



Universidad de
Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2022-2023

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

- Responde en el pliego del examen a **cuatro preguntas cualesquiera** de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Indica en el pliego del examen la **agrupación de preguntas que responderás**: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Pregunta 1. En una fiesta se bebieron m copas de vino tinto por cada una de vino blanco. Cada copa (sea de vino tinto o blanco) contiene 0.15 litros y en total se tomaron $3 \cdot m$ litros de vino.

- a) **[0.5 puntos]** Plantea un sistema de dos ecuaciones en función del parámetro m donde las incógnitas x e y sean el número de copas de vino tinto y blanco, respectivamente.
- b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas copas se tomaron de cada tipo si en total se consumieron 9 litros de vino?

Pregunta 2. Una empresa que usa dos tamaños de vehículos debe renovar su flota. Cada vehículo grande le costará 30 000 euros; cada vehículo pequeño, 20 000 euros y dispone de un presupuesto total de 500 000 euros para comprar vehículos. Debe comprar a lo sumo el doble de vehículos grandes que pequeños. El mantenimiento anual de cada vehículo pequeño lo calcula en 300 euros; el de cada uno grande, en 600 euros y dispone de un presupuesto anual total de 9000 euros para mantenimiento.

- a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos vehículos de cada tipo puede comprar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños?
- b) **[0.75 puntos]** El beneficio esperado por cada vehículo grande es de 10 000 euros y por cada uno pequeño, de 6000 euros. ¿Cuántos vehículos debe comprar de cada tipo para maximizar el beneficio esperado? ¿Cuál sería ese beneficio esperado?

Pregunta 3. El consumo energético de una comunidad de vecinos durante una mañana se ajusta aproximadamente a la siguiente función donde x representa las horas transcurridas desde las 6:00 de la mañana:

$$f(x) = \begin{cases} a(x+2) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 3(x^2 - 6x + 12) & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ -x^2 + 11x - 16 & \text{si } 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

- a) **[0.75 puntos]** Estudia la continuidad de la función. Determina el valor de a para que dicha función sea continua en todo su dominio.
- b) **[1.75 puntos]** Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente f en todo su dominio. ¿En qué momento el consumo es máximo? ¿Y mínimo?

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = e^x + 2$, se pide:

- a) **[0.5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 3$.
- b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 2$.

Pregunta 5. El 80% de los empleados de una empresa hablan inglés y el 25% de todos los empleados hablan alemán. Además, el 20% de los empleados que hablan inglés, también hablan alemán.

- a) **[1.25 puntos]** Elegido un empleado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés pero no alemán?
- b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un empleado entre los que hablan alemán, ¿cuál es la probabilidad de que no hable inglés?

Pregunta 6. El 30% de los pasajeros que volaron con una compañía aérea el mes pasado lo hicieron por trabajo. De ellos, el 80% tienen tarjeta de fidelidad. Entre los pasajeros que volaron por causas diferentes al trabajo, el 40% tienen tarjeta de fidelidad.

- a) **[1.25 puntos]** Elegido un pasajero del mes pasado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga tarjeta de fidelidad?
- b) **[1.25 puntos]** Entre los pasajeros con tarjeta de fidelidad del mes pasado se eligió uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que volase por trabajo?

Pregunta 7. En una región se realiza un estudio sobre jóvenes (menores de 25 años) con carné de conducir.*

- a) **[1 punto]** Se quiere estimar el verdadero porcentaje de jóvenes que tienen carné de conducir con un nivel de confianza del 95 %, ¿cuál es el número mínimo de jóvenes que deberían ser entrevistados para que el error de estimación fuese menor o igual de 0.1?
- b) **[1.5 puntos]** Finalmente, se tomó una muestra de 140 jóvenes y se observó que 120 tenían carné de conducir. Halla, con un nivel de confianza del 99 %, un intervalo para estimar la proporción de jóvenes que tienen carné de conducir en esa región.

Pregunta 8. Un local que vende comida a domicilio trata de estimar el tiempo medio que sus repartidores tardan en entregar el pedido desde que lo recogen en el local. En una muestra de 200 pedidos se obtuvo un tiempo medio de 17.5 minutos. Se supone que el tiempo de reparto de un pedido, en minutos, se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 4 minutos.*

- a) **[1.5 puntos]** Construye un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99 %, para el tiempo medio de entrega de esos repartidores.
- b) **[1 punto]** ¿Cuál es el error de estimación en el intervalo anterior? Si, basándonos en la misma muestra, quisiésemos obtener un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 99.5 %, ¿el error sería mayor o menor que el obtenido en el apartado anterior?

