Evaluación para el Acceso a la Universidad. Convocatoria de 2023
Materia: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**
El examen está compuesto de tres secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Es necesario detallar el proceso de resolución de los ejercicios.

<u>Sección 1</u> (3 puntos) <u>Bloque 1</u>

1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,\ y) = 4x + 5y - 3$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + y \le 2 \\ x - 2y \le 5 \\ y \le 0 \\ x \ge 1 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)
b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)

2. En una galería de arte disponen de cuadros de tres artistas: uno realiza arte urbano, otro se dedica al arte abstracto y el tercero al grafiti. El 40% de la suma de los cuadros pintados por el primero y el segundo es 28. El doble de los cuadros del que realiza arte abstracto equivale al triple de los cuadros del que hace grafiti. En total, en la galería disponen de 110 cuadros.
a) Plantea el sistema de ecuaciones para determinar cuántos cuadros tiene cada artista en la galería. (0.75 puntos)
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

<u>Bloque 2</u>

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |x+1| + t & si \quad x \le 0 \\ -x^3 + 2x^2 + (t+2)x + 3 & si \quad x > 0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$? (0.5 puntos)
b) Para $t = 2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, \infty)$. (0.5 puntos)
c) Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, \infty)$. (0.5 puntos)

2. Halla razonadamente los parámetros a y b de la función $f(x) = ax^2 + bx - 20$, sabiendo que dicha función tiene un máximo en el punto (6, 16). (1.5 puntos)

<u>Sección 2</u> (3.5 puntos) <u>Bloque 1</u>

3. Un estudio sobre ingredientes de pizza indica que solo al 30% de la población le gusta la piña en la pizza y de estos, a un 60% le gustan las anchoas. Sin embargo, de los que no les gusta la piña, el 75% afirman que no les gustan las anchoas en la pizza.
a) Elegido un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le gusten las anchoas en la pizza? (0.75 puntos)
b) Si se sabe que a una persona no le gustan las anchoas en la pizza, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la piña? (0.75 puntos)

4. Una marca de productos de repostería ha tomado una muestra aleatoria de 36 bizcochos y ha medido su contenido calórico, proporcionando una media de 223 calorías. Si se sabe que el contenido calórico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 51$ calorías,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del contenido calórico de los bizcochos con un nivel de confianza del 95%. (1 punto)

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del 94.64%, el error máximo admisible sea menor que 10 calorías. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2

3. Una cooperativa manchega que distribuye tres tipos de vino, blanco, rosado y tinto, ha recibido un pedido de 50 botellas. Se sabe que el doble de botellas de vino blanco, por una parte, excede en una unidad al de botellas de vino rosado y, por otra parte, coincide con el quíntuplo del número de botellas vino tinto.

a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar cuántas botellas de vino blanco, rosado y tinto se pidieron. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

4. a) Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix}4 & 9\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}-2 & 9\\ 1 & -4\end{pmatrix}$ y $P=\begin{pmatrix}6 & -3\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ demuestra que M y N conmutan. (0.5 puntos)

b) Resuelve la ecuación $M\cdot P\cdot X = N^T - M$. (1 punto)

c) Calcula la matriz que sumada con la matriz $(N+I)^2$ da como resultado la matriz nula, siendo I la matriz identidad de orden 2. (0.5 puntos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. En una empresa de reparto el 9% de los paquetes llega con retraso, el 14% llega defectuoso y 19% llega con retraso o defectuoso o ambos.

a) Elegido un paquete al azar, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso y con retraso? (0.75 puntos)

b) Si se sabe que un paquete llega con retraso, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso? (0.75 puntos)

6. La distancia alcanzada en el lanzamiento de jabalina por los integrantes de un equipo de atletismo infantil sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 81$ metros^2. Se ha tomado una muestra de 9 atletas del equipo y las distancias alcanzadas han sido 16, 21, 15, 17, 16, 19, 14, 14 y 19 metros.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la distancia de lanzamiento de jabalina con un nivel de confianza del 97%. (1 punto)

b) Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 49 atletas y un nivel de confianza del 95.96 %? (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & si\ x\leq c\\ 6x+3 & si\ x>c\end{cases}$

a) ¿Para qué valor de *c* para la función *f(x)* es continua en *x = c*? (0.75 puntos)
b) Representa gráficamente la función *f(x)* para *c = 0.* (0.75 puntos)

6. El consumo de agua, en dm^3, de una urbanización durante 6 horas viene reflejado por la función $C(x)=x^3-12x^2+45x$ siendo *x* = el tiempo medido en horas y $0\leq x\leq 6$.

a) ¿En qué momentos se produjo el mayor consumo y a cuánto ascendió? (1.25 puntos)
b) ¿En qué intervalo de tiempo disminuyó el consumo de agua? (0.75 puntos)

SOLUCIONES

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 4x + 5y - 3$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + y \le 2 \\ x - 2y \le 5 \\ y \le 0 \\ x \ge 1 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)
b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)

a) Representamos las rectas que delimitan la región del plano que cumple las restricciones (Región factible).

