

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JUNIO 2023

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

1. El examen consta de seis ejercicios, de los cuales se resolverán únicamente tres (cualesquiera).
2. En caso de intentar resolver más de tres ejercicios, se corregirán únicamente los tres primeros que aparezcan en el cuadernillo del examen.
3. La puntuación máxima de cada ejercicio es de 2.5 puntos (dentro de cada ejercicio, la puntuación máxima de cada apartado se indica entre corchetes). La nota del examen será el resultado de dividir por 0.75 la suma de la puntuación obtenida en los tres ejercicios.
4. Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
5. Queda prohibido el uso de calculadoras gráficas y/o programables, así como el de cualquier dispositivo con capacidad de almacenar y/o transmitir datos.

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

En un almacén de construcción venden sacos de cemento de 25 kg, 50 kg y 100 kg. Cierta día se vendió un total de 180 sacos por un importe de 29200 €. Se sabe que el precio del kg de cemento es de 4 € y que ese día se vendieron el doble de sacos de 25 kg que la suma de los sacos de 50 kg más los de 100 kg.

- A. [1,25 PUNTOS] Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular cuántos sacos de cada tamaño se vendieron ese día.
- B. [1,25 PUNTOS] Resuélvalo.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

El ayuntamiento dispone de 48000 € para la puesta en marcha de huertas ecológicas en un viejo terreno municipal abandonado. Se destinará un máximo de 50 hectáreas al cultivo de hortalizas y un mínimo de 10 al de árboles frutales. Se dispone de un tanque de agua con una capacidad de 480 m³ anuales para riego. Se sabe que cada hectárea dedicada al cultivo de hortalizas necesita 8 m³ de agua anuales, cantidad que disminuye hasta los 4 m³ anuales en el caso de las hectáreas dedicadas al cultivo de árboles frutales. Se sabe también que cada hectárea dedicada al cultivo de hortalizas requiere una inversión por parte del ayuntamiento de 400 €, siendo esta cantidad de 800 € para cada hectárea dedicada al cultivo de árboles frutales. Se sabe además que la producción anual de cada hectárea de hortalizas es de 450 kg y la de cada hectárea de árboles frutales es de 600 kg. El objetivo que persigue el ayuntamiento es maximizar la producción anual total.

- A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
- B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, identificando claramente sus vértices.
- C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántas hectáreas se deben dedicar al cultivo de hortalizas y cuántas al de árboles frutales para maximizar la producción anual total?
- D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicha producción?
- .

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] ¿Cuáles son las asíntotas (horizontales, verticales y/u oblicuas) de la siguiente función?

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 1}$$

B. [1,25 PUNTOS] Dada la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x-1} & \text{si } 0.5 \leq x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ e^x + 1 & \text{si } 2 < x \leq 2.5 \end{cases}$$

Determine los parámetros a y b para que f sea continua en el intervalo $[0.5, 2.5]$.

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] Un hospital ha determinado que el número de pacientes que hay en urgencias a lo largo de un turno de 36 horas viene dado por la función $P(t)$, donde $t \in [0, 36]$ se expresa en horas. Se sabe que $P'(t) = t^2 - 40t + 231$ es la derivada de $P(t)$ y que al finalizar el turno quedan en urgencias 448 pacientes. ¿En qué momento del turno hay menos pacientes en urgencias? ¿Cuántos pacientes hay en ese momento?

B. [1,25 PUNTOS] En una panadería el coste de producción de una hogaza es de 2 €, y el precio de venta de x hogazas, en €, viene dado por la función $P(x) = x(122 - x)$. Además, esta panadería tiene unos gastos fijos mensuales de 500 €. Suponiendo que todas las hogazas que se producen se venden, ¿cuántas hogazas debería producir la panadería al mes para maximizar sus ganancias mensuales? ¿A cuánto ascenderían esas ganancias?

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

El precio de las lavadoras que se venden en una gran superficie es una variable que sigue una distribución normal de desviación típica 235 €. Para una muestra de 50 lavadoras, escogidas al azar, se obtiene un precio medio de 405 €.

A. [1,25 PUNTOS] Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el precio medio de una lavadora.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de lavadoras que habría que considerar para que el error cometido al estimar el precio medio por lavadora con un nivel de confianza del 97 % fuese de 50 €?