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

SOLUCIONES:

Pregunta 1. En una fiesta se bebieron m copas de vino tinto por cada una de vino blanco. Cada copa (sea de vino tinto o blanco) contiene 0.15 litros y en total se tomaron $3 \cdot m$ litros de vino.

a) [0.5 puntos] Plantea un sistema de dos ecuaciones en función del parámetro m donde las incógnitas x e y sean el número de copas de vino tinto y blanco, respectivamente.

b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas copas se tomaron de cada tipo si en total se consumieron 9 litros de vino?

a) Llamamos “ x ” al número de copas de vino tinto que se bebieron e “ y ” al número de copas de vino blanco.

“Se bebieron m copas de vino tinto por cada una de vino blanco” $\rightarrow x = my$

“Cada copa (sea de vino tinto o blanco) contiene 0.15 litros y en total se tomaron $3 \cdot m$ litros de vino” $\rightarrow 0.15(x + y) = 3m$.

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 0.15(x + y) = 3m \\ x = my \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 15x + 15y = 300m \\ x - my = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x + y = 20m \\ x - my = 0 \end{array}}$$

b) Discutimos el sistema.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 20m \\ 1 & -m & 0 \end{pmatrix}$.

Vemos cuando se anula el determinante de A .

$$\left. \begin{array}{l} |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = -m - 1 \\ |A| = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -m - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

Analizamos dos casos distintos.

- Si $m \neq -1$ el determinante de A es no nulo y su rango es 2, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).
- Si $m = -1$ el determinante de A es nulo y su rango no es 2. Como el sistema queda muy sencillo lo intentamos resolver.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = -20 \\ x + y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

El sistema es **incompatible** (no tiene solución)

Respuestas: El sistema tiene solución para cualquier valor de m distinto de -1 . La solución es única.

Si se consumieron 9 litros ($3m = 9 \Rightarrow m = 3$) el sistema queda $\left. \begin{array}{l} x + y = 60 \\ x - 3y = 0 \end{array} \right\}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 60 - y \\ x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow 60 - y - 3y = 0 \Rightarrow 4y = 60 \Rightarrow \boxed{y = \frac{60}{4} = 15} \Rightarrow \boxed{x = 60 - 15 = 45}$$

Si se consumieron 9 litros de vino se bebieron 45 copas de vino tinto y 15 de vino blanco

Pregunta 2. Una empresa que usa dos tamaños de vehículos debe renovar su flota. Cada vehículo grande le costará 30 000 euros; cada vehículo pequeño, 20 000 euros y dispone de un presupuesto total de 500 000 euros para comprar vehículos. Debe comprar a lo sumo el doble de vehículos grandes que pequeños. El mantenimiento anual de cada vehículo pequeño lo calcula en 300 euros; el de cada uno grande, en 600 euros y dispone de un presupuesto anual total de 9000 euros para mantenimiento.

- a) [1.75 puntos] ¿Cuántos vehículos de cada tipo puede comprar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños?
- b) [0.75 puntos] El beneficio esperado por cada vehículo grande es de 10 000 euros y por cada uno pequeño, de 6000 euros. ¿Cuántos vehículos debe comprar de cada tipo para maximizar el beneficio esperado? ¿Cuál sería ese beneficio esperado?

- a) Llamamos “x” al número de vehículos grandes e “y” al número de vehículos pequeños.

“Cada vehículo grande le costará 30 000 euros; cada vehículo pequeño, 20 000 euros y dispone de un presupuesto total de 500 000 euros para comprar vehículos” $\rightarrow 30000x + 20000y \leq 500000$

“Debe comprar a lo sumo el doble de vehículos grandes que pequeños” $\rightarrow x \leq 2y$

“El mantenimiento anual de cada vehículo pequeño lo calcula en 300 euros; el de cada uno grande, en 600 euros y dispone de un presupuesto anual total de 9000 euros para mantenimiento” $\rightarrow 600x + 300y \leq 9000$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 30000x + 20000y \leq 500000 \\ x \leq 2y \\ 600x + 300y \leq 9000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 50 \\ x \leq 2y \\ 2x + y \leq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos la región factible que es la región del plano que contiene los puntos que cumplen todas las restricciones.

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación.