$x + y = 2$

x	$y = 2 - x$
0	2
2	0

$x - 2y = 5$

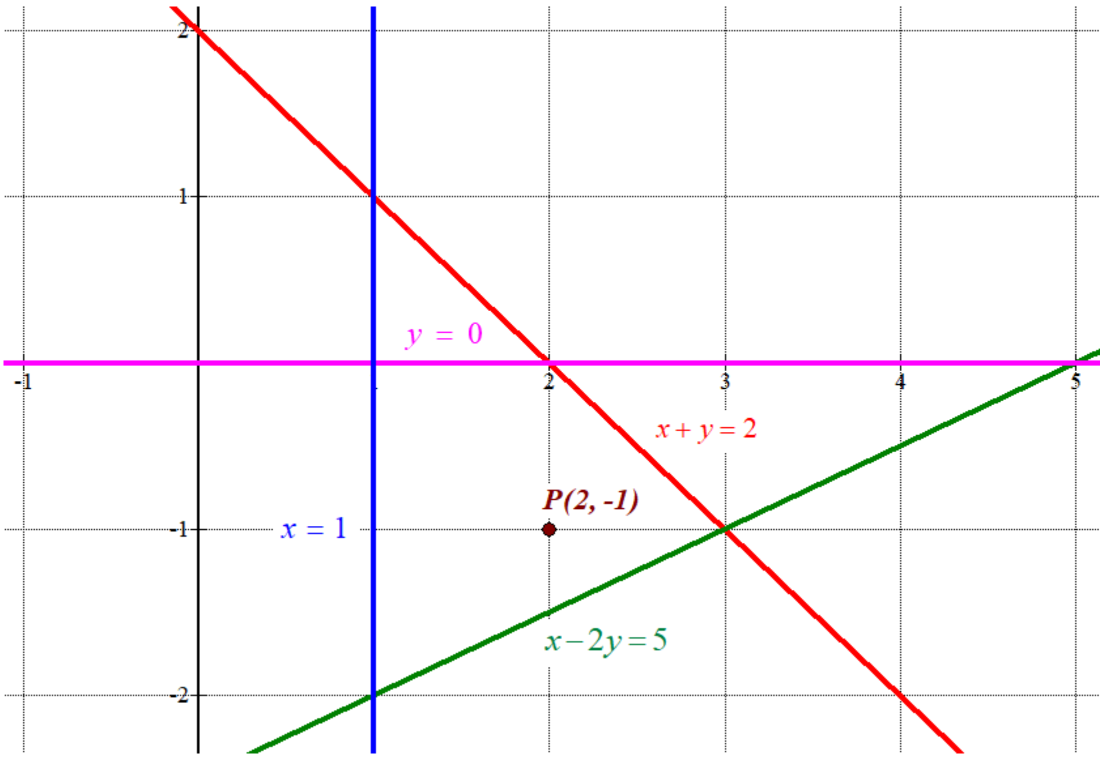
x	$y = \dfrac{x-5}{2}$
1	-2
5	0

$y = 0$

Recta *horizontal*

$x = 1$

Recta *vertical*

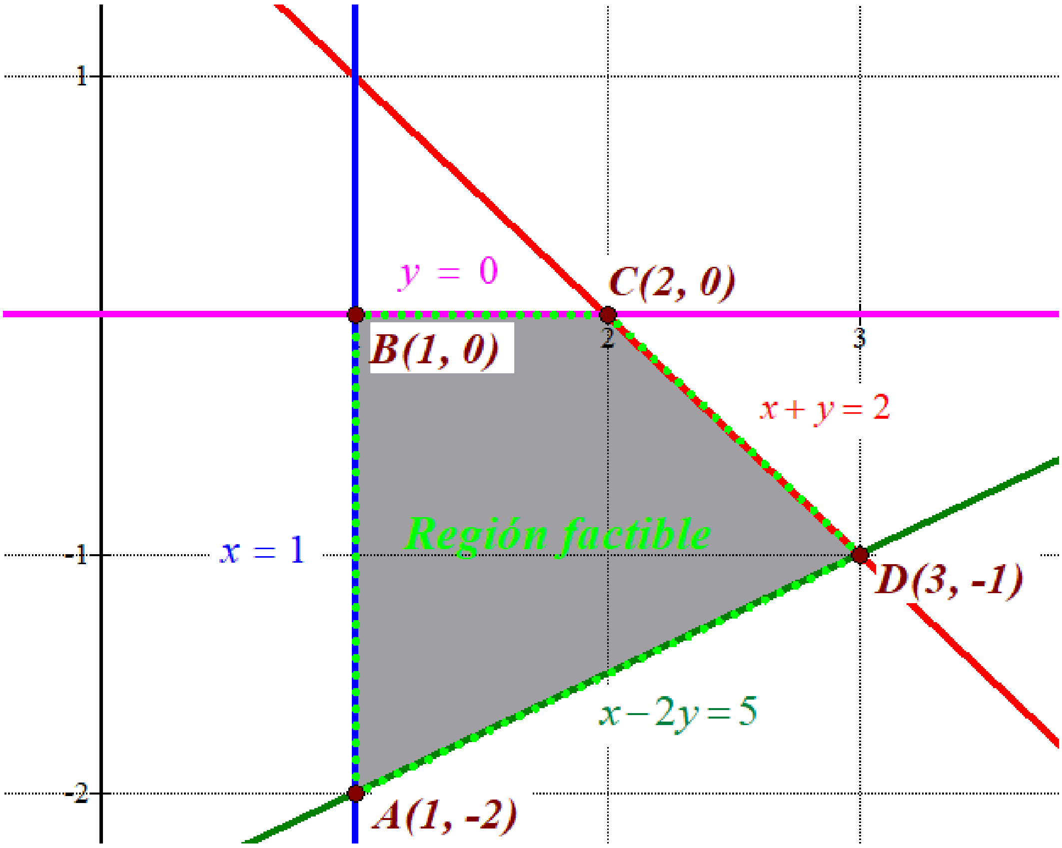


Como las restricciones son $\begin{cases} x + y \le 2 \\ x \le 2y + 5 \\ y \le 0 \\ x \ge 1 \end{cases}$ la región factible es la zona del plano situada por debajo de las rectas roja y rosa, por encima de la recta verde y a la derecha de la recta vertical azul.

Comprobamos si el punto P(2, –1) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\begin{cases} 2-1\leq 2 \\ 2-2(-1)\leq 5 \\ -1\leq 0 \\ 2\geq 1 \end{cases} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la zona de color gris del dibujo inferior.



b) Valoramos la función en cada vértice de la región factible.

