



Universidad
Zaragoza

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2023
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Determine el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial

$$ABX = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ esté bien planteada, siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \text{ Calcule } X.$$

b.- (5 puntos) Determine el valor(es) del parámetro m para que el sistema sea compatible y calcule la solución del mismo para $m = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + my + z = 0 \end{array} \right\} (S)$$

2.- (10 puntos) Un comerciante dispone de 120 jamones, 390 botellas de vino y 240 botellas de cava para elaborar dos tipos de lotes navideños. El lote (A) consta de un jamón y dos botellas de vino y el lote (B) consta de un jamón, cinco botellas de vino y cuatro botellas de cava. Si el ingreso por la venta de cada lote (A) es de 90 € y por cada lote (B) es de 180 €, se pide:

a.- (8 puntos) Plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada tipo que maximiza el ingreso obtenido. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

b.- (2 puntos) En la solución óptima, ¿se agotan todas las existencias de jamones, botellas de vino y botellas de cava? Razone la respuesta.

3.- (10 puntos) Sea $P(t) = 1000 \left(15 + \frac{t}{100 + t^2} \right)$ una función que representa el número de habitantes de cierta población, siendo t el número de años transcurridos desde el año 2000. Se pide:

a.- (2 puntos) Calcule el tamaño de la población en un horizonte infinito de tiempo.

b.- (5 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la población. ¿En qué momento la población es máxima? y ¿cuántos habitantes tiene la población en ese momento?

c.- (3 puntos) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener una población de 15.040 individuos?

4.- (10 puntos) Sean las funciones $g(x) = a \left(1 - \frac{1}{2}x \right)^3$, $h(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$

a.- (3 puntos) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$.

b.- (4 puntos) Determine el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \leq 1 \\ h(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en $x = 3$

c.- (3 puntos) Calcule $\int_0^2 (1 - 2x)^3 dx$.

5.- (10 puntos) En cierta Facultad de Economía se oferta una misma asignatura en tres grupos, que denotaremos por G1, G2, G3. Los grupos representan el 40%, el 35% y el 25% de los estudiantes, respectivamente. Superan la asignatura el 80% del grupo G1, el 60% del grupo G2 y el 92% del grupo G3. Calcule la probabilidad de que al escoger un estudiante al azar:

- a.- (2 puntos) Haya superado la asignatura y sea del grupo G3.
- b.- (2 puntos) No haya superado la asignatura.
- c.- (2 puntos) Haya superado la asignatura.
- d.- (2 puntos) Ni haya superado la asignatura ni sea del grupo G1.
- e.- (2 puntos) Si el estudiante elegido al azar ha superado la asignatura, calcule la probabilidad de ser del grupo G3.

6.- (10 puntos) Se sabe que el tiempo dedicado semanalmente a las tareas del hogar se distribuye según una normal con desviación típica 2 horas.

- a.- (4 puntos) Para una muestra aleatoria de 64 hogares, el tiempo medio semanal dedicado a las tareas del hogar es de 10 horas. Determine un intervalo de confianza al 95% para la media de horas dedicadas semanalmente a las tareas del hogar.
- b.- (4 puntos) Determine el tamaño muestral mínimo necesario para que el error que se cometa al estimar la media de la población por un intervalo de confianza sea, como máximo de 0,75 horas, con un nivel de confianza del 95%.
- c.- (2 puntos) A partir de una muestra de 81 hogares se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza (9,8444; 10,7555) para la media de la población. Determine el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Determine el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial

$$ABX = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ esté bien planteada, siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \text{ Calcule } X.$$

b.- (5 puntos) Determine el valor(es) del parámetro m para que el sistema sea compatible y calcule la solución del mismo para $m = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + my + z = 0 \end{array} \right\} (S)$$

a.- Si consideramos la matriz X de dimensiones $m \times n$ tenemos que

$$\begin{array}{l} A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \\ 2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times \boxed{2 \cdot m} \times n \rightarrow 2 \times n \end{array}$$

El producto AB es posible y se obtiene una matriz 2×2 .

$$\begin{array}{l} A \cdot B \\ 2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \rightarrow 2 \times 2 \end{array}$$

Para que sea posible el producto $(A \cdot B) \cdot X$ debe ser $m = 2$, obteniéndose una matriz $2 \times n$, por lo que $n = 1$.

$$\begin{array}{l} (A \cdot B) \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \\ 2 \times \boxed{2 \cdot m} \times n \rightarrow 2 \times n \end{array}$$

La matriz X es de dimensiones 2×1 .