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

Se tiene una urna que contiene 5 bolas blancas, 3 negras y 2 rojas. Si se extraen al azar dos bolas de forma consecutiva y sin reemplazamiento:

A. [0,25 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean rojas?

B. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color?

C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las dos bolas extraídas sea negra?

D. [0,75 PUNTOS] Si la segunda bola que se extrae es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la primera haya sido blanca?

SOLUCIONES

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

En un almacén de construcción venden sacos de cemento de 25 kg, 50 kg y 100 kg. Cierta día se vendió un total de 180 sacos por un importe de 29200 €. Se sabe que el precio del kg de cemento es de 4 € y que ese día se vendieron el doble de sacos de 25 kg que la suma de los sacos de 50 kg más los de 100 kg.

A. [1,25 PUNTOS] Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular cuántos sacos de cada tamaño se vendieron ese día.

B. [1,25 PUNTOS] Resuélvalo.

A. Llamamos “x” al número de sacos de cemento de 25 kg, “y” al número de sacos de cemento de 50 kg, “z” al número de sacos de cemento de 100 kg.

“Cierta día se vendió un total de 180 sacos” $\rightarrow x + y + z = 180$

“Cierta día se vendió un total de 180 sacos por un importe de 29200 €. Se sabe que el precio del kg de cemento es de 4 €” $\rightarrow (25x + 50y + 100z) \cdot 4 = 29200$

“Ese día se vendieron el doble de sacos de 25 kg que la suma de los sacos de 50 kg más los de 100 kg” $\rightarrow x = 2(y + z)$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 180 \\ (25x + 50y + 100z) \cdot 4 = 29200 \\ x = 2(y + z) \end{array} \right\}$$

B. Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 180 \\ (25x + 50y + 100z) \cdot 4 = 29200 \\ x = 2(y + z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 180 \\ 100x + 200y + 400z = 29200 \\ x = 2y + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 180 \\ \Rightarrow x + 2y + 4z = 292 \\ x = 2y + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + 2z + y + z = 180 \\ 2y + 2z + 2y + 4z = 292 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y + 3z = 180 \\ 4y + 6z = 292 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z = 60 \rightarrow y = 60 - z \\ 2y + 3z = 146 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(60 - z) + 3z = 146 \Rightarrow 120 - 2z + 3z = 146 \Rightarrow \boxed{z = 26} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 60 - 26 = 34} \Rightarrow \boxed{x = 68 + 52 = 120}$$

Se vendieron 120 sacos de 25 kg, 34 sacos de 50 kg y 26 sacos de 100 kg.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

El ayuntamiento dispone de 48000 € para la puesta en marcha de huertas ecológicas en un viejo terreno municipal abandonado. Se destinará un máximo de 50 hectáreas al cultivo de hortalizas y un mínimo de 10 al de árboles frutales. Se dispone de un tanque de agua con una capacidad de 480 m³ anuales para riego. Se sabe que cada hectárea dedicada al cultivo de hortalizas necesita 8 m³ de agua anuales, cantidad que disminuye hasta los 4 m³ anuales en el caso de las hectáreas dedicadas al cultivo de árboles frutales. Se sabe también que cada hectárea dedicada al cultivo de hortalizas requiere una inversión por parte del ayuntamiento de 400 €, siendo esta cantidad de 800 € para cada hectárea dedicada al cultivo de árboles frutales. Se sabe además que la producción anual de cada hectárea de hortalizas es de 450 kg y la de cada hectárea de árboles frutales es de 600 kg. El objetivo que persigue el ayuntamiento es maximizar la producción anual total.

A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, identificando claramente sus vértices.

C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántas hectáreas se deben dedicar al cultivo de hortalizas y cuántas al de árboles frutales para maximizar la producción anual total?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicha producción?