A(1, –2) → $f(1,-2)=4-10-3=-9$ ¡Mínimo!

B(1, 0) → $f(1,0)=4+0-3=1$

C(2, 0) → $f(2,0)=8+0-3=5$ ¡Máximo!

D(3, –1) → $f(3,-1)=12-5-3=4$

El máximo se alcanza en el vértice C(2, 0) con un valor de 5.
El mínimo se alcanza en el vértice A(1, –2) con un valor de –9.

2. En una galería de arte disponen de cuadros de tres artistas: uno realiza arte urbano, otro se dedica al arte abstracto y el tercero al grafiti. El 40% de la suma de los cuadros pintados por el primero y el segundo es 28. El doble de los cuadros del que realiza arte abstracto equivale al triple de los cuadros del que hace grafiti. En total, en la galería disponen de 110 cuadros.
a) Plantea el sistema de ecuaciones para determinar cuántos cuadros tiene cada artista en la galería. (0.75 puntos)
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

a) Llamamos "x" al número de cuadros de arte urbano, "y" al número de cuadros de arte abstracto y "z" al número de cuadros de grafiti.

"*El 40% de la suma de los cuadros pintados por el primero y el segundo es 28*" → $0.40(x+y)=28$

"*El doble de los cuadros del que realiza arte abstracto equivale al triple de los cuadros del que hace grafiti*" → $2y=3z$

"*En total, en la galería disponen de 110 cuadros*" → $x+y+z=110$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=110 \\ 0.40(x+y)=28 \\ 2y=3z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=110 \\ 4x+4y=280 \\ 2y=3z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=110 \\ x+y=70 \\ 2y=3z \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=110 \\ x+y=70 \\ 2y=3z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=110 \\ x=70-y \\ 2y=3z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 70-y+y+z=110 \\ 2y=3z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{z=40} \\ 2y=3z \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=120 \Rightarrow \boxed{y=\frac{120}{2}=60} \Rightarrow \boxed{x=70-60=10}$$

Hay expuestos 10 cuadros de arte urbano, 60 cuadros de arte abstracto y 40 cuadros de grafiti.

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} |x+1|+t & si \quad x\le 0 \\ -x^3+2x^2+(t+2)x+3 & si \quad x>0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de *t* la función *f(x)* es continua en *x = 0*? (0.5 puntos)
b) Para *t = 2*, calcula los extremos relativos de la función *f(x)* en el intervalo (0, ∞). (0.5 puntos)
c) Para *t = 2*, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* en (0, ∞). (0.5 puntos)

a) Para que sea continua en $x=0$ deben de coincidir los limites laterales y el valor de la función en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}|x+1|+t=1+t \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}-x^3+2x^2+(t+2)x+3=-0^3+2\cdot 0^2+(t+2)0+3=3 \\ f(0)=1+t \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \end{array}\right\}\Rightarrow 1+t=3\Rightarrow \boxed{t=2}$$

La función es continua en $x=0$ para *t = 2.*

b) Para *t = 2* la función queda $f(x)=\begin{cases} |x+1|+2 & si \quad x\le 0 \\ -x^3+2x^2+4x+3 & si \quad x>0 \end{cases}$.

En el intervalo (0, ∞) la función es $f(x)=-x^3+2x^2+4x+3$

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=-3x^2+4x+4 \\ f'(x)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow -3x^2+4x+4=0\Rightarrow$$

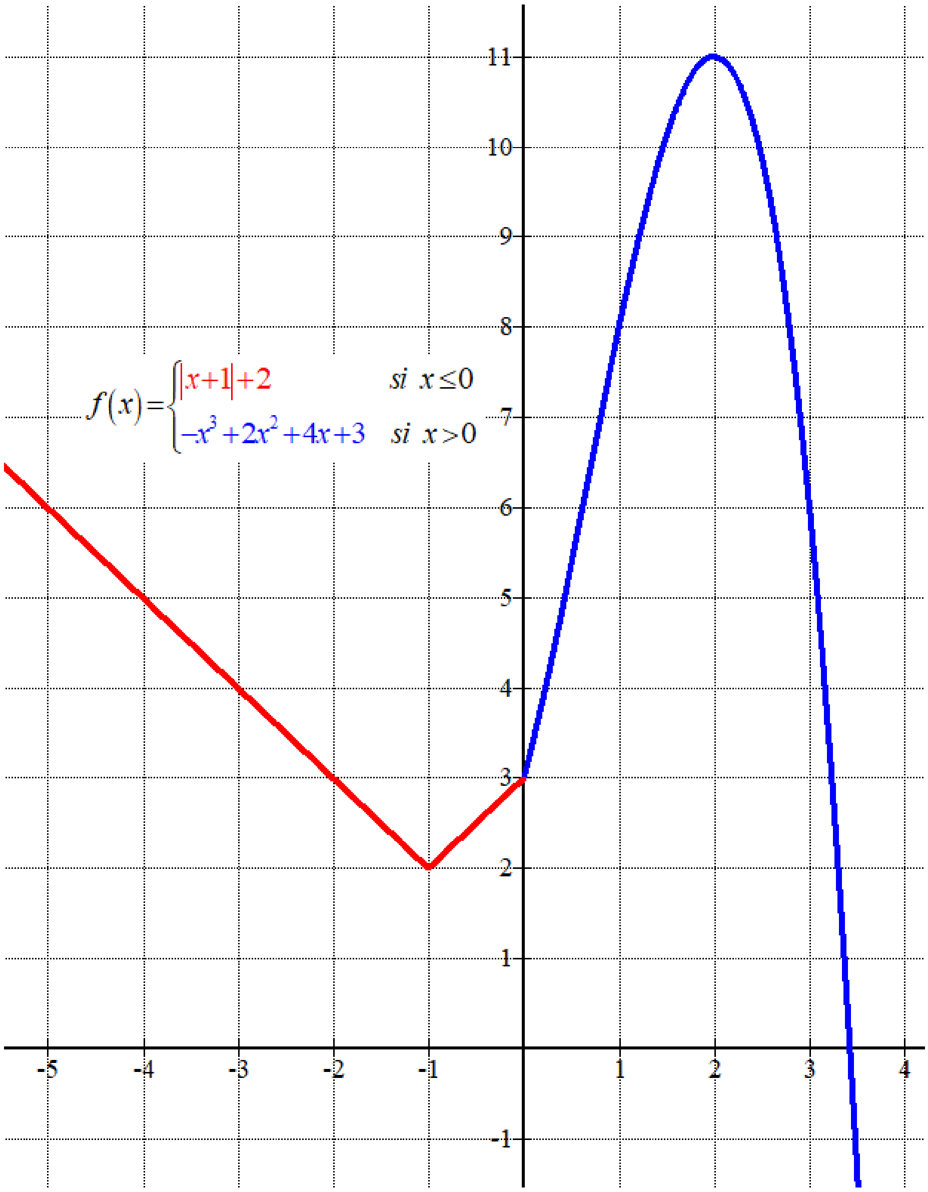
$$\Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(-3)(4)}}{2(-3)}=\frac{-4\pm 8}{-6}=\begin{cases} \frac{-4+8}{-6}=\frac{-1}{3}\notin(0,\infty) \\ \frac{-4-8}{-6}=\boxed{2=x} \end{cases}$$