Si $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ tenemos la igualdad:

$$\begin{aligned} ABX &= \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2+1 & -1+6 \\ -24+24+1 & 12-16+6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+5b \\ a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 3a+5b=2 \\ a+2b=-4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 3a+5b=2 \\ a=-4-2b \end{array} \Rightarrow -12-6b+5b=2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -b = 14 \Rightarrow \boxed{b = -14} \Rightarrow \boxed{a = -4 + 28 = 24} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 24 \\ -14 \end{pmatrix}}$$

b.- Como es un sistema lineal homogéneo siempre tiene solución (una o infinitas), pues siempre tiene la solución $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$. Tiene solución para cualquier valor de m .

Lo resolvemos para $m = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a \leftrightarrow \text{Ecuación } 1^a \\ \text{Ecuación } 3^a \leftrightarrow \text{Ecuación } 1^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 2x - 5y + 3z = 0 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \\ \hline -3y + z = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - 3 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 3x + 3y + z = 0 \\ -3x + 3y - 3z = 0 \\ \hline 6y - 2z = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ -3y + z = 0 \\ 6y - 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + 2 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ 6y - 2z = 0 \\ -6y + 2z = 0 \\ \hline 0 = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ -3y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ \boxed{z = 3y} \end{array} \right\} \Rightarrow x - y + 3y = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2y} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

Las soluciones del sistema son: $x = -2\lambda$; $y = \lambda$; $z = 3\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

2.- (10 puntos) Un comerciante dispone de 120 jamones, 390 botellas de vino y 240 botellas de cava para elaborar dos tipos de lotes navideños. El lote (A) consta de un jamón y dos botellas de vino y el lote (B) consta de un jamón, cinco botellas de vino y cuatro botellas de cava. Si el ingreso por la venta de cada lote (A) es de 90 € y por cada lote (B) es de 180 €, se pide:

a.- (8 puntos) Plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada tipo que maximiza el ingreso obtenido. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

b.- (2 puntos) En la solución óptima, ¿se agotan todas las existencias de jamones, botellas de vino y botellas de cava? Razone la respuesta.

a.- Llamamos x = número de lotes A, y = número de lotes B.

Completamos una tabla con los datos del problema.

	Nº de jamones	Nº botellas de vino	Nº botellas de cava	Ingresos
Nº lotes A (x)	x	$2x$		$90x$
Nº lotes B (y)	y	$5y$	$4y$	$180y$
TOTALES	$x + y$	$2x + 5y$	$4y$	$90x + 180y$

Queremos maximizar los ingresos: $I(x, y) = 90x + 180y$

Las restricciones son:

“Un comerciante dispone de 120 jamones, 390 botellas de vino y 240 botellas de cava” $\rightarrow$
 $x + y \leq 120$; $2x + 5y \leq 390$; $4y \leq 240$

