PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2022-2023

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
- **a)** Duración: 1 hora y 30 minutos
- **b)** Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
- **c)** En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
- **d)** Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
- **e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

a) **(1.5 puntos)** Pruebe que se verifica que $A^{-1}=\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)$.

b) **(1 punto)** Dada la ecuación matricial $X^tA=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$, determine la dimensión de X y resuelva la ecuación.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un artesano decide montar dos tipos de anillos utilizando dos tipos de piedras semipreciosas, una de mayor calidad que otra. Para montar uno de los anillos tarda 20 minutos y utiliza 1 de las piedras de mayor calidad y 2 de las de menor calidad. Para el otro tarda 50 minutos y utiliza 3 piedras de mayor calidad y 1 de menor calidad.
Semanalmente, el artesano dispone de 200 piedras de mayor calidad y 150 de menor calidad. Además, quiere trabajar al menos 1900 minutos a la semana.
Sabiendo que el primer tipo de anillo se vende a 21 €, el segundo a 50 € y que deben fabricarse al menos 20 anillos del primer tipo a la semana, determine cuántos anillos de cada tipo deben montarse para maximizar el valor de la venta. ¿A cuánto asciende dicho valor?

BLOQUE B

EJERCICIO 3

El área quemada de la región plana de la cubierta de plástico de un invernadero, coincide con el área de la región acotada delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)=(x-1)^2$ y $g(x)=5-2x$ donde x está expresado en metros.

a) **(1 punto)** Represente gráficamente la zona deteriorada.

b) **(1.5 puntos)** Para reparar la región quemada, se ha de utilizar plástico cuyo coste es de 15 euros por metro cuadrado. Si en el trabajo de reparación se desperdicia la tercera parte del plástico adquirido, ¿Cuánto costará el plástico comprado?

EJERCICIO 4

Sea la función $f(t)=\dfrac{12t-24}{t+3};\ t\geq 0$

a) **(1.5 puntos)** Represente gráficamente la función *f*, determinando los puntos de corte con los ejes coordenados y las ecuaciones de las asíntotas, y estudiando la monotonía y la curvatura de *f*.

b) Si la función *f* representa los beneficios de una empresa, en millones de euros, donde *t* indica los años de vida de la empresa:

b1) **(0.5 puntos)** ¿A partir de qué año la empresa deja de tener pérdidas? Justifique la respuesta.

b2) **(0.5 puntos)** A medida que pasan los años, ¿están limitados los beneficios? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite y por qué?

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Una caja contiene 3 fichas verdes, 2 fichas azules y 4 fichas rojas. Un juego consiste en realizar dos extracciones, sin reemplazamiento, de tal manera que el jugador que saque dos fichas azules gana el primer premio, el jugador que saque dos fichas verdes gana el segundo premio y el jugador que, de las dos fichas, una sea azul y otra de color diferente gana el tercer premio.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un jugador consiga el primer o segundo premio.

b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un jugador gane el tercer premio.

c) **(1 punto)** Sabiendo que un jugador ha obtenido premio, ¿Cuál es la probabilidad de que haya ganado el tercer premio?

EJERCICIO 6

Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A)=0.6$, $P(B)=0.3$ y $P(A/B)=0.6$. Se pide:

a) **(0.5 puntos)** $P(A\cup B)$

b) **(0.75 puntos)** $P(A-B)+P(B-A)$

c) **(0.75 puntos)** $P(B/A^C)$

d) **(0.5 puntos)** Razone si los sucesos A y B son independientes, ¿Son incompatibles?

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1 punto)** Un gimnasio establece sus tarifas por grupos de edad: juvenil, adulto y senior. Tiene matriculados 25 juveniles, 75 adultos y 50 seniors. Se quiere seleccionar una muestra de 30 personas del gimnasio utilizando un muestreo con afijación proporcional. ¿Cuál será la composición que debe tener dicha muestra?

b) **(1.5 puntos)** Dada la población $\{9,11,13,18,20\}$, calcule la varianza de la distribución de las medias muestrales de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple.

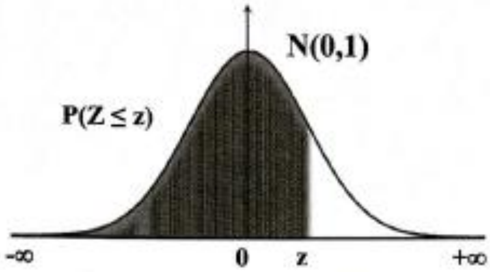
EJERCICIO 8

En el otoño de 2021, el municipio de El Paso en la Isla de La Palma sufrió la erupción del volcán Cumbre Vieja. Al finalizar la erupción, se escogió una muestra de 500 casas resultando que 325 de ellas estaban afectadas por la erupción.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 97%, para estimar la proporción de casas afectadas por la erupción del volcán. Según el resultado obtenido, ¿se puede admitir que el porcentaje de casas afectadas por el volcán es del 64 %?

b) **(1.25 puntos)** Para un nivel de confianza del 92% y manteniendo la proporción muestral, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error máximo de estimación sea del 2%?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z, con distribución N(0,1), esté por debajo del valor z.