A. Llamamos x = número de hectáreas para hortalizas, y = número de hectáreas para frutales.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	m ³ de agua	Inversión	Producción
Nº hectáreas para hortalizas (x)	$8x$	$400x$	$450x$
Nº hectáreas para frutales (y)	$4y$	$800y$	$600y$
TOTAL	$8x + 4y$	$400x + 800y$	$450x + 600y$

La función objetivo que deseamos maximizar es la producción que vienen expresada como:

$$P(x, y) = 450x + 600y$$

Las restricciones son:

$$\text{“El ayuntamiento dispone de 48000 €”} \rightarrow 400x + 800y \leq 48000$$

$$\text{“Se destinará un máximo de 50 hectáreas al cultivo de hortalizas y un mínimo de 10 al de árboles frutales”} \rightarrow x \leq 50; y \geq 10$$

$$\text{“Se dispone de un tanque de agua con una capacidad de 480 m}^3\text{ anuales para riego”} \rightarrow 8x + 4y \leq 480$$

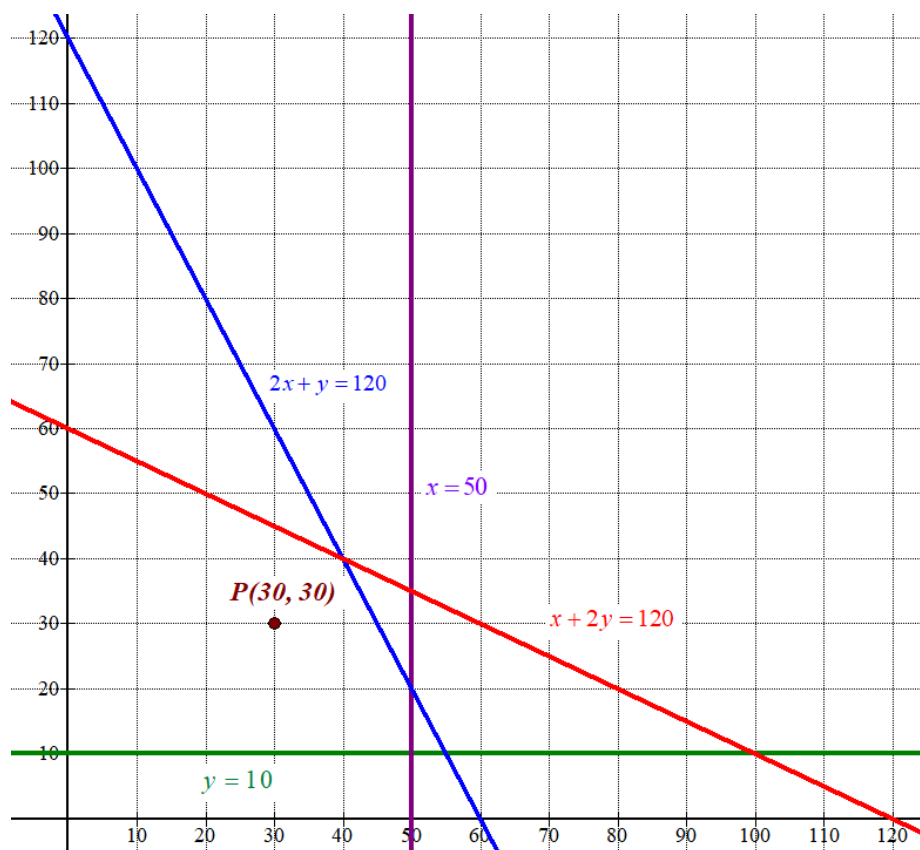
$$\text{Las cantidades deben ser positivas} \rightarrow x \geq 0; y \geq 0$$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 400x + 800y \leq 48000 \\ x \leq 50; y \geq 10 \\ 8x + 4y \leq 480 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 120 \\ x \leq 50; y \geq 10 \\ 2x + y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

B. Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x + 2y = 120$		$2x + y = 120$		$y = 10$		$x = 50$		$x \geq 0; y \geq 0$	
x	$y = \frac{120-x}{2}$	x	$y = 120-2x$	x	$y = 10$	$x = 50$	y	Primer cuadrante	
0	60	0	120	0	10	50	10		
40	40	40	40	50	10	50	20		
100	10	50	20						