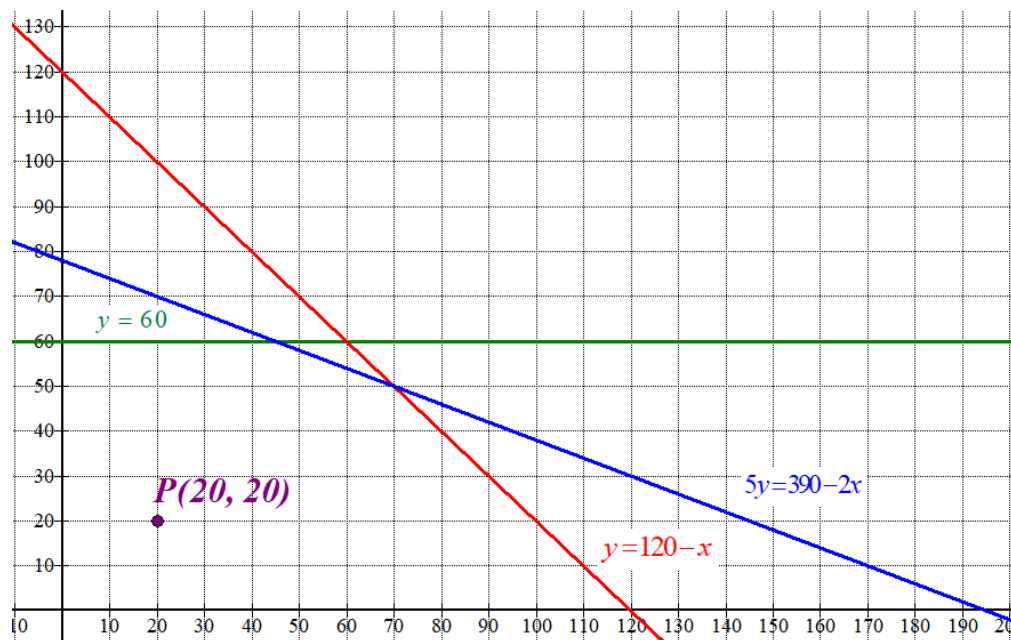
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 120 \\ 2x + 5y \leq 390 \\ 4y \leq 240 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \leq 120 - x \\ 5y \leq 390 - 2x \\ y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$y = 120 - x$	$5y = 390 - 2x$	$y = 60$	$x \geq 0; y \geq 0$																						
<table> <tr> <th>x</th> <th>$y = 120 - x$</th> </tr> <tr> <td>0</td> <td>120</td> </tr> <tr> <td>70</td> <td>50</td> </tr> <tr> <td>120</td> <td>0</td> </tr> </table>	x	$y = 120 - x$	0	120	70	50	120	0	<table> <tr> <th>x</th> <th>$y = \frac{390 - 2x}{5}$</th> </tr> <tr> <td>0</td> <td>78</td> </tr> <tr> <td>45</td> <td>60</td> </tr> <tr> <td>70</td> <td>50</td> </tr> </table>	x	$y = \frac{390 - 2x}{5}$	0	78	45	60	70	50	<table> <tr> <th>x</th> <th>$y = 60$</th> </tr> <tr> <td>0</td> <td>60</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>60</td> </tr> </table>	x	$y = 60$	0	60	10	60	Primer cuadrante
x	$y = 120 - x$																								
0	120																								
70	50																								
120	0																								
x	$y = \frac{390 - 2x}{5}$																								
0	78																								
45	60																								
70	50																								
x	$y = 60$																								
0	60																								
10	60																								



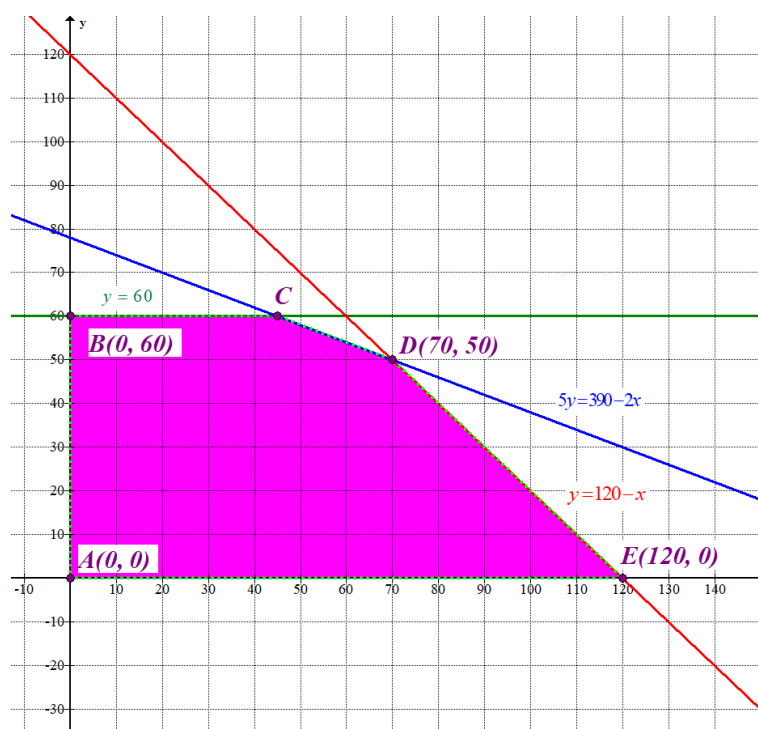
Como las restricciones son
$$\left. \begin{array}{l} y \leq 120 - x \\ 5y \leq 390 - 2x \\ y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