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

a) **(1.5 puntos)** Pruebe que se verifica que $A^{-1}=\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)$.

b) **(1 punto)** Dada la ecuación matricial $X^tA=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&-1&1\end{pmatrix}$, determine la dimensión de X y resuelva la ecuación.

a) Calculamos la matriz $\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&-3&1\end{pmatrix}$$

$$A^2-4A+5I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&-3&1\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&1/2&1\end{pmatrix}$$

Comprobamos que $A\cdot\left(\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)\right)=I_3$ y por tanto $A^{-1}=\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)$.

$$A\cdot\left(\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&1/2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2\frac{1}{2}&0\\0&-1/2+1/2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$$

b) La matriz X es de dimensiones $m\times n$ y por tanto la matriz A^t es de dimensiones $n\times m$:

$$X^tA=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&-1&1\end{pmatrix}$$

$$n\times\boxed{m\cdot 3}\times 3\to n\times 3$$

Para que sea posible el producto X^tA debe ser $m = 3$.

El resultado del producto $X^t A$ es una matriz de dimensiones $n\times 3$ y el resultado debe ser de dimensiones 2×3, por lo que $n = 2$.
La matriz X es de dimensiones 3×2.

Resolvemos la ecuación matricial. Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \Rightarrow X^t = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$$

$$X^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 2c-e & e \\ b & 2d-f & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=1} \\ 2c-e=2 \to 2c=2 \to \boxed{c=1} \\ \boxed{e=0} \\ \boxed{b=3} \\ 2d-f=-1 \to 2d-1=-1 \to 2d=0 \to \boxed{d=0} \\ \boxed{f=1} \end{cases} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un artesano decide montar dos tipos de anillos utilizando dos tipos de piedras semipreciosas, una de mayor calidad que otra. Para montar uno de los anillos tarda 20 minutos y utiliza 1 de las piedras de mayor calidad y 2 de las de menor calidad. Para el otro tarda 50 minutos y utiliza 3 piedras de mayor calidad y 1 de menor calidad.
Semanalmente, el artesano dispone de 200 piedras de mayor calidad y 150 de menor calidad. Además, quiere trabajar al menos 1900 minutos a la semana.
Sabiendo que el primer tipo de anillo se vende a 21 €, el segundo a 50 € y que deben fabricarse al menos 20 anillos del primer tipo a la semana, determine cuántos anillos de cada tipo deben montarse para maximizar el valor de la venta. ¿A cuánto asciende dicho valor?

Llamamos "x" al número de anillos de tipo 1 e "y" al número de anillos del tipo 2.

Realizamos una tabla para ordenar toda la información proporcionada en el ejercicio.

	Minutos	Nº piedras de mayor calidad	Nº de piedras de menor calidad	Valor de la venta
Nº anillos tipo 1 (x)	20x	x	2x	21x
Nº anillos tipo 2 (y)	50y	3y	y	50y
	$20x+50y$	$x+3y$	$2x+y$	$21x+50y$

Deseamos maximizar la función "Valor de la venta" que viene expresada por $V(x,y)=21x+50y$

Las restricciones del problema son:

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$
Semanalmente, el artesano dispone de 200 piedras de mayor calidad y 150 de menor calidad → $x+3y\le 200;\ 2x+y\le 150$.
Quiere trabajar al menos 1900 minutos a la semana → $20x+50y\ge 1900$.
"Deben fabricarse al menos 20 anillos del primer tipo a la semana" → $x\ge 20$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x\ge 0;\ y\ge 0 \\ 2x+y\le 150 \\ x+3y\le 200 \\ 20x+50y\ge 1900 \\ x\ge 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\ge 0;\ y\ge 0 \\ 2x+y\le 150 \\ x+3y\le 200 \\ 2x+5y\ge 190 \\ x\ge 20 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x+y=150$

x	$y=150-2x$
0	150
50	50
70	10

$x+3y=200$

x	$y=\dfrac{200-x}{3}$
0	200/3
20	60
50	50

$2x+5y=190$

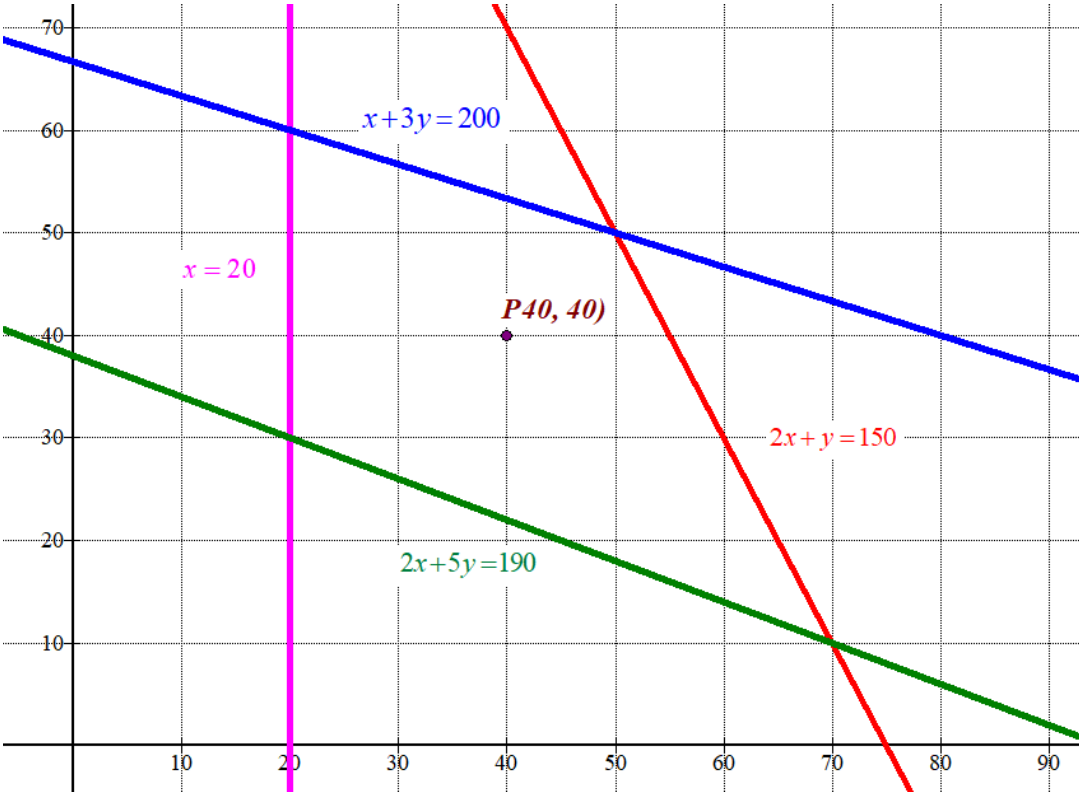
x	$y=\dfrac{190-2x}{5}$
0	38
20	30
70	10

