

	Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	EXAMEN Nº Páginas: 2 (tabla adicional)
---	---	---	---

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER **TRES** PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

PROBLEMAS (A ELEGIR TRES)

P1. (Números y álgebra)

Un centro logístico está planificando el reparto de dos formatos de un producto, S y L, a una de sus tiendas. Debido a sus características, la cantidad total máxima que se puede transportar de ambos formatos a la vez es 70 unidades, pero la tienda necesita recibir del formato L, al menos, un quinto del total de unidades totales. En este momento, sólo están disponibles para enviar a la tienda un máximo de 40 unidades del formato L. Además, la tienda consigue un beneficio de 3000 euros por cada unidad vendida del formato S y de 2500 euros por cada unidad vendida del formato L. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas unidades hay que repartir a la tienda de cada formato para que se pueda maximizar el beneficio. ¿A cuánto ascenderá ese beneficio máximo?

P2. (Números y álgebra)

Dado el sistema con el parámetro a :

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$$

- Clasificar el sistema en función de los distintos valores del parámetro a .
- Resolver el sistema para $a = -1$.

P3. (Análisis)

En una factoría los costes variables (miles de euros) vienen dados por la función:

$$C(x) = 2x + 720 + \frac{80000}{x}$$

siendo $x > 0$ el número de toneladas producidas.

- Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de los costes variables en esa factoría.
- Calcular el coste variable mínimo y el número de toneladas que se han de producir para alcanzar dicho coste mínimo.

P4. (Análisis)

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} 6x-1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- Estudiar la continuidad de $f(x)$ en todo su dominio. Calcular, si los tiene, los puntos de discontinuidad.
- Determinar el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[1,10]$, dibujando el recinto correspondiente.

P5. (Estadística y probabilidad)

La recaudación diaria de una tienda de deportes de determinada marca es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ euros y desviación típica de 328 euros. Se elige una muestra de 100 tiendas de dicha marca y se obtiene una recaudación diaria media de 1248 euros.

- Calcular el intervalo de confianza para la media μ al nivel de confianza del 99%.
- ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de tiendas de dicha marca para alcanzar, con un nivel de confianza del 95%, un error máximo de 127 euros en la estimación de μ ?

P6. (Estadística y probabilidad)

En los estudios realizados sobre un tipo de test de antígenos para detectar el SARS-COV-2 en cierta población, la probabilidad de que una persona enferma obtenga un resultado positivo es de 0.97, mientras que la probabilidad de que una persona sana obtenga un resultado negativo es 0.90. En el momento de probar este tipo de test de antígenos, la probabilidad de que una persona esté enferma en esa población es 0.04. Si se elige una persona al azar de esa población y se le realiza este tipo de test de antígenos,

- Calcular la probabilidad de que la persona elegida obtenga un resultado positivo.
- Si el resultado del test es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona elegida esté enferma con SARS-COV-2?

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)**C1. (Números y álgebra)**

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 4 & 1 & 8 \\ -2 & b & 4 & c \end{pmatrix}$ hallar los valores a , b y c para que el rango de la matriz A sea 1.

C2. (Análisis)

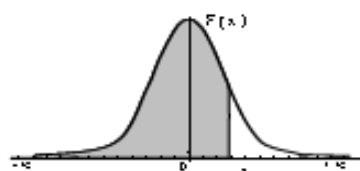
Dada la función $f(x) = \ln(x^2 - 4)$, determinar su dominio de definición.

C3. (Estadística y probabilidad)

Para realizar un rescate, la probabilidad de llegar antes del anochecer desde el centro de emergencias situado en la localidad A es de 0.7 y 0.4 desde el situado en la localidad B. Se decide enviar a equipos desde ambas localidades. Si los equipos actúan de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno llegue antes del anochecer?

Distribución Normal

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES

P1. (Números y álgebra)

Un centro logístico está planificando el reparto de dos formatos de un producto, S y L, a una de sus tiendas. Debido a sus características, la cantidad total máxima que se puede transportar de ambos formatos a la vez es 70 unidades, pero la tienda necesita recibir del formato L, al menos, un quinto del total de unidades totales. En este momento, sólo están disponibles para enviar a la tienda un máximo de 40 unidades del formato L. Además, la tienda consigue un beneficio de 3000 euros por cada unidad vendida del formato S y de 2500 euros por cada unidad vendida del formato L. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas unidades hay que repartir a la tienda de cada formato para que se pueda maximizar el beneficio. ¿A cuánto ascenderá ese beneficio máximo?