$$3x + 2y = 50$$

x	y = $\frac{50-3x}{2}$
0	25
10	10

$$2y = x$$

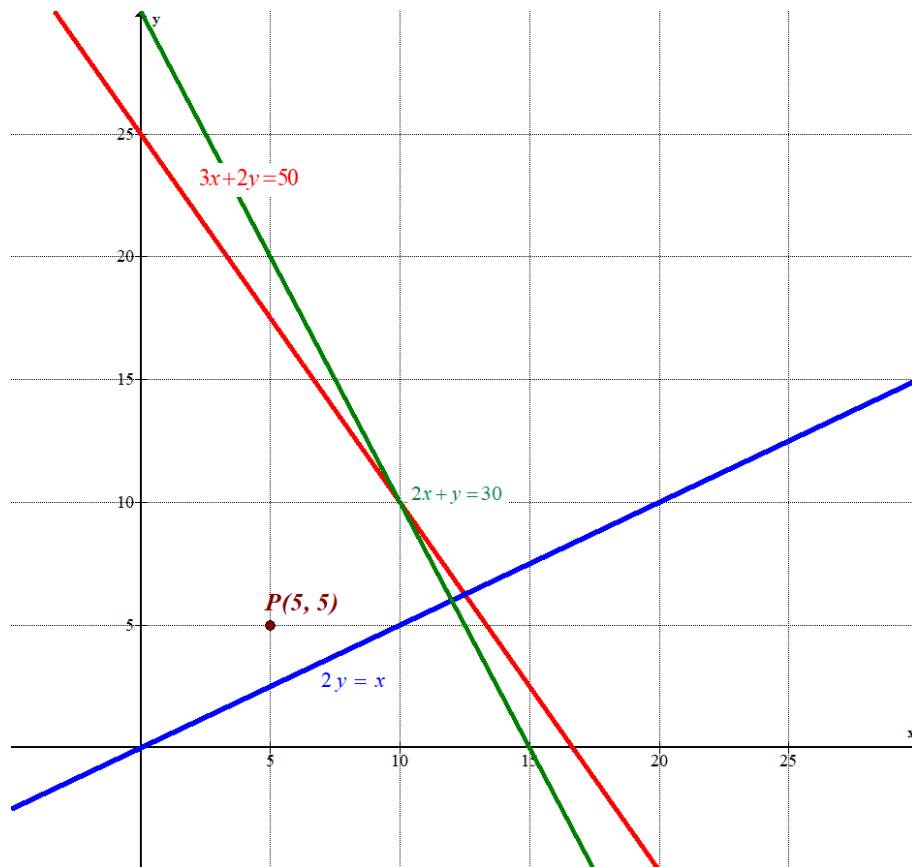
x	y = $\frac{x}{2}$
0	0
20	10

$$2x + y = 30$$

x	y = $30 - 2x$
0	30
10	10

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante



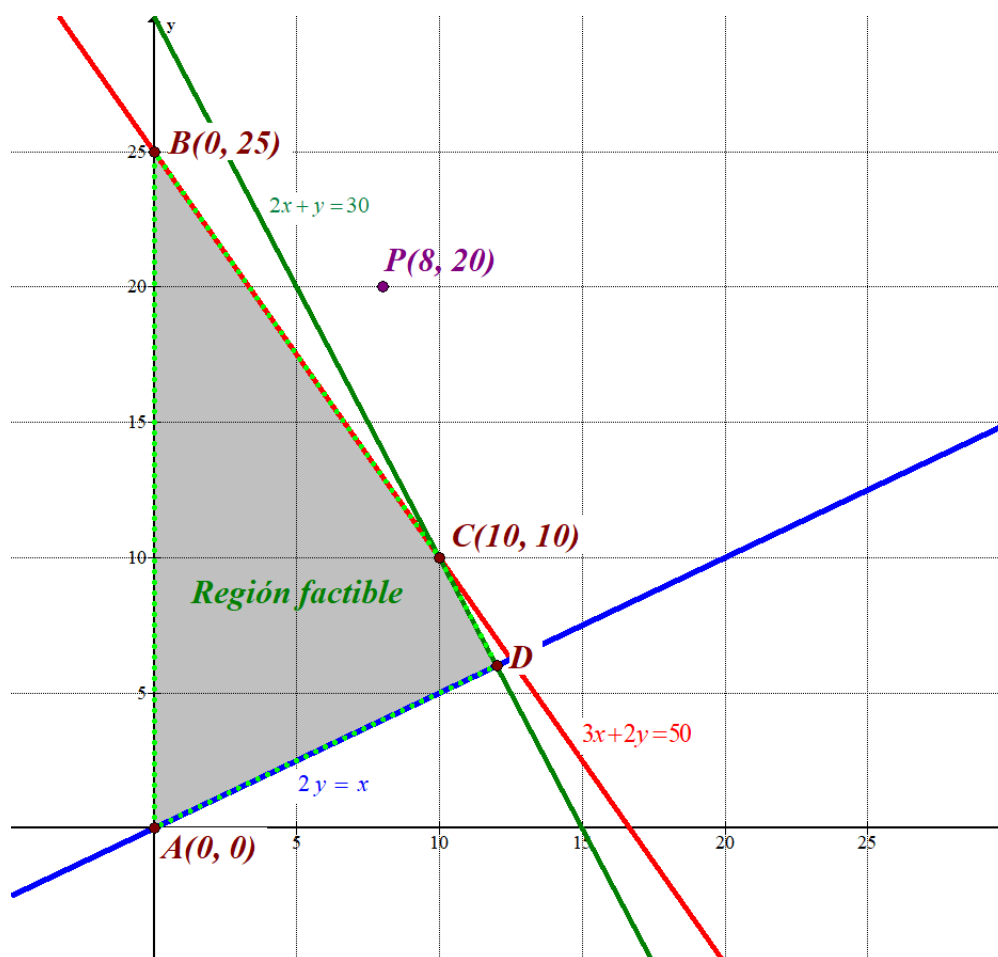
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 50 \\ x \leq 2y \\ 2x + y \leq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región que contiene las soluciones del sistema es

la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y verde, y por encima de la recta azul.