Como las restricciones del problema son

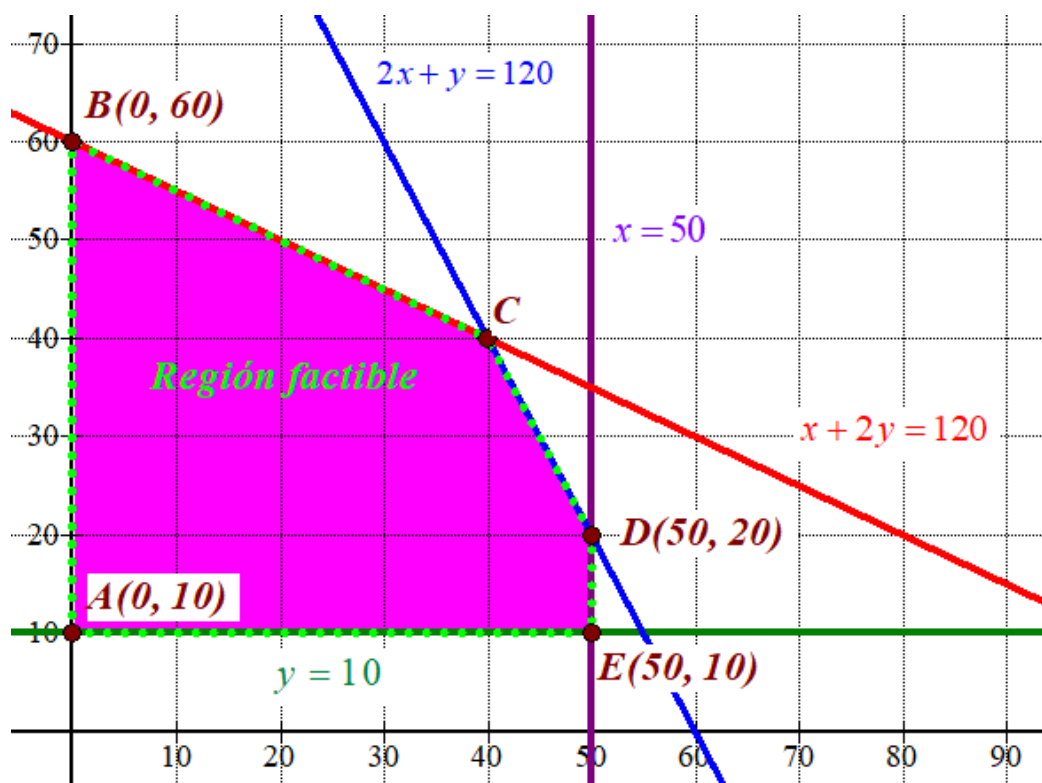
$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 120 \\ x \leq 50; y \geq 10 \\ 2x + y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer}$$

cuadrante que está por debajo de las rectas azul y roja, por encima de la recta horizontal verde y a la izquierda de la recta vertical violeta.

Comprobamos que el punto $P(30, 30)$ que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 30 + 2 \cdot 30 \leq 120 \\ 30 \leq 50; 30 \geq 10 \\ 2 \cdot 30 + 30 \leq 120 \\ 30 \geq 0; 30 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del vértice C.

$$C \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 120 \\ x + 2y = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 120 - 2x \\ x + 2y = 120 \end{cases} \Rightarrow x + 2(120 - 2x) = 120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 240 - 4x = 120 \Rightarrow -3x = -120 \Rightarrow x = \frac{120}{3} = 40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 120 - 80 = 40 \Rightarrow C(40, 40)$$

Los vértices son A(0, 10); B(0, 60); C(40, 40), D(50, 20) y E(50, 10).

C. Valoramos la función objetivo $P(x, y) = 450x + 600y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 10) \rightarrow P(0, 10) = 6000$$

$$B(0, 60) \rightarrow P(0, 60) = 36000$$

$$C(40, 40) \rightarrow P(40, 40) = 450 \cdot 40 + 600 \cdot 40 = 42000 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(50, 20) \rightarrow P(50, 20) = 22500 + 12000 = 34500$$

$$E(50, 10) \rightarrow P(50, 10) = 22500 + 6000 = 28500$$

La máxima producción se obtiene en el vértice C (40, 40). Se deben cultivar 40 hectáreas de hortalizas y 40 de frutales para maximizar la producción anual.

D. La máxima producción es de 42000 kg y se obtiene con 40 hectáreas de hortalizas y 40 de frutales.

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] ¿Cuáles son las asíntotas (horizontales, verticales y/u oblicuas) de la siguiente función?

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 1}$$

B. [1,25 PUNTOS] Dada la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x-1} & \text{si } 0.5 \leq x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ e^x + 1 & \text{si } 2 < x \leq 2.5 \end{cases}$$

Determine los parámetros a y b para que f sea continua en el intervalo $[0.5, 2.5]$.