Sustituimos $x=2$ en la segunda derivada para averiguar si es máximo o mínimo.

$$f''(x)=-6x+4\Rightarrow f''(2)=-12+4=-8<0\to x=2 \text{ es máximo}$$

Como $f(2)=-2^3+2\cdot 2^2+4\cdot 2+3=11$ la función tiene un máximo relativo en el punto de coordenadas $(2,11)$.

c) Para *t = 2 e*n el intervalo (0, ∞) la función es $f(x)=-x^3+2x^2+4x+3$.
Como esta función es continua y presenta un máximo relativo en *x = 2* la función crece en el intervalo (0, 2) y decrece en el intervalo (2, ∞).


$f(x)=\begin{cases} |x+1|+2 & si\ x\leq 0 \\ -x^3+2x^2+4x+3 & si\ x>0 \end{cases}$
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4

2. Halla razonadamente los parámetros a y b de la función $f(x)=ax^2+bx-20$, sabiendo que dicha función tiene un máximo en el punto (6, 16). (1.5 puntos)

Si la función tiene un máximo en (6, 16) significa dos cosas: *f(6) = 16* y que *f ´(6) = 0.*

$$f(6)=16 \Rightarrow a\cdot 6^2+b\cdot 6-20=16 \Rightarrow 36a+6b=36 \Rightarrow \boxed{6a+b=6}$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=ax^2+bx-20 \Rightarrow f'(x)=2ax+b \\ f'(6)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 12a+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-12a}$$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 6a+b=6 \\ b=-12a \end{array}\right\} \Rightarrow 6a-12a=6 \Rightarrow -6a=6 \Rightarrow \boxed{a=-1} \Rightarrow \boxed{b=12}$$

Los valores buscados son $a = -1$ y $b = 12$.

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. Un estudio sobre ingredientes de pizza indica que solo al 30% de la población le gusta la piña en la pizza y de estos, a un 60% le gustan las anchoas. Sin embargo, de los que no les gusta la piña, el 75% afirman que no les gustan las anchoas en la pizza.
a) Elegido un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le gusten las anchoas en la pizza? (0.75 puntos)
b) Si se sabe que a una persona no le gustan las anchoas en la pizza, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la piña? (0.75 puntos)

Llamamos A = "Le gusta las anchoas en la pizza" y B = "Le gusta la piña en la pizza".

Si a un 60% de los que le gusta la piña (30%) le gustan las anchoas → $0.6 \cdot 0.3 = 0.18$, al 18 % le gusta la piña y las anchoas en la pizza.
Si de los que no les gusta la piña (70%), el 75% afirman que no les gustan las anchoas en la pizza → $0.7 \cdot 0.75 = 0.525$, al 52.5% no le gustan las anchoas ni la piña en la pizza.

Construimos una tabla de contingencia para ordenar todos los datos proporcionados.

	Le gusta la anchoa (A)	No le gusta la anchoa	
Le gusta la piña (B)	**18**		**30**
No le gusta la piña		**52.5**	
			100

Completamos la tabla.

	Le gusta la anchoa (A)	No le gusta la anchoa	
Le gusta la piña (B)	**18**	**12**	**30**
No le gusta la piña	**17.5**	**52.5**	**70**
	35.5	**64.5**	**100**

Con los datos de la tabla y la regla de Laplace respondemos a las preguntas.

a) Nos piden $P(A)$.

$$P(A) = \frac{35.5}{100} = \boxed{0.355}$$

b) Nos piden $P(B/\overline{A})$.

$$P(B/\overline{A}) = \frac{12}{64.5} = \boxed{\frac{8}{43} \simeq 0.186}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Llamamos A = "Le gusta las anchoas en la pizza" y B = "Le gusta la piña en la pizza.

Sabemos que $P(B) = 0.30$, $P(A/B) = 0.6$ y $P(\overline{A}/\overline{B}) = 0.75$

a) Nos piden $P(A)$.