Llamamos x = unidades del formato S, y = unidades del formato L.

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio que viene expresado como:

$$B(x, y) = 3000x + 2500y$$

Las restricciones son:

“La cantidad total máxima que se puede transportar de ambos formatos a la vez es 70 unidades” $\rightarrow x + y \leq 70$

“La tienda necesita recibir del formato L, al menos, un quinto del total de unidades totales”
 $\rightarrow y \geq \frac{x+y}{5}$

“Sólo están disponibles para enviar a la tienda un máximo de 40 unidades del formato L” $\rightarrow y \leq 40$

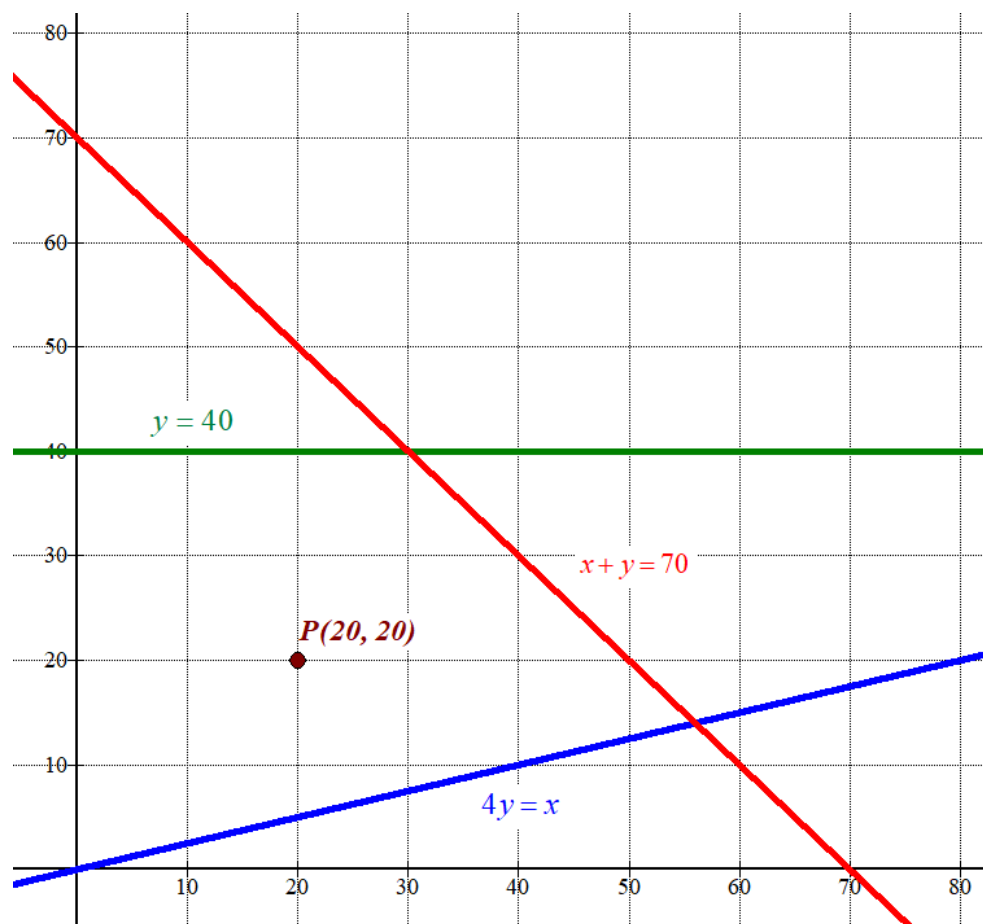
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 70 \\ y \geq \frac{x+y}{5} \\ y \leq 40 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 70 \\ 5y \geq x + y \\ y \leq 40 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 70 \\ 4y \geq x \\ y \leq 40 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x + y = 70$		$4y = x$		$y = 40$		$x \geq 0; y \geq 0$
x	$y = 70 - x$	x	$y = \frac{x}{4}$	x	$y = 40$	
0	70	0	0	20	40	Primer cuadrante
56	14	56	14	90	40	
70	0	80	20			