que está por debajo de las rectas roja, azul y verde.

Comprobamos que el punto $P(20, 20)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 20 \leq 120 - 20 \\ 5 \cdot 20 \leq 390 - 2 \cdot 20 \\ 20 \leq 60 \\ 20 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del punto C resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de las rectas azul y verde.

$$\left. \begin{array}{l} y = 60 \\ 5y = 390 - 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 300 = 390 - 2x \Rightarrow 2x = 90 \Rightarrow x = 45 \Rightarrow C(45, 60)$$

Valoramos la función ingresos $I(x, y) = 90x + 180y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 60) \rightarrow I(0, 60) = 0 + 180 \cdot 60 = 10800$$

$$C(45, 60) \rightarrow I(45, 60) = 90 \cdot 45 + 180 \cdot 60 = 14850$$

$$D(70, 50) \rightarrow I(70, 50) = 90 \cdot 70 + 180 \cdot 50 = 15300 \text{ ¡Máximo!}$$

$$E(120, 0) \rightarrow I(120, 0) = 90 \cdot 120 + 0 = 10800$$

El valor máximo es 15300 y se obtiene en D(70, 50).

Con 70 lotes A y 50 lotes B nos ajustamos a las restricciones y obtenemos un máximo beneficio por valor de 15300 €.

b.- Calculamos lo que se gasta haciendo 70 lotes A y 50 lotes B.

	Nº de jamones	Nº botellas de vino	Nº botellas de cava
Nº lotes A (70)	70	140	
Nº lotes B (50)	50	250	200
TOTALES	120	390	200

Como dispone de 120 jamones, 390 botellas de vino y 240 botellas de cava se gastan todos los jamones y las botellas de vino y solo sobran 40 botellas de cava.

- 3.- (10 puntos)** Sea $P(t) = 1000 \left(15 + \frac{t}{100 + t^2} \right)$ una función que representa el número de habitantes de cierta población, siendo t el número de años transcurridos desde el año 2000. Se pide:
- a.- (2 puntos)** Calcule el tamaño de la población en un horizonte infinito de tiempo.
- b.- (5 puntos)** Estudie el crecimiento y decrecimiento de la población. ¿En qué momento la población es máxima? y ¿cuántos habitantes tiene la población en ese momento?
- c.- (3 puntos)** ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener una población de 15.040 individuos?

a.- Nos piden calcular $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t)$.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 1000 \left(15 + \frac{t}{100 + t^2} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1000 \left(15 + \frac{\frac{t}{t^2}}{\frac{100}{t^2} + \frac{t^2}{t^2}} \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 1000 \left(15 + \frac{\frac{1}{t}}{\frac{100}{t^2} + 1} \right) = 1000 \left(15 + \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{100}{\infty} + 1} \right) = 1000 \left(15 + \frac{0}{0+1} \right) = 15000 \end{aligned}$$

Cuando transcurran muchos años la tendencia es que el número de habitantes se estabilice en torno a los 15000 habitantes.

b.- Utilizamos la derivada.

$$P(t) = 15000 + \frac{1000t}{100 + t^2} \Rightarrow P'(t) = \frac{1000(100 + t^2) - 2t(1000t)}{(100 + t^2)^2} = \frac{100000 + 1000t^2 - 2000t^2}{(100 + t^2)^2} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} P'(t) &= \frac{100000 - 1000t^2}{(100 + t^2)^2} \\ P'(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{100000 - 1000t^2}{(100 + t^2)^2} = 0 \Rightarrow 100000 - 1000t^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 - t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 100 \Rightarrow t = \sqrt{100} = \pm 10$$

Nos quedamos solo con el valor positivo $t = 10$.