A. Como $x = 1$ anula el denominador el dominio de la función es $\mathbb{R} - \{1\}$,

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 1}{x - 1} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{2 - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}} = \frac{2}{0} = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 1}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{2 - \frac{1}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{x - 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\cancel{2x^2} - 1 - \cancel{2x^2} + 2x}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{2 - \frac{1}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$

$y = 2x + 2$ es asíntota oblicua de la función.

B. Para que f sea continua en el intervalo $[0.5, 2.5]$ debe serlo en $x = 1$ y en $x = 2$.

Continua en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= a \cdot 1^2 + b = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln 1}{1-1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 + b = a + b \\ f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + b = 1$$

Continua en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= a \cdot 2^2 + b = 4a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} ax^2 + b = 4a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} e^x + 1 = e^2 + 1 \\ f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4a + b = e^2 + 1$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} a + b &= 1 \\ 4a + b &= e^2 + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} b &= 1 - a \\ 4a + b &= e^2 + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4a + 1 - a = e^2 + 1 \Rightarrow 3a = e^2 \Rightarrow a = \frac{e^2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 1 - \frac{e^2}{3} = \frac{3 - e^2}{3}$$

Los valores buscados son $a = \frac{e^2}{3}$; $b = \frac{3 - e^2}{3}$.

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] Un hospital ha determinado que el número de pacientes que hay en urgencias a lo largo de un turno de 36 horas viene dado por la función $P(t)$, donde $t \in [0, 36]$ se expresa en horas. Se sabe que $P'(t) = t^2 - 40t + 231$ es la derivada de $P(t)$ y que al finalizar el turno quedan en urgencias 448 pacientes. ¿En qué momento del turno hay menos pacientes en urgencias? ¿Cuántos pacientes hay en ese momento?

B. [1,25 PUNTOS] En una panadería el coste de producción de una hogaza es de 2 €, y el precio de venta de x hogazas, en €, viene dado por la función $P(x) = x(122 - x)$. Además, esta panadería tiene unos gastos fijos mensuales de 500 €. Suponiendo que todas las hogazas que se producen se venden, ¿cuántas hogazas debería producir la panadería al mes para maximizar sus ganancias mensuales? ¿A cuánto ascenderían esas ganancias?

A. La integral de la derivada es la función.

$$P(t) = \int P'(t) dt = \int t^2 - 40t + 231 dt = \frac{t^3}{3} - 40\frac{t^2}{2} + 231t = \frac{t^3}{3} - 20t^2 + 231t + K$$

Determinamos el valor de K utilizando que $P(36) = 448$.

$$\left. \begin{array}{l} P(t) = \frac{t^3}{3} - 20t^2 + 231t + K \\ P(36) = 448 \end{array} \right\} \Rightarrow P(36) = \frac{36^3}{3} - 20 \cdot 36^2 + 231 \cdot 36 + K = 448 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{36^3}{3} - 20 \cdot 36^2 + 231 \cdot 36 + K = 448 \Rightarrow -2052 + K = 448 \Rightarrow K = 2500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(t) = \frac{t^3}{3} - 20t^2 + 231t + 2500}$$

Utilizamos la derivada para hallar los momentos críticos.

$$\left. \begin{array}{l} P'(t) = t^2 - 40t + 231 \\ P'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow t^2 - 40t + 231 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{40 \pm \sqrt{(-40)^2 - 4(1)(231)}}{2} = \frac{40 \pm 26}{2} = \begin{cases} \frac{40+26}{2} = 33 = t \\ \frac{40-26}{2} = 7 = t \end{cases}$$

Averiguamos si son máximos o mínimos usando el signo de la segunda derivada.

$$P''(t) = 2t - 40 \Rightarrow \begin{cases} P''(7) = 14 - 40 = -26 < 0 \rightarrow \text{¡Máximo!} \\ P''(33) = 66 - 40 = 26 > 0 \rightarrow \text{¡Mínimo!} \end{cases}$$

En la hora 33 hay un mínimo de pacientes.

$$P(33) = \frac{33^3}{3} - 20 \cdot 33^2 + 231 \cdot 33 + 2500 = 322$$

En el momento de cantidad mínima de pacientes hay 322.