Como las restricciones del problema son

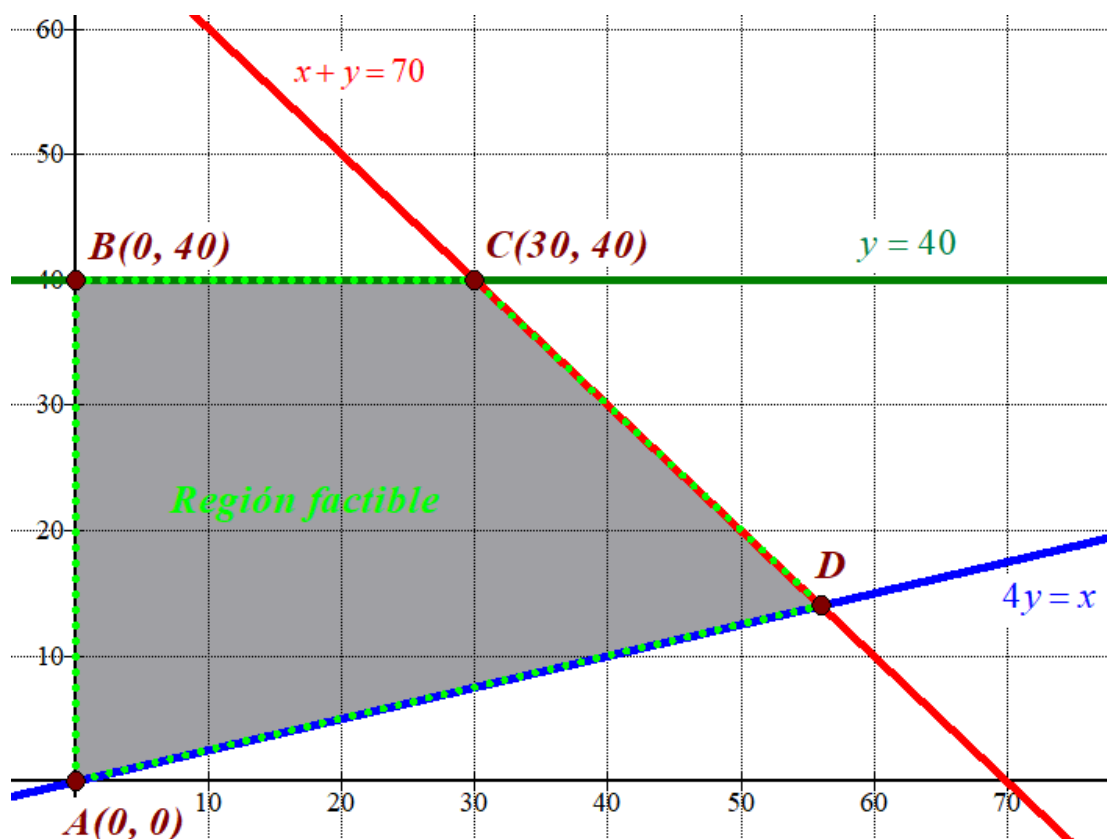
$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 70 \\ 4y \geq x \\ y \leq 40 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer}$$

cuadrante que está por debajo de la recta verde y roja, y por encima de la recta azul.

Comprobamos que el punto $P(20, 20)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 20 + 20 \leq 70 \\ 4 \cdot 20 \geq 20 \\ 20 \leq 40 \\ 20 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del vértice D.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 70 \\ 4y = x \end{array} \right\} \Rightarrow 4y + y = 70 \Rightarrow 5y = 70 \Rightarrow y = \frac{70}{5} = 14 \Rightarrow x = 4 \cdot 14 = 56 \Rightarrow \boxed{D(56, 14)}$$

Los vértices son A(0, 0); B(0, 40); C(30, 40) y D(56, 14).

Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 3000x + 2500y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 40) \rightarrow B(0, 40) = 0 + 100000 = 100.000$$

$$C(30, 40) \rightarrow B(30, 40) = 90000 + 100000 = 190.000$$

$$D(56, 14) \rightarrow B(56, 14) = 3000 \cdot 56 + 2500 \cdot 14 = 203.000 \text{ ¡Máximo!}$$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice D(56, 14). Se deben repartir 56 unidades de formato S y 14 unidades de formato L para obtener un beneficio máximo.

El beneficio máximo que se puede obtener es de 203.000 euros.

P2. (Números y álgebra)

Dado el sistema con el parámetro a :

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema en función de los distintos valores del parámetro a .

b) Resolver el sistema para $a = -1$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a + 0 + 1 + 1 - 0 - 1 = 1 - a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Analizamos dos casos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$

En este caso la matriz A tiene determinante no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $a = 1$

En este caso el determinante de la matriz A es nulo y su rango no es 3.

Analizamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \\ -1 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ -1 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \\ 0 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & \overbrace{1 \quad 0 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & -2 \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el de A/B es 3. Como son distintos el sistema es incompatible (sin solución).

Resumiendo: Si $a \neq 1$ el sistema tiene una única solución y si $a = 1$ el sistema no tiene solución.

b) Para $a = -1$ el sistema tiene una única solución.

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - z - y + z = 0 \\ 1 - z + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y = -1 \rightarrow \boxed{y = 1} \\ y - 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 2z = -1 \Rightarrow -2z = -2 \Rightarrow \boxed{z = \frac{-2}{-2} = 1} \Rightarrow \boxed{x = 1 - 1 = 0}$$

La solución del sistema es $x = 0, y = 1, z = 1$.

P3. (Análisis)

En una factoría los costes variables (miles de euros) vienen dados por la función:

$$C(x) = 2x + 720 + \frac{80000}{x}$$

siendo $x > 0$ el número de toneladas producidas.

- a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de los costes variables en esa factoría.
 b) Calcular el coste variable mínimo y el número de toneladas que se han de producir para alcanzar dicho coste mínimo.

a) Usamos la derivada.

$$C(x) = 2x + 720 + \frac{80000}{x} = 2x + 720 + 80000x^{-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} C'(x) = 2 - \frac{80000}{x^2} \\ C'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - \frac{80000}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{80000}{x^2} = 2 \Rightarrow 80000 = 2x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40000 = x^2 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{40000} = 200}$$

Solo tomamos el valor positivo de la raíz pues el dominio de la función es $x > 0$.

Comprobamos el signo de la derivada antes y después de $x = 200$.

En el intervalo $[0, 200)$ tomamos $x = 100$ y la derivada vale $C'(100) = 2 - \frac{80000}{100^2} = -6 < 0$.

La función decrece en $[0, 200)$.

En el intervalo $(200, +\infty)$ tomamos $x = 300$ y la derivada vale

$$C'(300) = 2 - \frac{80000}{300^2} = \frac{10}{9} > 0. \text{ La función crece en } (200, +\infty).$$

Los costes decrecen entre 0 y 200 toneladas y crecen a partir de 200 toneladas.

- b) En $x = 200$ hay un mínimo relativo, pues la función decrece antes de $x = 200$ y crece después de este valor. Este mínimo relativo es absoluto.

Como $C(200) = 400 + 720 + \frac{80000}{200} = 1520$ tenemos que el coste mínimo se consigue con la producción de 200 toneladas y dicho coste mínimo es de 1520 miles de euros.

P4. (Análisis)

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} 6x-1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en todo su dominio. Calcular, si los tiene, los puntos de discontinuidad.
 b) Determinar el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[1,10]$, dibujando el recinto correspondiente.

a) En el intervalo $(-\infty, 0)$ la función es $f(x) = 6x - 1$ que es continua (un trozo de recta).

En el intervalo $(0, +\infty)$ la función es $f(x) = \frac{1}{x}$ que es continua pues su denominador se anula en $x = 0 \notin (0, +\infty)$.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

Comprobamos si es continua en el cambio de definición ($x = 0$).

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0 - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 6x - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq +\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

La función es discontinua en $x = 0$.

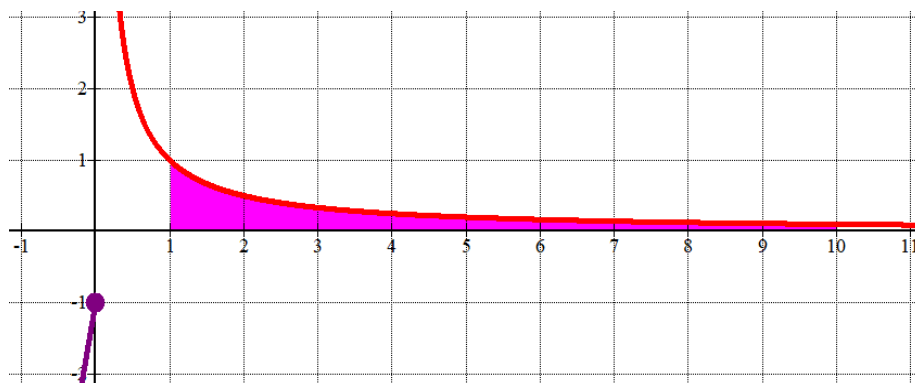
b) En el intervalo $[1,10]$ la función es $f(x) = \frac{1}{x}$.