$x=20$

$x=20$	y
20	20
20	60

$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer cuadrante

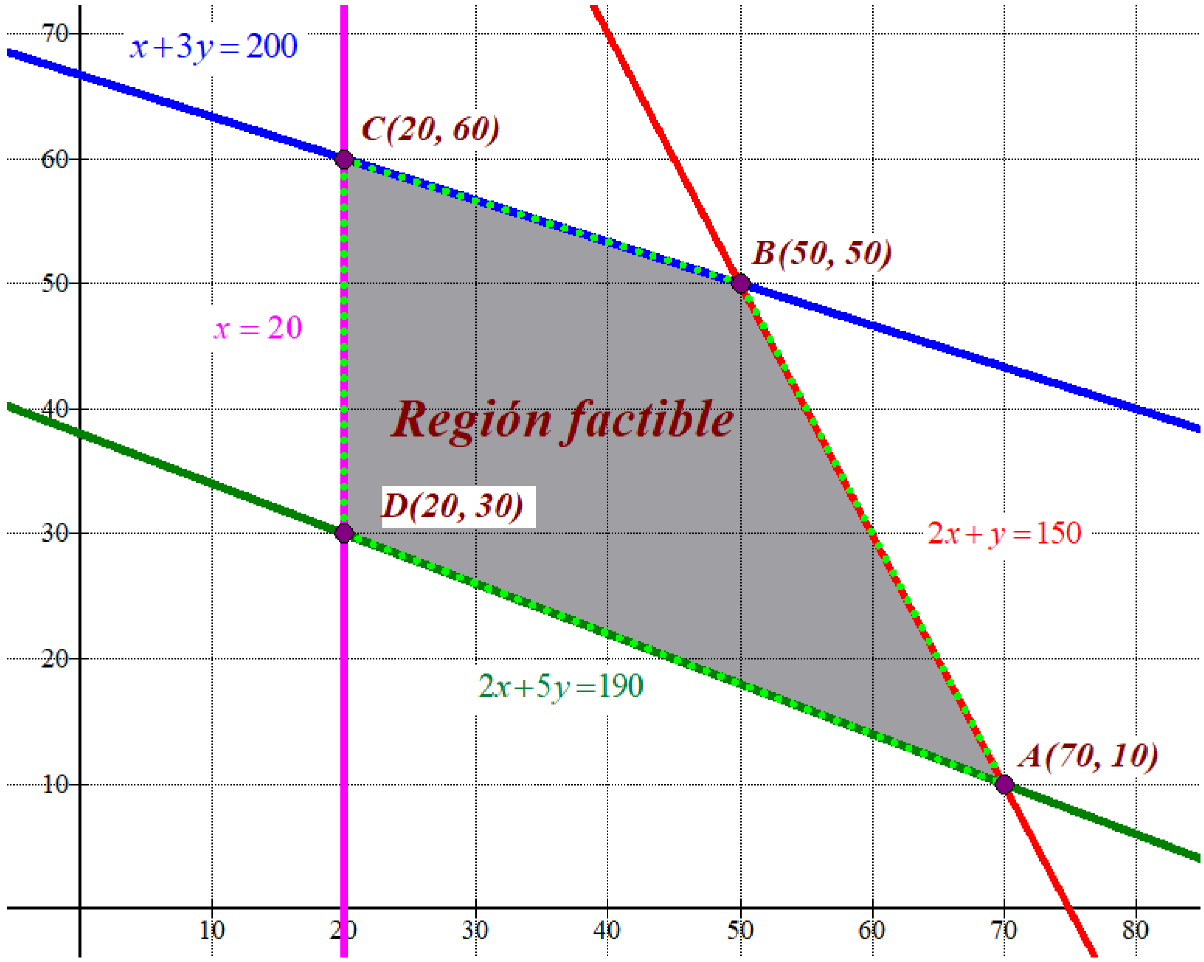


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 150 \\ x + 3y \leq 200 \\ 2x + 5y \geq 190 \\ x \geq 20 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por encima de la recta verde, por debajo de la azul y roja y a la derecha de la recta vertical de color rosa.

Comprobamos que el punto P(40, 40) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 40 \geq 0;\ 40 \geq 0 \\ 2 \cdot 40 + 40 \leq 150 \\ 40 + 3 \cdot 40 \leq 200 \\ 2 \cdot 40 + 5 \cdot 40 \geq 190 \\ 40 \geq 20 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas y la región factible es la coloreada de rosa en el siguiente dibujo.