Comprobamos que el punto $P(5, 5)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \leq 50 \\ 5 \leq 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 5 + 5 \leq 30 \\ 5 \geq 0; 5 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Hallamos las coordenadas del vértice D.

$$\left. \begin{array}{l} 2y = x \\ 2x + y = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(2y) + y = 30 \Rightarrow 5y = 30 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow D(12, 6)$$

¿Se podrían comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños?

El punto (8, 20) no pertenece a la región factible, por lo que no se pueden comprar 8 coches grandes y 20 pequeños ya que no cumplen algunas de las restricciones.

- b) El beneficio esperado por cada vehículo grande es de 10 000 euros y por cada uno pequeño, de 6000 euros $\rightarrow$ La función Beneficio queda $B(x, y) = 10000x + 6000y$

Deseamos maximizar el beneficio.

Para encontrar el beneficio máximo valoramos la función en cada uno de sus vértices:

$$A(0,0) \rightarrow B(0,0) = 0$$

$$B(0,25) \rightarrow B(0,25) = 0 + 6000 \cdot 25 = 150000 \text{ €}$$

$$C(10, 10) \rightarrow B(10,10) = 100000 + 60000 = 160000 \text{ € ¡Máximo!}$$

$$D(12,6) \rightarrow B(12,6) = 120000 + 36000 = 156000 \text{ €}$$

El máximo beneficio es de 160 000 euros y se obtiene en el vértice C(10, 10) lo que significa comprar 10 coches de cada tipo.

Pregunta 3. El consumo energético de una comunidad de vecinos durante una mañana se ajusta aproximadamente a la siguiente función donde x representa las horas transcurridas desde las 6:00 de la mañana:

$$f(x) = \begin{cases} a(x+2) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 3(x^2 - 6x + 12) & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ -x^2 + 11x - 16 & \text{si } 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

a) **[0.75 puntos]** Estudia la continuidad de la función. Determina el valor de a para que dicha función sea continua en todo su dominio.

b) **[1.75 puntos]** Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente f en todo su dominio. ¿En qué momento el consumo es máximo? ¿Y mínimo?

a) Para que la función f sea continua en todo su dominio debe serlo en $x = 2$ y en $x = 4$.

$$\text{Continua en } x = 2 \rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x).$$

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 4a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 3(x^2 - 6x + 12) = 3(2^2 - 6 \cdot 2 + 12) = 12 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} a(x+2) = 4a \\ f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 12 = 4a \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

$$\text{¿Continua en } x = 4? \rightarrow f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)?$$

$$\left. \begin{aligned} f(4) &= 3(4^2 - 6 \cdot 4 + 12) = 12 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} -x^2 + 11x - 16 = -4^2 + 11 \cdot 4 - 16 = 12 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} 3(x^2 - 6x + 12) = 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 12$$

Con $a = 3$ la función es continua en todo su dominio $[0, 8]$.

Con $a \neq 3$ la función es continua en $[0, 2) \cup (2, 8]$

a) Con $a = 3$ la función queda:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 6 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 3(x^2 - 6x + 12) & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ -x^2 + 11x - 16 & \text{si } 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

Su gráfica es un trozo de recta (entre 0 y 2), un trozo de parábola convexa (U) (entre 2 y 4) y otro trozo de parábola cóncava (∩) (entre 4 y 8).

Hallamos los vértices de las parábolas.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 - 6x + 12) \Rightarrow f'(x) = 3(2x - 6) \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3(2x - 6) = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow \boxed{x = 3} \in (2, 4)$$

$$f(x) = -x^2 + 11x - 16 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f'(x) = -2x + 11 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 11 = 0 \Rightarrow 2x = 11 \Rightarrow \boxed{x = \frac{11}{2} = 5.5} \in (4, 8)$$

Hacemos una tabla de valores para cada trozo de gráfica y la representamos.