Lo comparamos con los valores en los extremos del intervalo $[0, 36]$ para comprobar que es un mínimo absoluto.

$$P(0) = \frac{0^3}{3} - 20 \cdot 0^2 + 231 \cdot 0 + 2500 = 2500$$

$$P(33) = 322$$

$$P(36) = 448$$

El número mínimo de pacientes se produce en la hora 33 y es de 322 pacientes.

B. Obtenemos la expresión de las ganancias mensuales. Los costes de producir x hogazas es $2x$, a lo que le sumamos los 500 euros de gastos fijos.

Los ingresos por su venta es $P(x) = x(122 - x)$. Las ganancias es la diferencia entre los ingresos y los costes.

$$G(x) = P(x) - (2x + 500) = x(122 - x) - 2x - 500 = -x^2 + 122x - 2x - 500 = -x^2 + 120x - 500$$

Buscamos el máximo de la función ganancias usando la derivada primera y segunda.

$$G(x) = -x^2 + 120x - 500 \Rightarrow G'(x) = -2x + 120$$

$$G'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 120 = 0 \Rightarrow 2x = 120 \Rightarrow x = 60$$

$$G''(x) = -2 \Rightarrow G''(60) = -2 < 0 \rightarrow \text{¡Máximo relativo!}$$

Con la fabricación y venta de 60 hogazas se obtienen unas ganancias máximas.

Estas ganancias tienen un valor de $G(60) = -60^2 + 120 \cdot 60 - 500 = 3100$ euros.

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

El precio de las lavadoras que se venden en una gran superficie es una variable que sigue una distribución normal de desviación típica 235 €. Para una muestra de 50 lavadoras, escogidas al azar, se obtiene un precio medio de 405 €.

A. [1,25 PUNTOS] Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el precio medio de una lavadora.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de lavadoras que habría que considerar para que el error cometido al estimar el precio medio por lavadora con un nivel de confianza del 97 % fuese de 50 €?

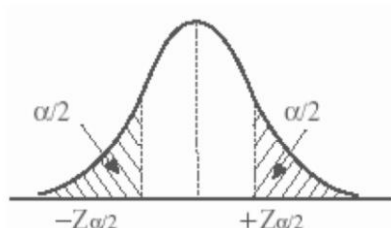
X = Precio de una lavadora (en euros).

$X = N(\mu, 235)$

Tamaño de muestra = $n = 50$. $\bar{x} = 405$

A. Con un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{235}{\sqrt{50}} \approx 65,14 \text{ euros}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (405 - 65,14, 405 + 65,14) = (339,86, 470,14)$$

B.

Con un nivel de confianza del 97%

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2,17}$$

Igualamos el error a 50 euros.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 50 = 2,17 \cdot \frac{235}{\sqrt{n}} \Rightarrow 50\sqrt{n} = 2,17 \cdot 235 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2,17 \cdot 235}{50} \Rightarrow n = \left(\frac{2,17 \cdot 235}{50} \right)^2 = 104,01$$