Valoramos la función objetivo $V(x,y)=21x+50y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(70, 10) → $V(70,10)=21\cdot 70+50\cdot 10=1970$

B(20, 30) → $V(20,30)=420+1500=1920$

C(20, 60) → $V(20,60)=420+3000=3420$

D(50, 50) → $V(50,50)=21\cdot 50+50\cdot 50=3550$ ¡Máximo!

El máximo valor de la función es 3550 y se alcanza en el punto D(50, 50).
Fabricando 50 anillos de cada tipo obtenemos unas ventas máximas semanales por valor de 3550 euros.

BLOQUE B

EJERCICIO 3
El área quemada de la región plana de la cubierta de plástico de un invernadero, coincide con el área de la región acotada delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)=(x-1)^2$ y $g(x)=5-2x$ donde x está expresado en metros.
a) **(1 punto)** Represente gráficamente la zona deteriorada.
b) **(1.5 puntos)** Para reparar la región quemada, se ha de utilizar plástico cuyo coste es de 15 euros por metro cuadrado. Si en el trabajo de reparación se desperdicia la tercera parte del plástico adquirido, ¿Cuánto costará el plástico comprado?

a) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=(x-1)^2 \\ g(x)=5-2x \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow (x-1)^2=5-2x \Rightarrow x^2-2x+1=5-2x \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow$$

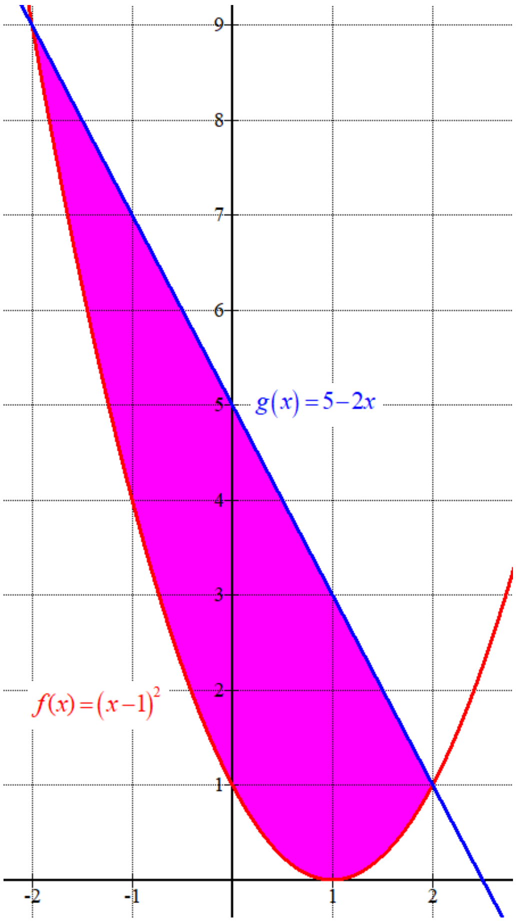
$$\Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow f(2)=(2-1)^2=1 \rightarrow \boxed{A(2,1)} \\ x=-2 \rightarrow f(-2)=(-2-1)^2=9 \rightarrow \boxed{B(-2,9)} \end{cases}$$

La gráfica de la función $f(x)=(x-1)^2=x^2-2x+1$ es una parábola con vértice en $x_v=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1$. Hacemos una tabla de valores para representarla.

La gráfica de la función $g(x)=5-2x$ es una recta. Hacemos una tabla de valores para representarla.

x	$y=(x-1)^2$
-2	9
-1	4
0	1
1	0
2	1

x	$y=5-2x$
-2	9
2	1



b) Hallamos el valor del área de la región coloreada de rosa.

$$\int_{-2}^{2} 5-2x-\left(x^2-2x+1\right)dx=\int_{-2}^{2} 5-2x-x^2+2x-1dx=\int_{-2}^{2} -x^2+4dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2}=\left[-\frac{2^3}{3}+4\cdot 2\right]-\left[-\frac{(-2)^3}{3}+4(-2)\right]=-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}+8=16-\frac{16}{3}=\boxed{\frac{32}{3}\simeq 10.67\,m^2}$$

Si se desperdicia la tercera parte del plástico adquirido (a m^2) se aprovecha las dos terceras partes ($\frac{2}{3}a$) que deben servir para cubrir $\frac{32}{3}$ m^2.

$$\frac{2a}{3}=\frac{32}{3}\Rightarrow 2a=32\Rightarrow a=16\,m^2.$$

Hay que comprar 16 metros cuadrados de plástico, que a 15 euros por metro cuadrado nos costará 15 · 16 = 240 euros.

EJERCICIO 4

Sea la función $f(t)=\frac{12t-24}{t+3}$; $t\geq 0$

a) **(1.5 puntos)** Represente gráficamente la función *f*, determinando los puntos de corte con los ejes coordenados y las ecuaciones de las asíntotas, y estudiando la monotonía y la curvatura de *f*.

b) Si la función *f* representa los beneficios de una empresa, en millones de euros, donde *t* indica los años de vida de la empresa:

b1) **(0.5 puntos)** ¿A partir de qué año la empresa deja de tener pérdidas? Justifique la respuesta.

b2) **(0.5 puntos)** A medida que pasan los años, ¿están limitados los beneficios? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite y por qué?

a)

Puntos de corte con los ejes coordenados.

$$\left.\begin{array}{l} f(t)=\frac{12t-24}{t+3} \\ t=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\frac{12\cdot 0-24}{0+3}=-8 \Rightarrow \boxed{P(0,-8)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(t)=\frac{12t-24}{t+3} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{12t-24}{t+3}=0 \Rightarrow 12t-24=0 \Rightarrow 12t=24 \Rightarrow t=2 \Rightarrow \boxed{Q(2,0)}$$

Asíntotas

El denominador de la función se anula para $t = -3$ que no pertenece al dominio de definición de la función: Dominio = $[0,+\infty)$

Asíntotas verticales. $x=a$

No tiene

Asíntota horizontal. $y=b$

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{12t-24}{t+3}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{12t}{t}-\frac{24}{t}}{\frac{t}{t}+\frac{3}{t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{12-\frac{24}{t}}{1+\frac{3}{t}}=\frac{12-\frac{24}{\infty}}{1+\frac{3}{\infty}}=\frac{12-0}{1-0}=12$$

La recta $y = 12$ es asíntota horizontal cuando $t\to+\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

Monotonía de la función.