$$0 \leq x \leq 2$$

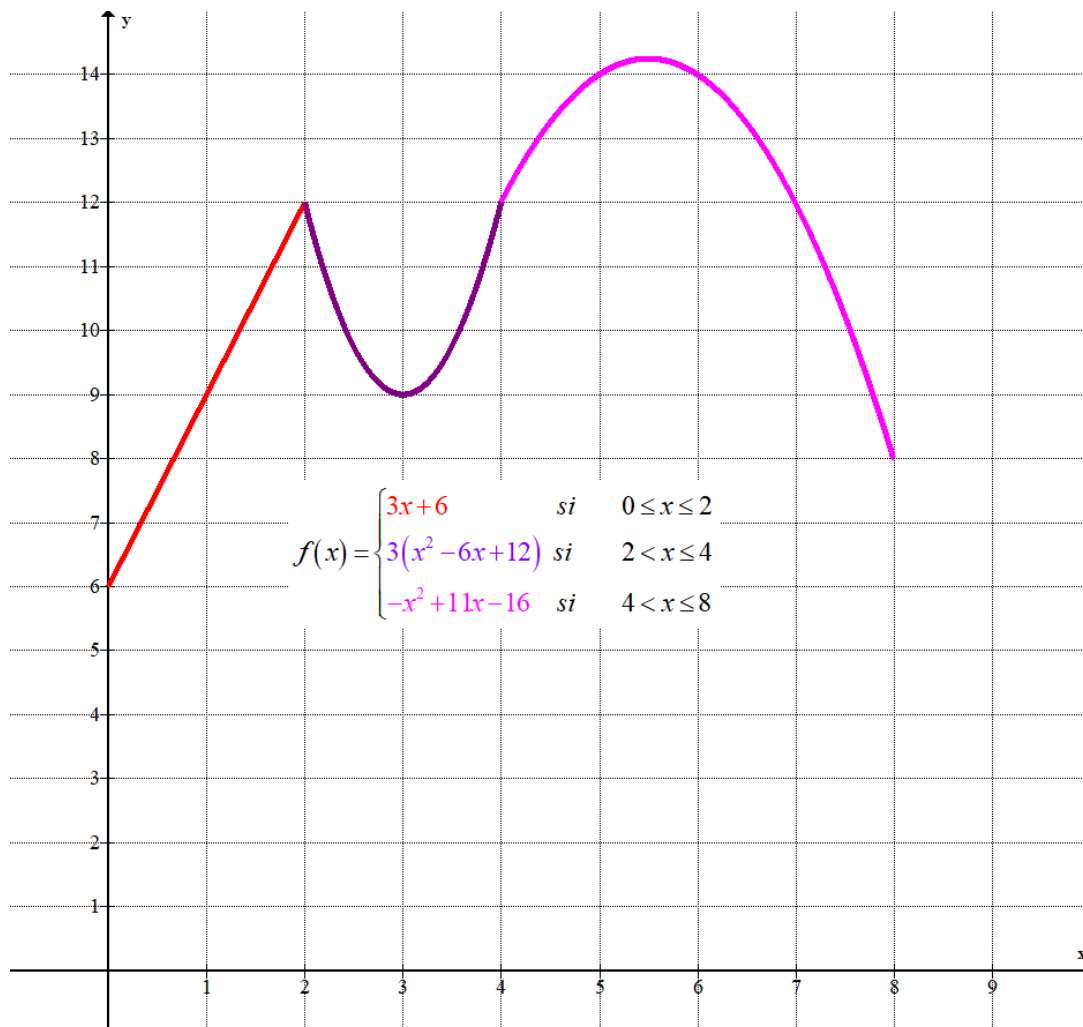
x	$y = 3x + 6$
0	6
2	12

$$2 < x \leq 4$$

x	$y = 3(x^2 - 6x + 12)$
2.5	9.75
3	9
4	12

$$4 < x \leq 8$$

x	$y = -x^2 + 11x - 16$
4.5	13.25
5	14
5.5	14.25
6	14
8	8



¿En qué momento el consumo es máximo? ¿Y mínimo?

Observando la gráfica el consumo es máximo en $x = 5.5$, es decir, a las 11 horas y 30 minutos.

El consumo es mínimo en $x = 0$, es decir, a las 6 horas.

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = e^x + 2$, se pide:

a) [0.5 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 3$.

b) [2 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 2$.

a)

$$F(x) = \int f(x) dx = \int e^x + 2 dx = e^x + 2x + K$$

Como debe ser $F(0) = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = e^x + 2x + K \\ F(0) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow -e^0 + 2 \cdot 0 + K = 3 \Rightarrow -1 + K = 3 \Rightarrow K = 4 \Rightarrow \boxed{F(x) = e^x + 2x + 4}$$

b) El dominio de la función son todos los números reales.

Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = e^x + 2 \Rightarrow f'(x) = e^x$$

La derivada siempre es positiva, por lo que la función siempre es creciente.