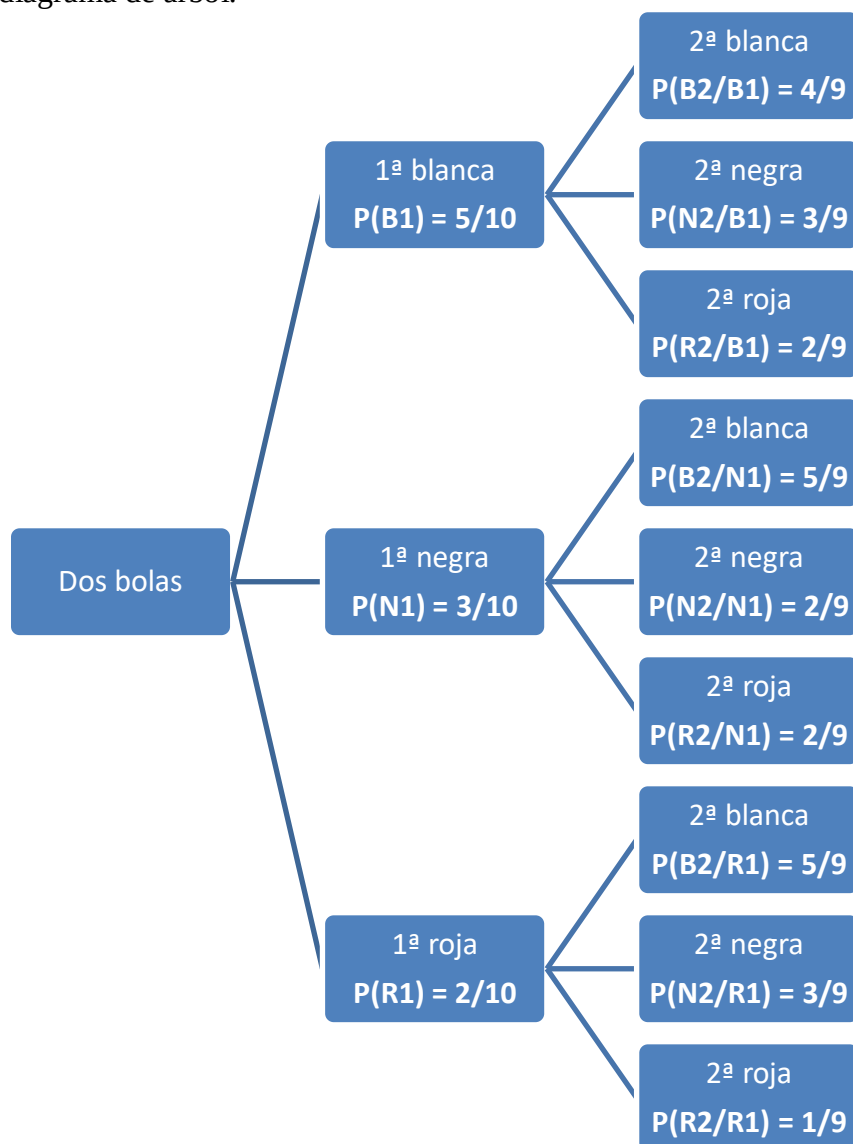
Como n debe ser entero y superior al “ n ” hallado el tamaño mínimo de la muestra es de 105 lavadoras.

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

Se tiene una urna que contiene 5 bolas blancas, 3 negras y 2 rojas. Si se extraen al azar dos bolas de forma consecutiva y sin reemplazamiento:

- A. [0,25 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean rojas?
 B. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color?
 C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las dos bolas extraídas sea negra?
 D. [0,75 PUNTOS] Si la segunda bola que se extrae es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la primera haya sido blanca?

Realizamos un diagrama de árbol.



Hemos llamado B1, N1, R1 a sacar bola blanca, negra o roja en la primera extracción y B2, N2, R2 a sacar bola blanca, negra o roja en la segunda extracción.

- A. Nos piden calcular $P(R1 \cap R2)$.

$$P(R1 \cap R2) = P(R1)P(R2/R1) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45} \approx 0.022$$

- B. Nos piden calcular $P((B1 \cap B2) \cup (N1 \cap N2) \cup (R1 \cap R2))$.

$$\begin{aligned}
 P((B1 \cap B2) \cup (N1 \cap N2) \cup (R1 \cap R2)) &= P(B1 \cap B2) + P(N1 \cap N2) + P(R1 \cap R2) = \\
 &= P(B1)P(B2/B1) + P(N1)P(N2/N1) + P(R1)P(R2/R1) = \\
 &= \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{28}{90} = \boxed{\frac{14}{45} \approx 0.311}
 \end{aligned}$$

C. Calculamos la probabilidad usando el suceso contrario.

El suceso contrario a “Al menos una de las dos bolas extraídas es negra” es “Ninguna de las dos bolas es negra”. Así debemos sacar en la primera extracción una de las 7 bolas que no son negras y en la segunda extracción una de las 6 de las 9 que quedan que no son negras.

$$P(\text{Ninguna bola negra}) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{42}{90}$$

$$\text{Así la probabilidad pedida es } P(\text{Al menos una bola es negra}) = 1 - \frac{42}{90} = \frac{48}{90} = \boxed{\frac{8}{15} \approx 0.533}$$

D. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(B1/R2) &= \frac{P(B1 \cap R2)}{P(R2)} = \frac{P(B1)P(R2/B1)}{P(B1)P(R2/B1) + P(N1)P(R2/N1) + P(R1)P(R2/R1)} = \\
 &= \frac{\frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9}}{\frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9}} = \frac{\frac{10}{90}}{\frac{90}{180}} = \frac{10}{18} = \boxed{\frac{5}{9} \approx 0.556}
 \end{aligned}$$