Vemos si la gráfica corta el eje de abscisas ($y = 0$).

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \text{¡No es posible!}$$

Como la gráfica no corta el eje de abscisas el área del recinto es el valor absoluto de la integral definida de la función entre 1 y 10.

$$\text{Área} = \int_1^{10} f(x) dx = \int_1^{10} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^{10} = \ln 10 - \ln 1 = \boxed{\ln 10 \approx 2.3 u^2}$$



P5. (Estadística y probabilidad)

La recaudación diaria de una tienda de deportes de determinada marca es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ euros y desviación típica de 328 euros. Se elige una muestra de 100 tiendas de dicha marca y se obtiene una recaudación diaria media de 1248 euros.

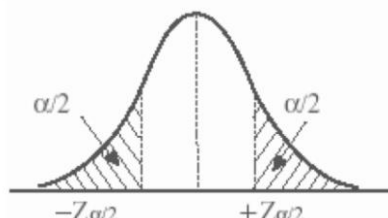
- a) Calcular el intervalo de confianza para la media μ al nivel de confianza del 99%.
 b) ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de tiendas de dicha marca para alcanzar, con un nivel de confianza del 95%, un error máximo de 127 euros en la estimación de μ ?

a) X = La recaudación diaria de una tienda de deportes. $X = N(\mu, 328)$

Tamaño de la muestra = $n = 100$. La media muestral es $\bar{x} = 1248$

Con un nivel de confianza del 99 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$$



Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{328}{\sqrt{100}} = 84.46 \text{ €}$$

El error es de 84.46 euros.

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (1248 - 84.46, 1248 + 84.46) = (1163.54, 1332.46)$$

b) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 127 = 1.96 \cdot \frac{328}{\sqrt{n}} \Rightarrow 127\sqrt{n} = 1.96 \cdot 328 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.96 \cdot 328}{127} \Rightarrow n = \left(\frac{1.96 \cdot 328}{127} \right)^2 \approx 25.62$$

Como el tamaño de la muestra debe ser entero y superior al obtenido tenemos que el tamaño mínimo de la muestra cumpliendo lo pedido es de 26 tiendas de esta marca.

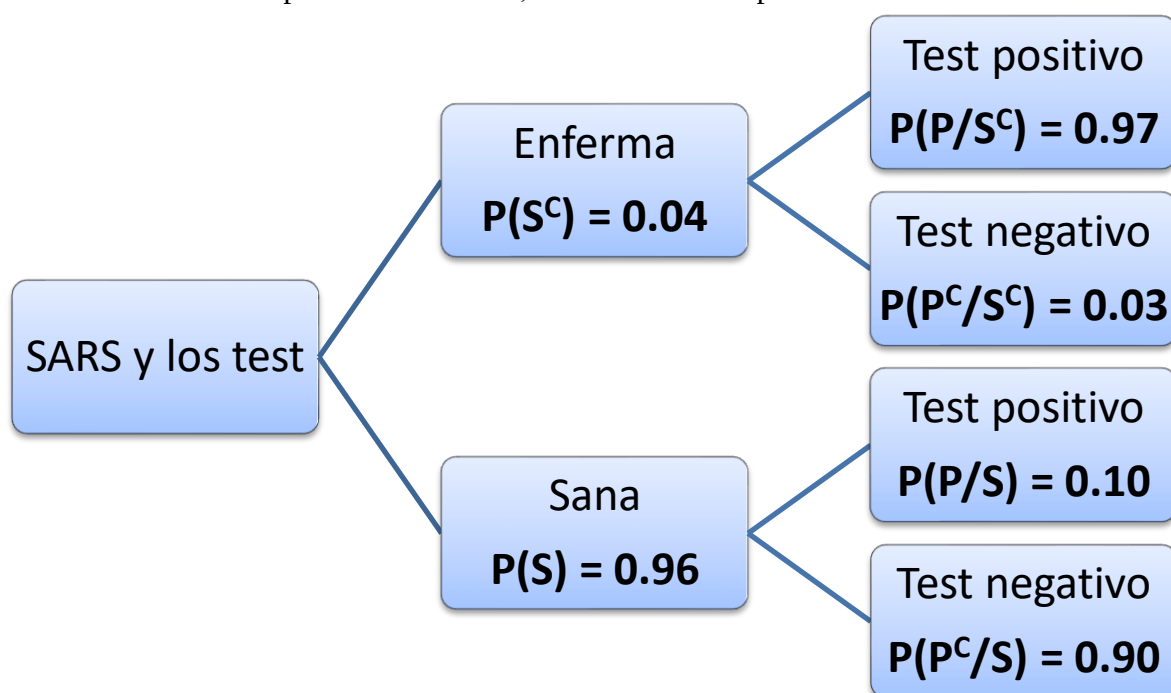
P6. (Estadística y probabilidad)