Estudiamos el signo de la función derivada.

$$f(t)=\frac{12t-24}{t+3} \Rightarrow f'(t)=\frac{12(t+3)-1\cdot(12t-24)}{(t+3)^2}=\frac{12t+36-12t+24}{(t+3)^2}=\frac{60}{(t+3)^2}$$

La derivada siempre es positiva, por lo que la función crece en todo su dominio.

Curvatura de la función.

Estudiamos el signo de la segunda derivada.

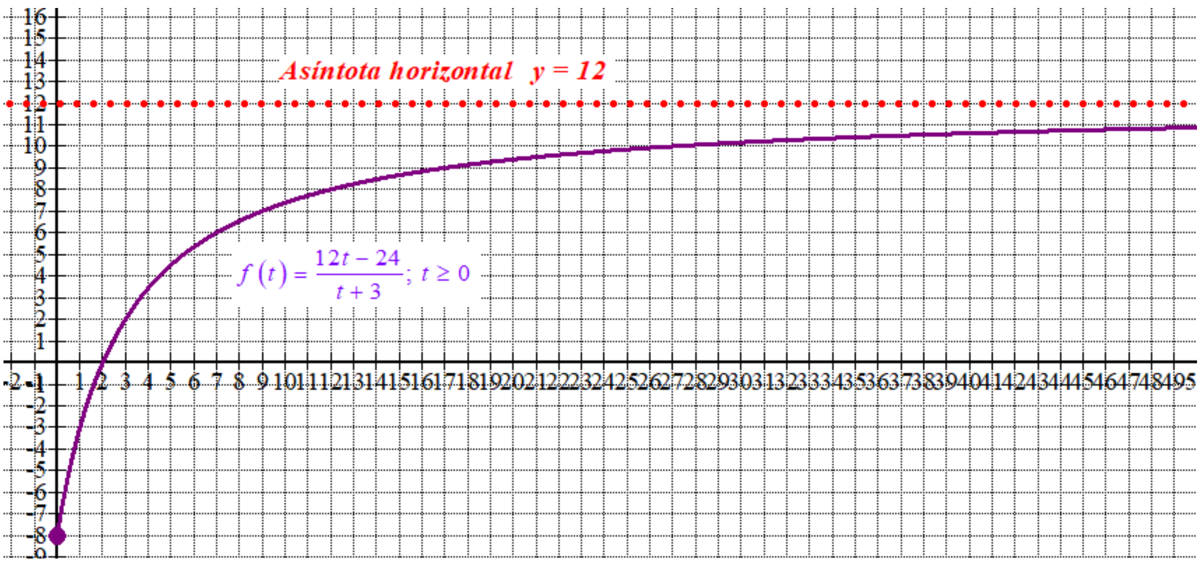
$$f'(t)=\frac{60}{(t+3)^2} \Rightarrow f''(t)=\frac{0-60\cdot 2(t+3)}{(t+3)^4}=\frac{-120(t+3)}{(t+3)^4}=\frac{-120}{(t+3)^3}$$

La segunda derivada cambia de signo en $t = -3$ que no pertenece al dominio ($t \geq 0$). La segunda derivada mantiene su signo constante. Como $f''(1)=\frac{-120}{(1+3)^3}=\frac{-120}{64}<0$ la función siempre es cóncava (∩).

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

$t \geq 0$

t	$y=\frac{12t-24}{t+3}$
0	–8
1	–3
2	0
3	2
7	6
17	9



b)

b1) La función toma valores negativos entre $t = 0$ y $t = 2$, lo que significa que tiene pérdidas desde el inicio ($t = 0$) hasta el segundo año ($t = 2$). Deja de tener pérdidas a partir del año segundo.

b2) A medida que pasan los años (t crece y tiende a $+\infty$) la función se acerca al valor 12, pero no lo sobrepasa (asíntota horizontal $y = 12$), por lo que el tope de beneficios es de 12 millones de euros.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

