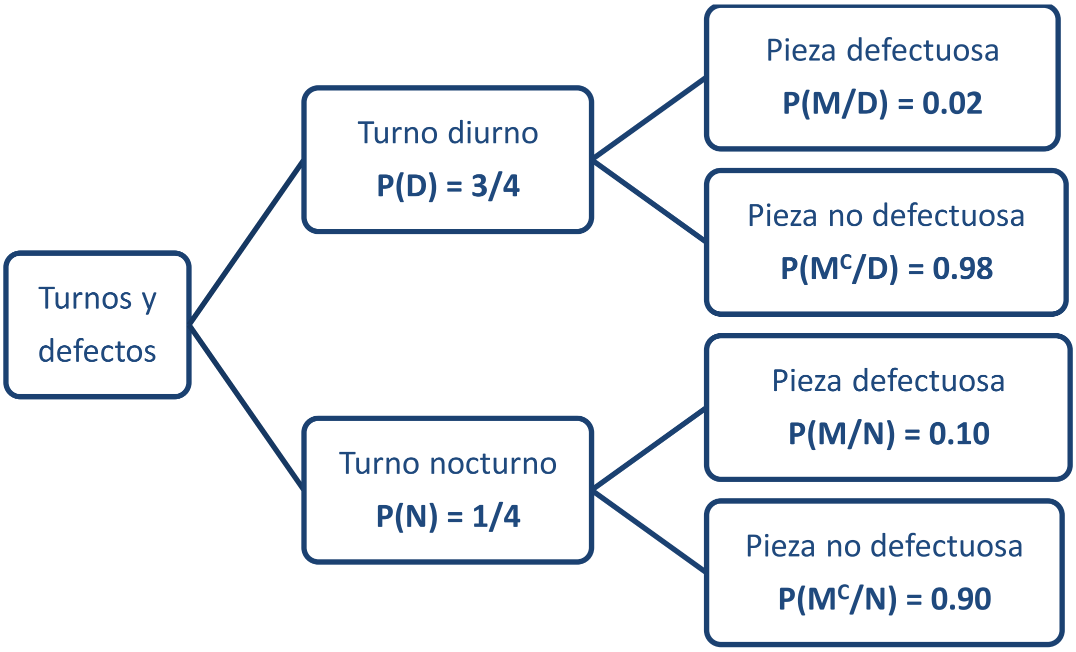
$$= (x+2)\frac{-1}{3}\cos(3x) - \int \frac{-1}{3}\cos(3x)dx = \frac{-x-2}{3}\cos(3x) + \frac{1}{3}\int \cos(3x)dx =$$

$$= \frac{-x-2}{3}\cos(3x) + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin(3x) = \boxed{\frac{-x-2}{3}\cos(3x) + \frac{1}{9}\sin(3x) + K}$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5
La producción de una empresa la realizan, a partes iguales, cuatro turnos, de los que tres son diurnos y uno nocturno. El porcentaje de piezas defectuosas producidas en cada turno diurno es el 2 % y en el nocturno es del 10 %. Si se toma una pieza al azar de un turno al azar,
a) calcula la probabilidad de que la pieza sea defectuosa;
b) si la pieza tomada es defectuosa, calcula la probabilidad de que se haya producido en un turno diurno.

Realizamos un diagrama de árbol para aclarar cómo funciona el experimento aleatorio. Llamamos D al suceso “La pieza se produce en un turno Diurno”, N al suceso “La pieza se produce en un turno Nocturno” y M al suceso “La pieza es defectuosa”.



(a) Nos piden calcular $P(M)$. Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M)=P(D)P(M/D)+P(N)P(M/N)=\frac{3}{4}\cdot 0.02+\frac{1}{4}\cdot 0.10=\boxed{\frac{1}{25}=0.04}$$

(b) Nos piden calcular $P(D/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(D/M)=\frac{P(D\cap M)}{P(M)}=\frac{P(D)P(M/D)}{P(M)}=\frac{\frac{3}{4}\cdot 0.02}{0.04}=\boxed{\frac{3}{8}=0.375}$$

Ejercicio B5

Los resultados obtenidos en una prueba de matemáticas siguen una distribución normal con media 65 puntos y desviación típica 18 puntos. El 15 % del alumnado está en el nivel avanzado, el 65 % en el nivel medio y el 20 % restante en el nivel inicial. Decide, razonando tus respuestas, en qué nivel situaremos a los alumnos o alumnas que han obtenido las siguientes notas:

a) 85,5 puntos,

b) 48 puntos.

X = Resultados obtenidos en una prueba de matemáticas.

X = N(65, 18)

El 20 % del alumnado en el nivel inicial → Hallamos "a" tal que $P(X \leq a) = 0.2$.

$$P(X \leq a) = 0.2 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-65}{18}\right) = 0.2 \Rightarrow \left\{\frac{a-65}{18} < 0\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \geq -\frac{a-65}{18}\right) = 0.2 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq -\frac{a-65}{18}\right) = 0.2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{a-65}{18}\right) = 0.8 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{a-65}{18} = 0.84 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a + 65 = 18 \cdot 0.84 \Rightarrow 65 - 18 \cdot 0.84 = a \Rightarrow \boxed{a = 49.88\ puntos}$$

El 15 % del alumnado está en el nivel avanzado →Hallamos "b" tal que $P(X \geq b) = 0.15$.

$$P(X \geq b) = 0.15 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{b-65}{18}\right) = 0.15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{b-65}{18}\right) = 1 - 0.15 = 0.85 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b-65}{18} = 1.04 \Rightarrow b = 1.04 \cdot 18 + 65 \Rightarrow \boxed{b = 83.72\ puntos}$$

El nivel inicial es por debajo de 49.88 puntos, el nivel medio entre 49.88 y 83.72 y el nivel avanzado por encima de 83.72.

(a) Un alumno con 85.5 puntos se debe situar en nivel avanzado.

(b) Un alumno con 48 puntos se debe situar en nivel inicial.