Cuando $x \rightarrow -\infty$ vemos a qué valor tiende la función.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 2 = e^{-\infty} + 2 = 0 + 2 = 2$$

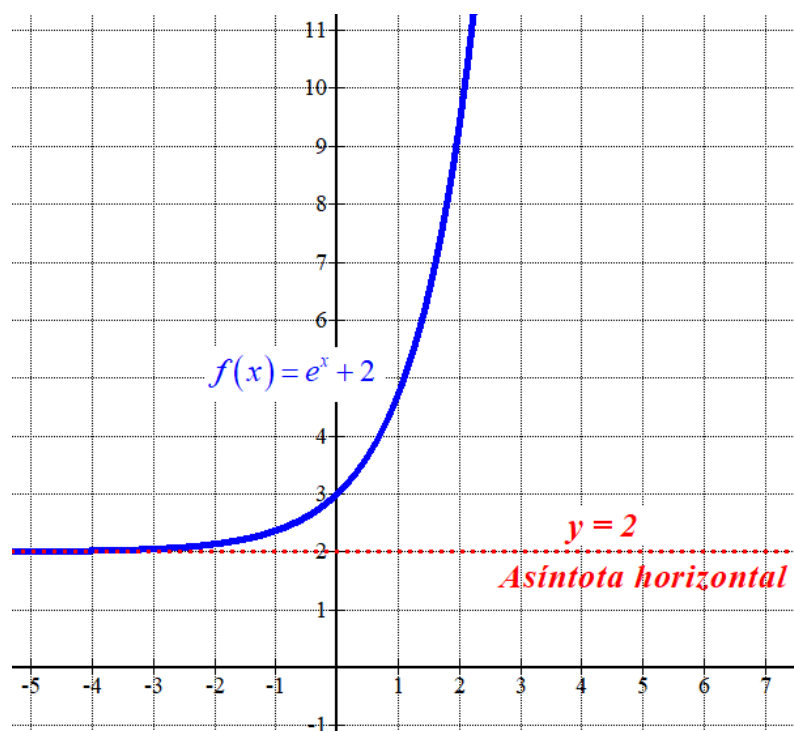
Cuando $x \rightarrow +\infty$ vemos a qué valor tiende la función.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 2 = e^{+\infty} + 2 = +\infty + 2 = +\infty$$

La gráfica tiene una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$ con ecuación $y = 2$.

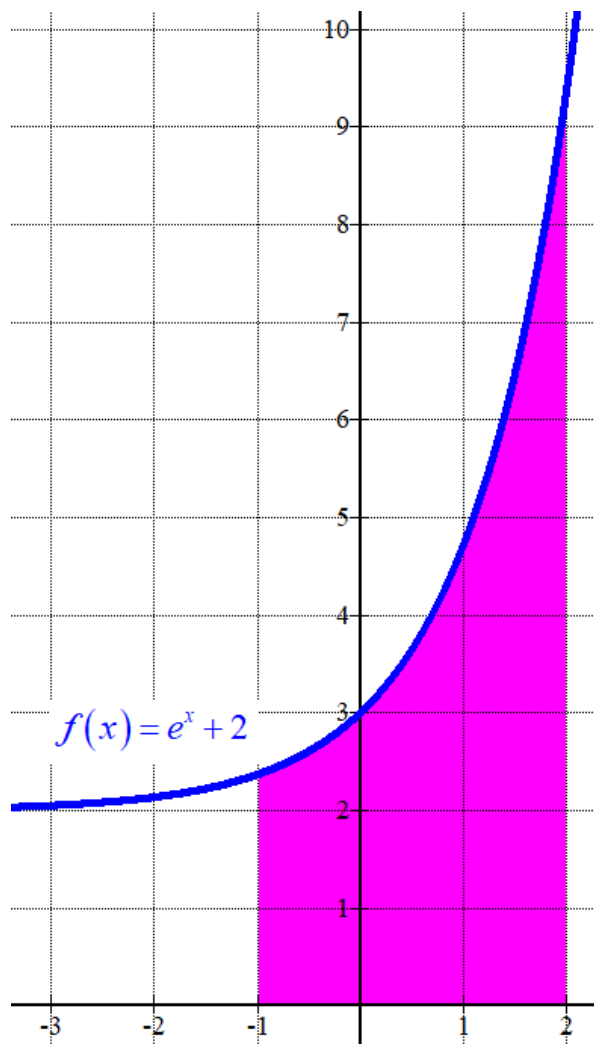
Hacemos una tabla de valores.

x	$y = e^x + 2$
-2	$2 + \frac{1}{e^2} \approx 2.1$
-1	$2 + \frac{1}{e} \approx 2.37$
0	3
1	$2 + e \approx 4.7$
2	$2 + e^2 \approx 9.4$



El área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 2$ es el valor de la integral definida de la función entre -1 y 2 .

$$\text{Área región} = \int_{-1}^2 e^x + 2 dx = \left[e^x + 2x \right]_{-1}^2 = \left[e^2 + 4 \right] - \left[e^{-1} - 2 \right] = \boxed{e^2 - \frac{1}{e} + 6 \approx 13.02 \text{ u}^2}$$



Pregunta 5. El 80% de los empleados de una empresa hablan inglés y el 25% de todos los empleados hablan alemán. Además, el 20% de los empleados que hablan inglés, también hablan alemán.

a) **[1.25 puntos]** Elegido un empleado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés pero no alemán?

b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un empleado entre los que hablan alemán, ¿cuál es la probabilidad de que no hable inglés?