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow 0.6=\frac{P(A\cap B)}{0.3}\Rightarrow P(A\cap B)=0.6\cdot 0.3=0.18$$

$$P(\overline{A}/\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{1-P(B)}\Rightarrow 0.75=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{1-0.3}\Rightarrow P(\overline{A}\cap\overline{B})=0.75\cdot 0.7=0.525\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{\text{Leyes de Morgan}\}\Rightarrow P(\overline{A\cup B})=0.525\Rightarrow P(A\cup B)=1-0.525=0.475$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow 0.475=P(A)+0.3-0.18\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{P(A)=0.475-0.3+0.18=0.355}$$

b) Nos piden $P(B/\overline{A})$.

$$P(B/\overline{A})=\frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)}=\frac{0.3-0.18}{1-0.355}=\boxed{\frac{8}{43}\simeq 0.186}$$

4. Una marca de productos de repostería ha tomado una muestra aleatoria de 36 bizcochos y ha medido su contenido calórico, proporcionando una media de 223 calorías. Si se sabe que el contenido calórico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 51 calorías,
a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del contenido calórico de los bizcochos con un nivel de confianza del 95%. (1 punto)
b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del 94.64%, el error máximo admisible sea menor que 10 calorías. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

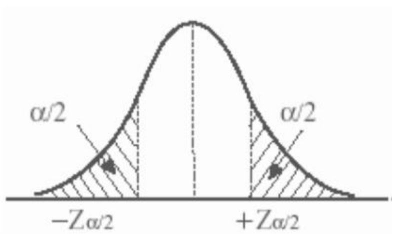
X = el contenido calórico de unos dulces.
Desviación típica = σ = 51 calorías.
X = N(μ, 51)

$Media\ muestral = \overline{x} = 223$ calorías.
Tamaño de la muestra = $n = 36$

a) Con un nivel de confianza del 95 %

$$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



Calculamos el error de la estimación.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{51}{\sqrt{36}} = 16.66 \text{ calorías}$$

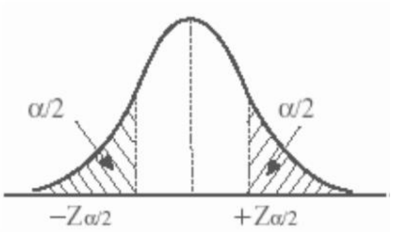
El intervalo de confianza para la media poblacional del contenido calórico de los bizcochos es:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = \left(223 - 16.66,\ 223 + 16.66\right) = \left(206.34,\ 239.66\right)$$

b) Con un nivel de confianza del 94.64 %

$$1 - \propto = 0{,}9464 \rightarrow \propto = 0{,}0536 \rightarrow \propto/2 = 0'0268 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0.9732 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.93}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



Usamos la fórmula del error de la estimación.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 10 = 1.93 \cdot \frac{51}{\sqrt{n}} \Rightarrow 10\sqrt{n} = 1.93 \cdot 51 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.93 \cdot 51}{10} \Rightarrow n = \left(\frac{1.93 \cdot 51}{10}\right)^2 \simeq 96.88$$

El tamaño mínimo de la muestra es un número entero mayor que el obtenido → 97 bizcochos.

Bloque 2

3. Una cooperativa manchega que distribuye tres tipos de vino, blanco, rosado y tinto, ha recibido un pedido de 50 botellas. Se sabe que el doble de botellas de vino blanco, por una parte, excede en una unidad al de botellas de vino rosado y, por otra parte, coincide con el quíntuplo del número de botellas vino tinto.

a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar cuántas botellas de vino blanco, rosado y tinto se pidieron. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

a) Llamamos "x" al número de botellas de vino blanco, "y" al número de botellas de vino rosado y "z" al número de botellas de vino tinto.

"*Ha recibido un pedido de 50 botellas*" → $x+y+z=50$

"*El doble de botellas de vino blanco excede en una unidad al de botellas de vino rosado*" → $2x=y+1$

"*El doble de botellas de vino blanco coincide con el quíntuplo del número de botellas vino tinto*" → $2x=5z$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=50 \\ 2x=5z \\ 2x=y+1 \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=50 \\ 2x=5z \\ 2x=y+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=50 \\ 2x=5z \\ 2x-1=y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2x-1+z=50 \\ 2x=5z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+z=51 \\ 2x=5z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=51-3x \\ 2x=5z \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=5(51-3x) \Rightarrow 2x=255-15x \Rightarrow 17x=255 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{255}{17}=15} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y=2\cdot 15-1=29} \\ \boxed{z=51-3\cdot 15=6} \end{cases}$$

El pedido lleva 15 botellas de vino blanco, 29 de vino rosado y 6 de vino tinto.

4. a) Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix}4 & 9\\1 & 2\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}-2 & 9\\1 & -4\end{pmatrix}$ y $P=\begin{pmatrix}6 & -3\\-3 & 1\end{pmatrix}$ demuestra que M y N conmutan. (0.5 puntos)

b) Resuelve la ecuación $M\cdot P\cdot X=N^T-M$. (1 punto)

c) Calcula la matriz que sumada con la matriz $(N+I)^2$ da como resultado la matriz nula, siendo I la matriz identidad de orden 2. (0.5 puntos)

a) Hay que demostrar que $M\cdot N=N\cdot M$.

$$\left.\begin{array}{l}M\cdot N=\begin{pmatrix}4 & 9\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 9\\1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8+9 & 36-36\\-2+2 & 9-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\\ \\ N\cdot M=\begin{pmatrix}-2 & 9\\1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 9\\1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8+9 & -18+18\\4-4 & 9-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow M\cdot N=N\cdot M$$

Las matrices M y N conmutan.

b) Comprobamos si la matriz_ $M\cdot P$ es invertible. Para ello vemos si su determinante es no nulo.

$$M\cdot P=\begin{pmatrix}4 & 9\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & -3\\-3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24-27 & -12+9\\6-6 & -3+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -3\\0 & -1\end{pmatrix}$$

$$|M\cdot P|=\begin{vmatrix}-3 & -3\\0 & -1\end{vmatrix}=3\neq 0$$

La matriz $M\cdot P$ es invertible. Hallamos su inversa.