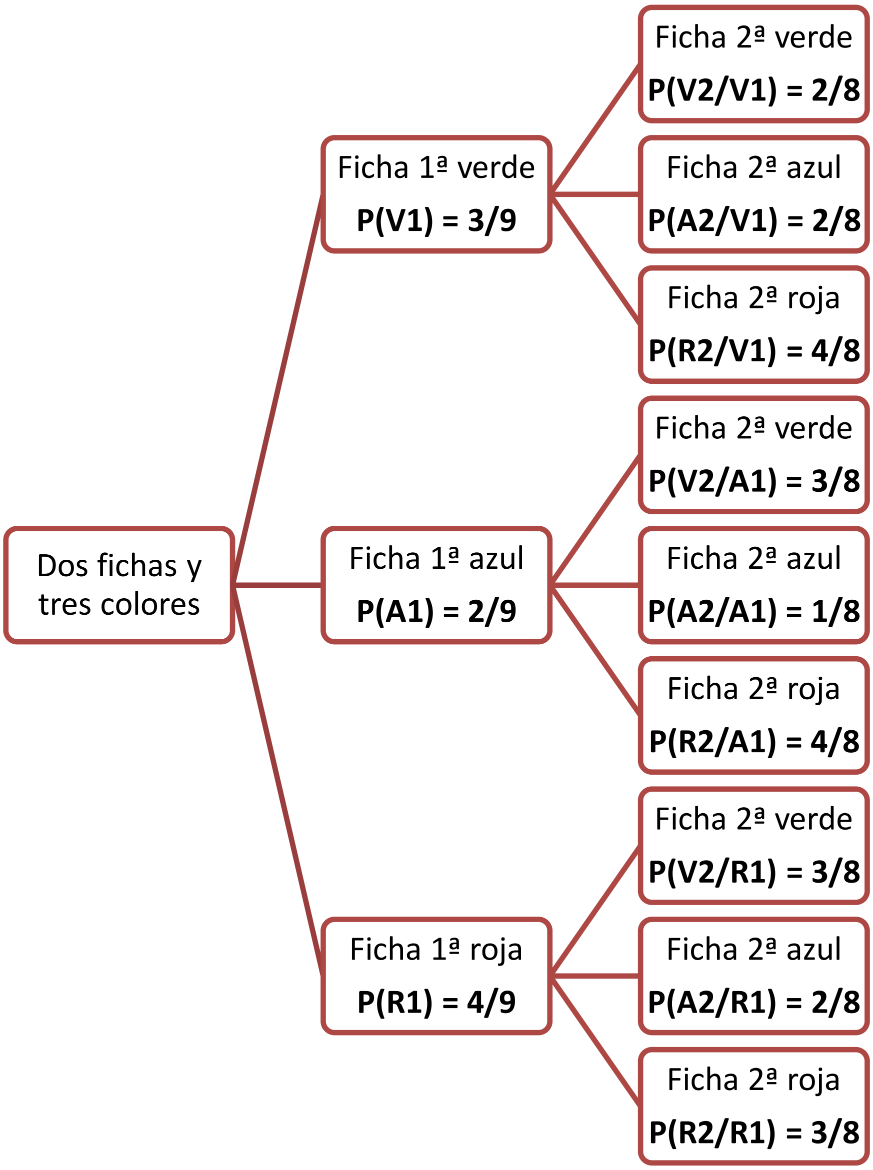
Una caja contiene 3 fichas verdes, 2 fichas azules y 4 fichas rojas. Un juego consiste en realizar dos extracciones, sin reemplazamiento, de tal manera que el jugador que saque dos fichas azules gana el primer premio, el jugador que saque dos fichas verdes gana el segundo premio y el jugador que, de las dos fichas, una sea azul y otra de color diferente gana el tercer premio.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un jugador consiga el primer o segundo premio.

b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un jugador gane el tercer premio.

c) **(1 punto)** Sabiendo que un jugador ha obtenido premio, ¿Cuál es la probabilidad de que haya ganado el tercer premio?

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Si un jugador consigue el primer o segundo premio significa que saca dos fichas azules o dos fichas verdes. Llamamos a este suceso A.

$$P(A) = P(A1 \cap A2) + P(V1 \cap V2) =$$

$$= P(A1)P(A2/A1) + P(V1)P(V2/V1) = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8} + \frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8} = \frac{8}{72} = \boxed{\frac{1}{9} \simeq 0.111}$$

b) Para que un jugador gane el tercer premio debe sacar una ficha azul y otra de color diferente.

Debe sacar una azul y otra verde o una azul y otra roja, en cualquier orden. Llamamos a este suceso B.

$$P(B) = P(A1 \cap V2) + P(V1 \cap A2) + P(A1 \cap R2) + P(R1 \cap A2) =$$

$$= P(A1)P(V2/A1) + P(V1)P(A2/V1) + P(A1)P(R2/A1) + P(R1)P(A2/R1) =$$

$$= \frac{2}{9}\cdot\frac{3}{8} + \frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8} + \frac{2}{9}\cdot\frac{4}{8} + \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{8} = \frac{28}{72} = \boxed{\frac{7}{18} \simeq 0.39}$$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/A \cup B) = \frac{P(B \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(B)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} A \cap B = \varnothing \\ P(A \cap B) = 0 \end{array} \right\} = \frac{\frac{7}{18}}{\frac{1}{9} + \frac{7}{18} - 0} = \boxed{\frac{7}{9} \simeq 0.778}$$

EJERCICIO 6

Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A)=0.6$, $P(B)=0.3$ y $P(A/B)=0.6$. Se pide:

a) **(0.5 puntos)** $P(A\cup B)$

b) **(0.75 puntos)** $P(A-B)+P(B-A)$

c) **(0.75 puntos)** $P(B/A^C)$

d) **(0.5 puntos)** Razone si los sucesos A y B son independientes, ¿Son incompatibles?

a)

$$P(A/B)=0.6\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0.6\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{0.3}=0.6\Rightarrow P(A\cap B)=0.18$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.6+0.3-0.18=\boxed{0.72}$$

b)

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)\Rightarrow 0.6=0.18+P(A\cap B^C)\Rightarrow P(A\cap B^C)=0.6-0.18=0.42$$

$$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A^C)\Rightarrow 0.3=0.18+P(B\cap A^C)\Rightarrow P(B\cap A^C)=0.3-0.18=0.12$$

$$P(A-B)+P(B-A)=0.42+0.12=\boxed{0.54}$$

c)

$$P(B/A^C)=\frac{P(B\cap A^C)}{P(A^C)}=\frac{0.12}{1-0.6}=\boxed{0.3}$$

d) Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.18 \\ P(A)P(B)=0.6\cdot 0.3=0.18 \end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)=0.18=P(A)P(B)$$

Se cumple la igualdad y los sucesos A y B son independientes.