Estudiamos el cambio de signo de la derivada antes y después de este valor.

En el intervalo $(0, 10)$ tomamos $t = 5$ y la derivada vale

$$P'(5) = \frac{100000 - 1000 \cdot 5^2}{(100 + 5^2)^2} = \frac{75000}{125^2} > 0. \text{ La función crece en } (0, 10).$$

En el intervalo $(10, +\infty)$ tomamos $t = 20$ y la derivada vale

$$P'(20) = \frac{100000 - 1000 \cdot 20^2}{(100 + 20^2)^2} = \frac{-300000}{250000} < 0. \text{ La función decrece en } (10, +\infty).$$

La población crece desde el año 2000 al año 2010 y decrece del año 2010 en adelante.

La población es máxima en el año 2010 y su población es el valor de $P(10)$.

$$P(10) = 1000 \left(15 + \frac{10}{100 + 10^2} \right) = 15050$$

La población máxima es de 15050 habitantes en el año 2010.

c.- Igualamos la función a 15040.

$$P(t) = 15040 \Rightarrow 1000 \left(15 + \frac{t}{100 + t^2} \right) = 15040 \Rightarrow 15 + \frac{t}{100 + t^2} = \frac{15040}{1000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t}{100 + t^2} = 15.04 - 15 = 0.04 \Rightarrow t = 0.04(100 + t^2) \Rightarrow t = 4 + 0.04t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0.04t^2 + t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-0.04)(-4)}}{2(-0.04)} = \frac{-1 \pm 0.6}{-0.08} = \begin{cases} \frac{-1 + 0.6}{-0.08} = 5 = t \\ \frac{-1 - 0.6}{-0.08} = 20 = t \end{cases}$$

La población es de 15040 en dos momentos: transcurridos 5 y 20 años, es decir, en el año 2005 y en el 2020.

4.- (10 puntos) Sean las funciones $g(x) = a\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^3$, $h(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$

a.- (3 puntos) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$.

b.- (4 puntos) Determine el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \leq 1 \\ h(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en $x = 3$.

c.- (3 puntos) Calcule $\int_0^2 (1 - 2x)^3 dx$.

$$\text{a.- } \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{1^2 + 1 - 2}{1^2 - 1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1}{2x - 1} = \frac{3}{1} = \boxed{3}$$

$$\text{b.- La función es } f(x) = \begin{cases} a\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^3 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para que sea continua deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= a\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{a}{8} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} a\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^3 = \frac{a}{8} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \{\text{apartado a.-}\} = 3 \\ f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a}{8} = 3 \Rightarrow \boxed{a = 24}$$

El valor buscado es $a = 24$.

c.- Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int (1 - 2x)^3 dx = \left\{ \begin{aligned} 1 - 2x &= t \\ -2dx &= dt \rightarrow dx = \frac{1}{-2} dt \end{aligned} \right\} = \int t^3 \frac{1}{-2} dt = \frac{-1}{2} \int t^3 dt = \frac{-1}{2} \cdot \frac{t^4}{4} = \frac{-t^4}{8} = \frac{-(1 - 2x)^4}{8} + K$$

Pasamos a calcular la integral definida pedida.

$$\int_0^2 (1 - 2x)^3 dx = \left[\frac{-(1 - 2x)^4}{8} \right]_0^2 = \left[\frac{-(1 - 4)^4}{8} \right] - \left[\frac{-(1 - 0)^4}{8} \right] = \frac{-81}{8} + \frac{1}{8} = \boxed{-10}$$

5.- (10 puntos) En cierta Facultad de Economía se oferta una misma asignatura en tres grupos, que denotaremos por G1, G2, G3. Los grupos representan el 40%, el 35% y el 25% de los estudiantes, respectivamente. Superan la asignatura el 80% del grupo G1, el 60% del grupo G2 y el 92% del grupo G3. Calcule la probabilidad de que al escoger un estudiante al azar:

a.- (2 puntos) Haya superado la asignatura y sea del grupo G3.