$$M\cdot P=\begin{pmatrix}-3 & -3\\0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow (M\cdot P)^T=\begin{pmatrix}-3 & 0\\-3 & -1\end{pmatrix}$$

$$(M\cdot P)^{-1}=\frac{Adj(M\cdot P)^T}{|M\cdot P|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-3 & 0\\-3 & -1\end{pmatrix}}{3}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 3\\0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz X de la ecuación matricial.

$$M\cdot P\cdot X=N^T-M\Rightarrow X=(M\cdot P)^{-1}(N^T-M)$$

Hallamos la expresión de la matriz X.

$$N^T-M=\begin{pmatrix}-2 & 1\\9 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 9\\1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -8\\8 & -6\end{pmatrix}$$

$$X=(M\cdot P)^{-1}\left(N^T-M\right)=\begin{pmatrix}-1/3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6 & -8\\ 8 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+8 & 8/3-6\\ -8 & 6\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}10 & -10/3\\ -8 & 6\end{pmatrix}}$$

c) Hallamos la matriz B que sumada con la matriz $(N+I)^2$ da como resultado la matriz nula.

$$B+(N+I)^2=0\Rightarrow B=-(N+I)^2$$

$$N+I=\begin{pmatrix}-2 & 9\\ 1 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 9\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

$$(N+I)^2=\begin{pmatrix}-1 & 9\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 9\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+9 & -9-27\\ -1-3 & 9+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -36\\ -4 & 18\end{pmatrix}$$

$$\boxed{B=-\begin{pmatrix}10 & -36\\ -4 & 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 36\\ 4 & -18\end{pmatrix}}$$

<u>Sección 3</u> (3.5 puntos) <u>Bloque 1</u>

5. En una empresa de reparto el 9% de los paquetes llega con retraso, el 14% llega defectuoso y 19% llega con retraso o defectuoso o ambos.

a) Elegido un paquete al azar, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso y con retraso? (0.75 puntos)

b) Si se sabe que un paquete llega con retraso, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso? (0.75 puntos)

Llamamos R al suceso "El paquete llega con retraso", D al suceso "el paquete llega defectuoso". Sabemos que $P(R)=0.09, P(D)=0.14, P(D\cup R)=0.19$.

a) Nos piden $P(D\cap R)$.

$$P(D\cup R)=P(D)+P(R)-P(D\cap R)\Rightarrow 0.19=0.14+0.09-P(D\cap R)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(D\cap R)=0.14+0.09-0.19=\boxed{0.04}$$

b) Nos piden calcular $P(D/R)$.

$$P(D/R)=\frac{P(D\cap R)}{P(R)}=\frac{0.04}{0.09}=\boxed{\frac{4}{9}\simeq 0.444}$$

6. La distancia alcanzada en el lanzamiento de jabalina por los integrantes de un equipo de atletismo infantil sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 81$ metros^2. Se ha tomado una muestra de 9 atletas del equipo y las distancias alcanzadas han sido 16, 21, 15, 17, 16, 19, 14, 14 y 19 metros.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la distancia de lanzamiento de jabalina con un nivel de confianza del 97%. (1 punto)

b) Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 49 atletas y un nivel de confianza del 95.96 %? (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

X = La distancia alcanzada en el lanzamiento de jabalina.

Desviación típica = $\sigma = \sqrt{81} = 9$ metros

X = N(μ, 9)

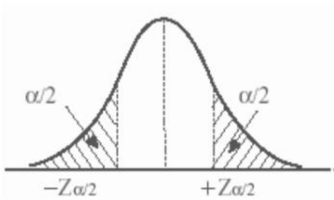
$$Media\ muestral = \bar{x} = \frac{16+21+15+17+16+19+14+14+19}{9} = \frac{151}{9} \simeq 16.778 \text{ metros.}$$

Tamaño de la muestra = $n = 9$

a) Con un nivel de confianza del 97%

$$1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{9}{\sqrt{9}} = 6.51 \text{ metros}$$

El intervalo de confianza para la distancia media de los lanzamientos es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (16.778 - 6.51, 16.778 + 6.51) = (10.268, 23.288)$$

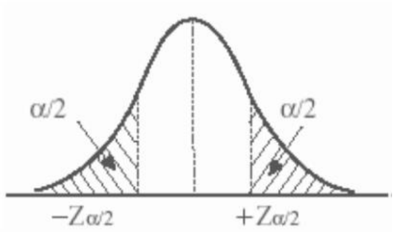
b) La amplitud del intervalo de confianza es el error de la estimación que viene dado por la fórmula: $Error = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Para aumentar la amplitud del intervalo (el error) manteniendo el nivel de confianza ($z_{\alpha/2}$) y el valor de la desviación típica (σ), la única opción es disminuir el tamaño de muestra (n).

c) Con un nivel de confianza del 95.96 %

$1 - \propto = 0{,}9596 \rightarrow \propto = 0{,}0404 \rightarrow \propto/2 = 0'0202 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}9798 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.05}$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.05 \cdot \frac{9}{\sqrt{49}} = \frac{369}{140} \simeq 2.636 \text{ metros.}$$

El error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 49 atletas y un nivel de confianza del 95.96 % es de 2.636 metros.