Llamamos I al suceso “Habla Inglés” y A al suceso “Habla Alemán”.

El 20% de los empleados que hablan inglés (80 %), también hablan alemán $\rightarrow 0.20 \cdot 80 = 16\%$ de los empleados hablan alemán e inglés.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Inglés	No Inglés	
Alemán	16		25
No alemán			
	80		100

Completamos la tabla.

	Inglés	No Inglés	
Alemán	16	9	25
No alemán	64	11	75
	80	20	100

Aplicando la regla de Laplace y con los datos que nos proporciona la tabla respondemos a las preguntas.

$$a) P(I \cap A^c) = \frac{64}{100} = \boxed{0.64}$$

$$b) P(I^c / A) = \frac{9}{25} = \boxed{0.36}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Llamamos I al suceso “Habla Inglés” y A al suceso “Habla Alemán”.

Sabemos que $P(I) = 0.8$, $P(A) = 0.25$ y $P(A/I) = 0.2$.

a)

$$P(A/I) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)} \Rightarrow 0.2 = \frac{P(A \cap I)}{0.8} \Rightarrow P(A \cap I) = 0.2 \cdot 0.8 = 0.16$$

$$P(I) = P(I \cap A) + P(I \cap A^c) \Rightarrow 0.8 = 0.16 + P(I \cap A^c) \Rightarrow P(I \cap A^c) = 0.8 - 0.16 = 0.64$$

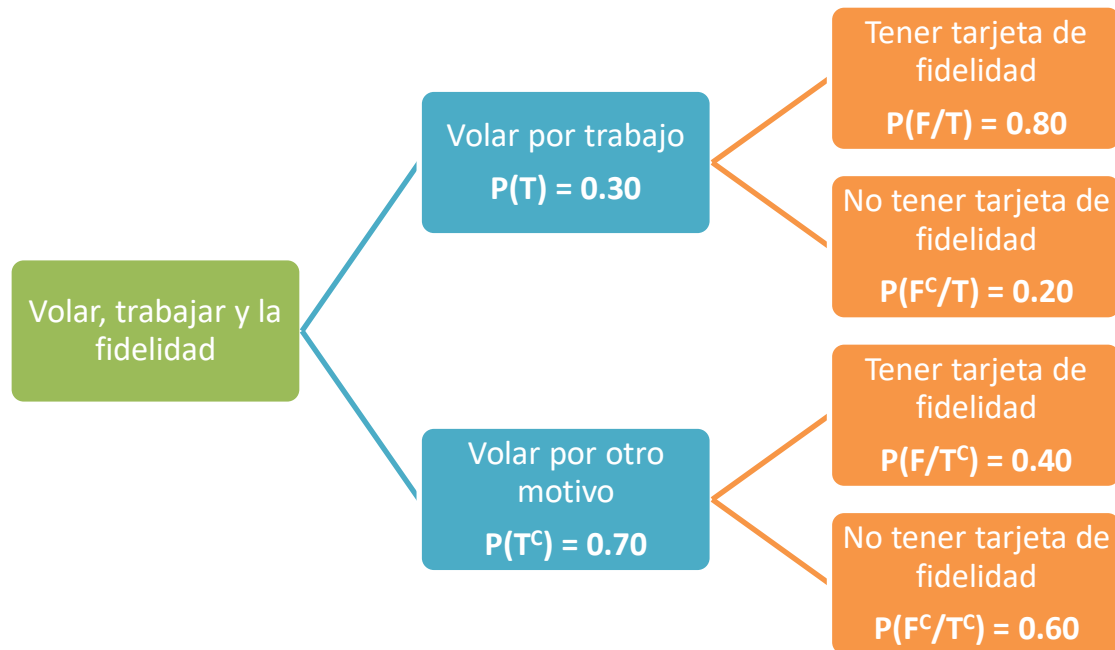
b)

$$P(I^c / A) = \frac{P(I^c \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(I \cap A)}{0.25} = \frac{0.25 - 0.16}{0.25} = \frac{0.09}{0.25} = \boxed{0.36}$$

Pregunta 6. El 30% de los pasajeros que volaron con una compañía aérea el mes pasado lo hicieron por trabajo. De ellos, el 80% tienen tarjeta de fidelidad. Entre los pasajeros que volaron por causas diferentes al trabajo, el 40% tienen tarjeta de fidelidad.