Para que los sucesos A y B sean incompatibles debe cumplirse que $P(A\cap B)=0$. Pero la probabilidad de la intersección la hemos obtenido y vale 0.18 ≠ 0. Los sucesos no son incompatibles.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1 punto)** Un gimnasio establece sus tarifas por grupos de edad: juvenil, adulto y senior. Tiene matriculados 25 juveniles, 75 adultos y 50 seniors. Se quiere seleccionar una muestra de 30 personas del gimnasio utilizando un muestreo con afijación proporcional. ¿Cuál será la composición que debe tener dicha muestra?

b) **(1.5 puntos)** Dada la población $\{9,11,13,18,20\}$, calcule la varianza de la distribución de las medias muestrales de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple.

a) El tamaño de la población es 25 + 75 + 50 = 150.

Si se eligen 30 de 150 la proporción es 1 de cada 5.

Con esa proporción elegimos $\frac{25}{5}=5$ juveniles.

Con esa proporción elegimos $\frac{75}{5}=15$ adultos.

Con esa proporción elegimos $\frac{50}{5}=10$ seniors.

La composición de la muestra es 5 juveniles, 15 adultos y 10 seniors.

b) Las muestras posibles mediante muestreo aleatorio simple son:

M1 = {9,9} M2 = {9,11}, M3 = {9,13}, M4 = {9,18}, M5 = {9,20},
M6 = {11,9}, M7 = {11,11}, M8 = {11,13}, M9 = {11,18}, M10 = {11,20},
M11 = {13,9}, M12 = {13,11}, M13 = {13,13}, M14 = {13,18}, M15 = {13,20},
M16 = {18,9}, M17 = {18,11}, M18 = {18,13}, M19 = {18,18}, M20 = {18,20}
, M21 = {20,9}, M22 = {20,11}, M23 = {20,13}, M24 = {20,18}, M25 = {20,20},

Las medias muestrales de cada una son:

$$\overline{x_1}=\frac{9+9}{2}=9\ ;\ \overline{x_2}=\frac{9+11}{2}=10;\ \overline{x_3}=\frac{9+13}{2}=11;\ \overline{x_4}=\frac{9+18}{2}=13.5;\ \overline{x_5}=\frac{9+20}{2}=14.5$$

$$\overline{x_6}=\frac{11+9}{2}=10\ ;\ \overline{x_7}=\frac{11+11}{2}=11;\ \overline{x_8}=\frac{11+13}{2}=12;\ \overline{x_9}=\frac{11+18}{2}=14.5;\ \overline{x_{10}}=\frac{11+20}{2}=15.5$$

$$\overline{x_{11}}=\frac{13+9}{2}=11\ ;\ \overline{x_{12}}=\frac{13+11}{2}=12;\ \overline{x_{13}}=\frac{13+13}{2}=13;\ \overline{x_{14}}=\frac{13+18}{2}=15.5;\ \overline{x_{15}}=\frac{13+20}{2}=16.5$$

$$\overline{x_{16}}=\frac{18+9}{2}=13.5\ ;\ \overline{x_{17}}=\frac{18+11}{2}=14.5;\ \overline{x_{18}}=\frac{18+13}{2}=15.5;\ \overline{x_{19}}=\frac{18+18}{2}=18;$$
$$\overline{x_{20}}=\frac{18+20}{2}=19$$

$$\overline{x_{21}}=\frac{20+9}{2}=14.5\ ;\ \overline{x_{22}}=\frac{20+11}{2}=15.5;\ \overline{x_{23}}=\frac{20+13}{2}=16.5;\ \overline{x_{24}}=\frac{20+18}{2}=19;$$
$$\overline{x_{25}}=\frac{20+20}{2}=20$$

Hacemos una tabla de frecuencias de las medias muestrales.

$\overline{x_i}$	9	10	11	12	13	13.5	14.5	15.5	16.5	18	19	20
f_i	1	2	3	2	1	2	4	4	2	1	2	1

La media de las medias muestrales.

$$\bar{x} = \frac{\overline{x_1}\cdot f_1 + \overline{x_2}\cdot f_2 + \overline{x_3}\cdot f_3 + \overline{x_4}\cdot f_4 + ...+ \overline{x_{23}}\cdot f_{23} + \overline{x_{24}}\cdot f_{24} + \overline{x_{25}}\cdot f_{25}}{25} =$$

$$= \frac{9\cdot 1+10\cdot 2+11\cdot 3+12\cdot 2+13\cdot 1+13.5\cdot 2+14.5\cdot 4+15.5\cdot 4+16.5\cdot 2+18\cdot 1+19\cdot 2+20\cdot 1}{10} = 14.2$$

Ya sabíamos que la media de las medias muestrales coincide con la media de la población:

$$\mu = \frac{9+11+13+18+20}{5} = \frac{71}{5} = 14.2$$

Calculamos la varianza. Para ello hacemos una tabla.