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & si\ x\le c\\ 6x+3 & si\ x>c\end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c para la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.75 puntos)
b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $c = 0$. (0.75 puntos)

a) Para que la función $f(x)$ sea continua en $x = c$ deben coincidir los limites laterales con el valor de la función en $x = c$.

$$f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & si\ x\le c\\ 6x+3 & si\ x>c\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\lim\limits_{x\to c^-}(x+2)^2=(c+2)^2\\ \lim\limits_{x\to c^+} f(x)=\lim\limits_{x\to c^+}6x+3=6c+3\\ f(c)=(c+2)^2\\ \lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=f(c)\end{array}\right\}\Rightarrow 6c+3=(c+2)^2\Rightarrow 6c+3=c^2+4+4c\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2-2c+1=0\Rightarrow c=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(1)}}{2}=\frac{2\pm 0}{2}=\frac{2}{2}=\boxed{1=c}$$

La función $f(x)$ es continua en $x = c$ cuando $c = 1$.

b) Para $c = 0$ la función no es continua.

La función queda $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & si\ x\le 0\\ 6x+3 & si\ x>0\end{cases}$

La gráfica de la función es un trozo de parábola convexa (antes de 0) y un trozo de recta (a partir de 0).
Hallamos el vértice de la parábola.

$$\left.\begin{array}{l}f'(x)=2(x+2)\\ f'(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow 2(x+2)=0\Rightarrow\boxed{x=-2}$$

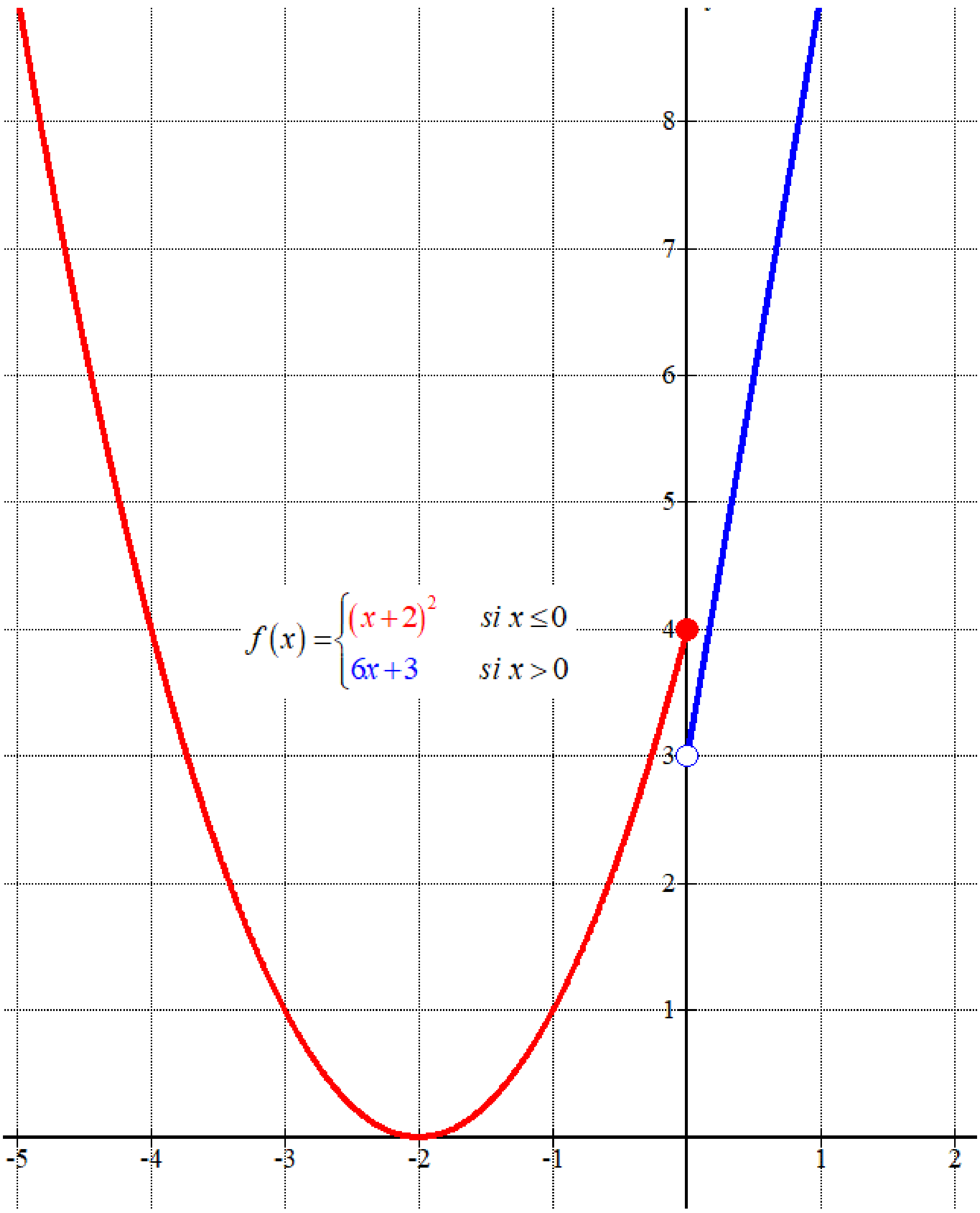
Hacemos una tabla de valores.