En los estudios realizados sobre un tipo de test de antígenos para detectar el SARS-COV-2 en cierta población, la probabilidad de que una persona enferma obtenga un resultado positivo es de 0.97, mientras que la probabilidad de que una persona sana obtenga un resultado negativo es 0.90. En el momento de probar este tipo de test de antígenos, la probabilidad de que una persona esté enferma en esa población es 0.04. Si se elige una persona al azar de esa población y se le realiza este tipo de test de antígenos,

- Calcular la probabilidad de que la persona elegida obtenga un resultado positivo.
- Si el resultado del test es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona elegida esté enferma con SARS-COV-2?

Realizamos un diagrama de árbol.

Llamamos S al suceso “La persona está sana”, P al suceso “Dar positivo en el test”.



- Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(P) = P(S^c)P(P/S^c) + P(S)P(P/S) = 0.04 \cdot 0.97 + 0.96 \cdot 0.10 = \boxed{0.1348}$$

- Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(S^c/P) = \frac{P(P \cap S^c)}{P(P)} = \frac{P(S^c)P(P/S^c)}{P(P)} = \frac{0.04 \cdot 0.97}{0.1348} = \frac{97}{337} \approx 0.2878$$

C1. (Números y álgebra)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 4 & 1 & 8 \\ -2 & b & 4 & c \end{pmatrix}$ hallar los valores a , b y c para que el rango de la matriz A sea 1.

Para que el rango sea 1 las dos filas deben tener valores proporcionales.

$$\frac{a}{-2} = \frac{4}{b} = \frac{1}{4} = \frac{8}{c} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} = \frac{8}{c} \rightarrow \boxed{c=32} \\ \frac{1}{4} = \frac{4}{b} \rightarrow \boxed{b=16} \\ \frac{1}{4} = \frac{a}{-2} \rightarrow -2 = 4a \rightarrow \boxed{a = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}} \end{cases}$$

Los valores buscados son $a = \frac{-1}{2}$, $b = 16$, $c = 32$.

C2. (Análisis)

Dada la función $f(x) = \ln(x^2 - 4)$, determinar su dominio de definición.

El logaritmo neperiano solo existe de números positivos.

El dominio son todos los valores que hacen positiva la expresión $x^2 - 4$.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y el valor de la función es $f(-3) = \ln((-3)^2 - 4) = \ln(5)$. La función existe en el intervalo $(-\infty, -2)$.
- En el intervalo $(-2, 2)$ tomamos $x = 0$ y el valor de la función es $f(0) = \ln(0^2 - 4) = \ln(-4)$ = **No existe**. La función no existe en el intervalo $(-2, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y el valor de la función es $f(3) = \ln(3^2 - 4) = \ln 5$. La función existe en el intervalo $(2, +\infty)$.
- En los valores $x = -2$ y $x = 2$ la función no existe pues el logaritmo neperiano de 0 no existe.

El dominio de definición de la función es $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

C3. (Estadística y probabilidad)

Para realizar un rescate, la probabilidad de llegar antes del anochecer desde el centro de emergencias situado en la localidad A es de 0.7 y 0.4 desde el situado en la localidad B. Se decide enviar a equipos desde ambas localidades. Si los equipos actúan de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno llegue antes del anochecer?

Llamamos A al suceso “Llega antes del anochecer el equipo que procede de la localidad A” y B al suceso “Llega antes del anochecer el equipo que procede de la localidad B”.

Nos piden calcular $P(A \cup B)$.

Como son independientes los sucesos tenemos que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.7 + 0.4 - 0.7 \cdot 0.4 = \boxed{0.82}$$

La probabilidad de que al menos uno de los equipos de rescate llegue antes del anoecer es de 0.82.