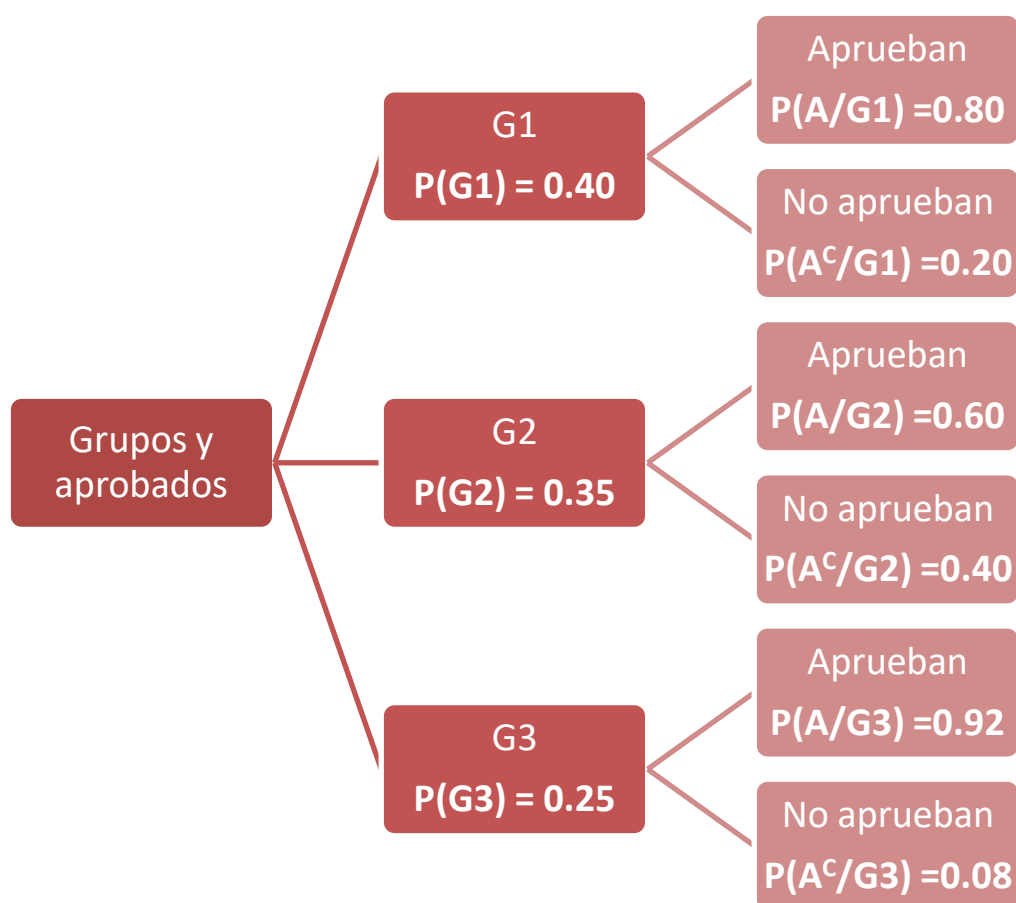
b.- (2 puntos) No haya superado la asignatura.

c.- (2 puntos) Haya superado la asignatura.

d.- (2 puntos) Ni haya superado la asignatura ni sea del grupo G1.

e.- (2 puntos) Si el estudiante elegido al azar ha superado la asignatura, calcule la probabilidad de ser del grupo G3.