$x\le 0$

x	$y=(x+2)^2$
-4	4
-3	1
-2	0 Mínimo
-1	1
0	4

$x>0$

x	$y=6x+3$
0	3 No incluido
1	9
2	15


$f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & si\ x\le 0\\ 6x+3 & si\ x>0\end{cases}$
8
7
6
5
4
3
2
1
-5
-4
-3
-2
-1
1
2

6. El consumo de agua, en dm^3, de una urbanización durante 6 horas viene reflejado por la función $C(x)=x^3-12x^2+45x$ siendo x = el tiempo medido en horas y $0\leq x\leq 6$.

a) ¿En qué momentos se produjo el mayor consumo y a cuánto ascendió? (1.25 puntos)

b) ¿En qué intervalo de tiempo disminuyó el consumo de agua? (0.75 puntos)

a) Derivamos e igualamos a cero.

$$\left.\begin{array}{r} C(x)=x^3-12x^2+45x \Rightarrow C'(x)=3x^2-24x+45 \\ C'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2-24x+45=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-8x+15=0 \Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4(1)(15)}}{2}=\frac{8\pm 2}{2}=\begin{cases} \frac{8+2}{2}=\boxed{5=x} \\ \frac{8-2}{2}=\boxed{3=x} \end{cases}$$

La función tiene dos puntos críticos. Sustituimos estos valores en la segunda derivada y vemos como es su signo y decidimos si es máximo o mínimo.

$$C'(x)=3x^2-24x+45 \Rightarrow C''(x)=6x-24 \Rightarrow \begin{cases} C''(3)=18-24=-6<0 \to x=3 \text{ es máximo} \\ C''(5)=30-24=6>0 \to x=5 \text{ es mínimo} \end{cases}$$

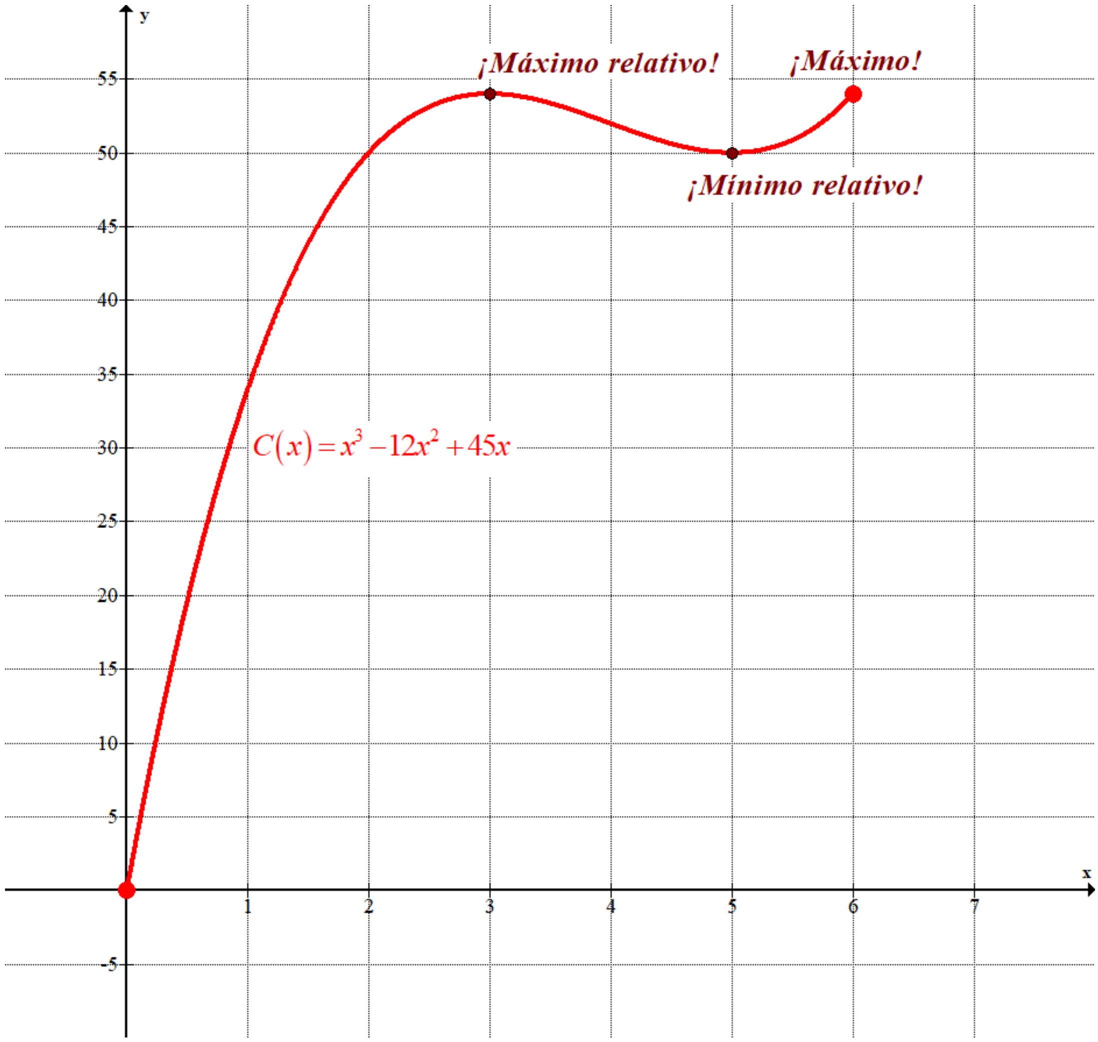
Valoramos la función consumo en los extremos del intervalo y en los puntos críticos.

$$\left.\begin{array}{l} C(0)=0^3-12\cdot 0^2+45\cdot 0=0\,dm^3 \\ C(3)=3^3-12\cdot 3^2+45\cdot 3=54\,dm^3 \\ C(5)=5^3-12\cdot 5^2+45\cdot 5=50\ dm^3 \\ C(6)=6^3-12\cdot 6^2+45\cdot 6=54\ dm^3 \end{array}\right\}$$

El máximo consumo en el intervalo [0, 6] es de 54 dm^3 y se produce en dos momentos: a las 3 y a las 6 horas.

b) La función es continua. En *x = 3* hay un máximo relativo de la función y en *x = 5* un mínimo relativo, por lo que la función crece en (0, 3), decrece en (3, 5) y crece en (5, 6).

El consumo disminuye entre la tercera y la quinta hora.


y
x
¡Máximo relativo!
¡Máximo!
¡Mínimo relativo!
$C(x)=x^3-12x^2+45x$
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
-5
1
2
3
4
5
6
7