- a) **[1.25 puntos]** Elegido un pasajero del mes pasado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga tarjeta de fidelidad?
- b) **[1.25 puntos]** Entre los pasajeros con tarjeta de fidelidad del mes pasado se eligió uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que volase por trabajo?

Llamamos T = “Volar por trabajo”, F = “Tener tarjeta de fidelidad”
Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(F)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(F) = P(T)P(F/T) + P(T^c)P(F/T^c) = 0.3 \cdot 0.8 + 0.7 \cdot 0.4 = \boxed{0.52}$$

- b) Nos piden calcular $P(T/F)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(T/F) = \frac{P(T \cap F)}{P(F)} = \frac{P(T)P(F/T)}{P(F)} = \frac{0.3 \cdot 0.8}{0.52} = \boxed{\frac{6}{13} \approx 0.4615}$$

Pregunta 7. En una región se realiza un estudio sobre jóvenes (menores de 25 años) con carné de conducir.*

a) [1 punto] Se quiere estimar el verdadero porcentaje de jóvenes que tienen carné de conducir con un nivel de confianza del 95 %, ¿cuál es el número mínimo de jóvenes que deberían ser entrevistados para que el error de estimación fuese menor o igual de 0.1?

b) [1.5 puntos] Finalmente, se tomó una muestra de 140 jóvenes y se observó que 120 tenían carné de conducir. Halla, con un nivel de confianza del 99 %, un intervalo para estimar la proporción de jóvenes que tienen carné de conducir en esa región.

a) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; **$F(1,96) = 0,975$** ; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Como no tenemos un valor de la proporción muestral tomaremos $p = 0.5$

Utilizamos la fórmula del error.

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.1 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow \frac{0.1}{1.96} = \sqrt{\frac{0.25}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0.1}{1.96} \right)^2 = \frac{0.25}{n} \Rightarrow n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.1}{1.96} \right)^2} = 96.04 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser un número entero superior al obtenido.

El tamaño mínimo de la muestra es de 97 jóvenes.

b) Tamaño de la muestra = $n = 140$. Proporción muestral = $p = \frac{120}{140} = \frac{6}{7} \approx 0.8571$.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.58$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y **$F(2,58) = 0,995$** .

Obtenemos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2.58 \cdot \sqrt{\frac{\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{7}}{140}} \approx 0.0763$$

El intervalo de confianza será:

$$(p - Error, p + Error) = (0.8571 - 0.0763, 0.8571 + 0.0763) = (0.7808, 0.9334)$$

Pregunta 8. Un local que vende comida a domicilio trata de estimar el tiempo medio que sus repartidores tardan en entregar el pedido desde que lo recogen en el local. En una muestra de 200 pedidos se obtuvo un tiempo medio de 17.5 minutos. Se supone que el tiempo de reparto de un pedido, en minutos, se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 4 minutos.*

a) **[1.5 puntos]** Construye un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99 %, para el tiempo medio de entrega de esos repartidores.

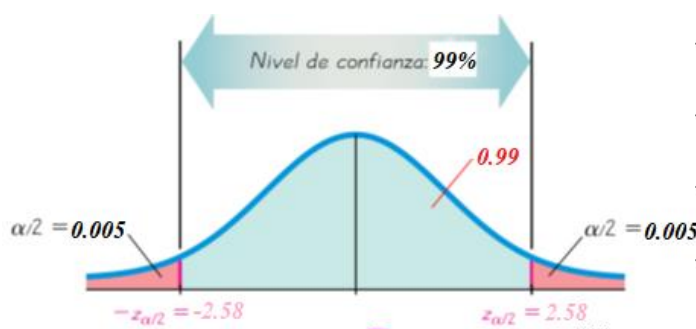
b) **[1 punto]** ¿Cuál es el error de estimación en el intervalo anterior? Si, basándonos en la misma muestra, quisiésemos obtener un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 99.5 %, ¿el error sería mayor o menor que el obtenido en el apartado anterior?

a) X = Tiempo de entrega de un repartidor en minutos.

$X = N(\mu, 4)$.

Tamaño de la muestra = $n = 200$. Media muestral = $\bar{x} = 17.5$ minutos.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.58$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y **$F(2,58) = 0,995$.**

El error sigue la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow Error = 2.58 \cdot \frac{4}{\sqrt{200}} \approx 0.7297 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza para la media de tiempo de entrega de un pedido es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (17.5 - 0.7297, 17.5 + 0.7297) = (16.7703, 18.2297)$$

Es decir, tenemos una confianza del 99% de que el tiempo medio de entrega de un pedido está entre 16.7703 y 18.2297 minutos.

b) El error de estimación ha sido de 0.7297 minutos.

Si quisiésemos obtener un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 99.5 %, es

decir, mayor que el anterior el valor de $z_{\alpha/2}$ sería mayor y el $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ también sería mayor.