Realizamos un diagrama de árbol.



a.- Nos piden calcular $P(A \cap G3)$.

$$P(A \cap G3) = P(G3) \cdot P(A/G3) = 0.25 \cdot 0.92 = \boxed{0.23}$$

b.- Nos piden calcular $P(A^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A^c) = P(G1) \cdot P(A^c/G1) + P(G2) \cdot P(A^c/G2) + P(G3) \cdot P(A^c/G3) =$$

$$= 0.40 \cdot 0.20 + 0.35 \cdot 0.40 + 0.25 \cdot 0.08 = \boxed{0.24}$$

c.- Nos piden calcular $P(A)$. Utilizamos el suceso contrario.

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.24 = \boxed{0.76}$$

d.- Nos piden calcular $P(A^c \cap G1^c)$.

$$\begin{aligned} P(A^c \cap G1^c) &= P((A \cup G1)^c) = 1 - P(A \cup G1) = 1 - [P(A) + P(G1) - P(A \cap G1)] = \\ &= 1 - [P(A) + P(G1) - P(G1)(A/G1)] = 1 - [0.76 + 0.40 - 0.40 \cdot 0.80] = \boxed{0.16} \end{aligned}$$

e.- Nos piden calcular $P(G3/A)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(G3/A) = \frac{P(G3 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(G3)P(A/G3)}{P(A)} = \frac{0.25 \cdot 0.92}{0.76} = \boxed{\frac{23}{76} \approx 0.3026}$$

6.- (10 puntos) Se sabe que el tiempo dedicado semanalmente a las tareas del hogar se distribuye según una normal con desviación típica 2 horas.

a.- (4 puntos) Para una muestra aleatoria de 64 hogares, el tiempo medio semanal dedicado a las tareas del hogar es de 10 horas. Determine un intervalo de confianza al 95% para la media de horas dedicadas semanalmente a las tareas del hogar.

b.- (4 puntos) Determine el tamaño muestral mínimo necesario para que el error que se cometa al estimar la media de la población por un intervalo de confianza sea, como máximo de 0,75 horas, con un nivel de confianza del 95%.

c.- (2 puntos) A partir de una muestra de 81 hogares se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza (9,8444; 10,7555) para la media de la población. Determine el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo.

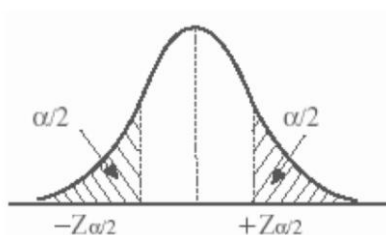
Sea X la variable aleatoria que mide el tiempo dedicado semanalmente a las tareas del hogar medido en horas.

$$X = N(\mu, 2)$$

a.-

Para un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$



El tamaño de la muestra es $n = \mathbf{64}$. La media es 10. La desviación típica es $\sigma = 2$.

El error lo obtenemos con la fórmula.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{64}} = 0,49$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (10 - 0,49, 10 + 0,49) = (9,51, 10,49)$$

b.-

Para un nivel de confianza del 95% $\rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

Igualemos el error a 0.75 y hallamos n en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0,75 = 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0,75\sqrt{n} = 1,96 \cdot 2 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1,96 \cdot 2}{0,75} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{1,96 \cdot 2}{0,75} \right)^2 = 27,318$$

El tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido sea menor de 0.75 es de 28 hogares.

c.- El error debe ser la mitad de la amplitud del Intervalo de confianza, es decir:

$$\text{Error} = \frac{10.7555 - 9.8444}{2} = 0.45555 \text{ horas.}$$

Utilizamos la fórmula del error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.45555 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{2}{\sqrt{81}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0.45555 \cdot 9}{2} = 2.049975 \approx 2.05$$

Buscamos en la tabla la probabilidad obtenida y tenemos que:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9798 \Rightarrow 1 - 0.9798 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 2(1 - 0.9798) = 0.0404 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0.9596 \approx 0.96}$$

El nivel de confianza es del 96 %.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8769
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9677	0.9683
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881