$\overline{x_i}$	9	10	11	12	13	13.5	14.5	15.5	16.5	18	19	20
f_i	1	2	3	2	1	2	4	4	2	1	2	1
$\left(\overline{x_i} - \bar{x}\right)^2$	27.04	17.64	10.24	4.84	1.44	0.49	0.09	1.69	5.29	14.44	23.04	33.64

$$Varianza = \frac{\left(\overline{x_1} - \bar{x}\right)^2\cdot f_1 + \left(\overline{x_2} - \bar{x}\right)^2\cdot f_2 + ...+ \left(\overline{x_{24}} - \bar{x}\right)^2\cdot f_{24} + \left(\overline{x_{25}} - \bar{x}\right)^2\cdot f_{25}}{10} =$$

$$= \frac{27.04\cdot 1+17.64\cdot 2+10.24\cdot 3+4.84\cdot 2+1.44\cdot 1+0.49\cdot 2+0.09\cdot 4+1.69\cdot 4+5.29\cdot 2+14.44\cdot 1+23.04\cdot 2+33.64\cdot 1}{25} = \boxed{8.68}$$

EJERCICIO 8

En el otoño de 2021, el municipio de El Paso en la Isla de La Palma sufrió la erupción del volcán Cumbre Vieja. Al finalizar la erupción, se escogió una muestra de 500 casas resultando que 325 de ellas estaban afectadas por la erupción.

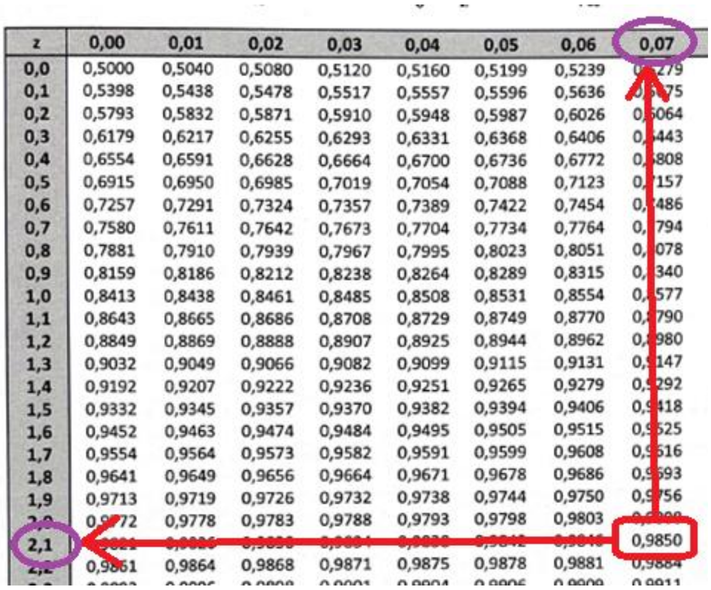
a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 97%, para estimar la proporción de casas afectadas por la erupción del volcán. Según el resultado obtenido, ¿se puede admitir que el porcentaje de casas afectadas por el volcán es del 64 %?

b) **(1.25 puntos)** Para un nivel de confianza del 92% y manteniendo la proporción muestral, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error máximo de estimación sea del 2%?

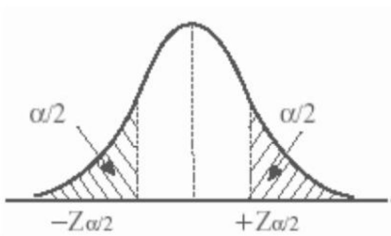
Tamaño de la muestra es *n = 500*. $pr = \frac{325}{500} = 0.65$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.65 = 0.35$

a) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

1 – ∝ = 0,97 → ∝ = 0,03 →∝/2 = 0’015 →1 – ∝/2 = 0,985 → $z_{\alpha/2}$ = **2,17**



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	[illegible]
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	[illegible]
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	[illegible]
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	[illegible]
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	[illegible]
[illegible]	[illegible]	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	[illegible]
2,1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9850
[illegible]	[illegible]	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	[illegible]



Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.65 \cdot 0.35}{500}} = 0.0463$$

El error máximo cometido es de 0.0463.

El intervalo de confianza para la proporción de casas afectadas por la erupción es:

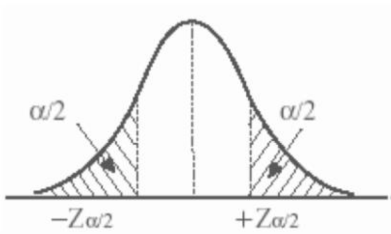
$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.65 - 0.0463,\quad 0.65 + 0.0463) = (0.6037,\ 0.6963)$$

Un porcentaje de casas afectadas por el volcán del 64 % significa una proporción de 0.64 que pertenece al intervalo de confianza obtenido, por lo que se pude admitir este porcentaje.

b) $pr = \frac{325}{500} = 0.65$. Con un nivel de confianza del 92 % tenemos

1 – ∝ = 0,92 → ∝ = 0,08 →∝/2 = 0’04 →1 – ∝/2 = 0,96 → $z_{\alpha/2}$ = **1.75**

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	[illegible]
[illegible]	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	[illegible]
1,7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9591	0,9599
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	[illegible]



Utilizamos la fórmula del error para obtener el valor de *n* para un error de 0.02.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.02 = 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.65 \cdot 0.35}{n}} \Rightarrow \frac{0.02}{1.75} = \sqrt{\frac{0.65 \cdot 0.35}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.02}{1.75}\right)^2 = \frac{0.65 \cdot 0.35}{n} \Rightarrow \frac{0.65 \cdot 0.35}{\left(\frac{0.02}{1.75}\right)^2} = n \Rightarrow n \simeq 1741.8$$

El tamaño de la muestra debe ser un número entero superior al obtenido.
El tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo de estimación sea del 2% es de 1742 casas.